Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

ГЕОДЕЗИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ІНВАРІАНТНІСТЬ ТЕНЗОРУ ЕНЕРГІЇ-ІМПУЛЬСУ

Євген Черевко

Одеський національний економічний університет, вул. Преображенська 8, Одеса 65082

Євген Черевко. *Геодезичні відображення та інваріантність тензору енергії-імпульсу* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 105–114.

Вивчаються геодезичні відображення, що зберігають тензор енергії-імпульсу. Виведено відповідні диференційні рівняння в часткових похідних та умови їх інтегровності. Окрім тензора енергії-імпульсу, знайдено інші інваріанти таких відображень. Розглянуто геодезичні відображення, що відповідають семи класам рівнянь Ейнштейна, виведених Степановим.

Eugen Cherevko, *Geodesic mappings preserving the stress–energy tensor*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 105–114.

We study geodesic mappings preserving the stress-energy tensor. We have derived corresponding partial differential equations. Integrability conditions are obtained. In addition to the stress-energy tensor we get other invariants for the mappings. There are well-known the seven classes of the Einstein equations derived by Stepanov. We considered the geodesic mappings of spaces corresponding to the classes on each other.

1. Вступ

Дослідження проблем, пов'язаних із збереженням при дифеорморфізмах певних геметричних об'єктів, завжди є привабливим для дослідників, про що свідчить велика кількість публікацій, починаючи з піонерських робіт Леві-Чивіта [11]. Й. Мікеш, В.А. Кіосак, О.Є. Чепурна ([6], [7]) досліджували геодезичні відображення, що залишають незмінним тензор Ейнштейна. Також варто відзначити цікаву роботу [9], що вивчає збереження тензору енергії-імпульсу при конформних відображеннях.

Статтю присвячено питанню перетворення тензору енергії-імпульсу при геодезичних відображеннях ріманових просторів та умови його збереження при цих відображеннях. Розглянуто геодезичні відображення як довільних ріманових многовидів, що

2010 *Mathematics Subject Classification:* 53C21 *УДК:* 514.743.4
Ключові слова і фрази: Ріманові простори, рівняння Ейнштейна, тензор енергії-імпульсу, геодезичні відображення
E-mail: cherevko@usa.com

лишають інваріантним тензор енергії-імпульсу, так і ріманових многовидів з додатковими структурами, а саме конформно-гармонічних просторів, просторів з різних класів Степанова. Для розглянутих випадків ми отримали необхідні умови існування таких відображень, доведено неіснування таких відображень для деяких класів просторів. Дослідження носять локальний характер, полягають у вивченні диференціальних рівнянь у частинних похідних та умов їх інтегровності. Геометричні об'єкти вважаються такими, що мають достатній степінь гладкості.

Відомо ([1], [4]), що поля тяжіння у просторі (V_n, g) описуються рівняннями Ейнштейна:

$$R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} = -\frac{8\pi k}{c^4} T_{ij}. \tag{1}$$

У лівій частині наявні такі геометричні об'єкти простору (V_n, g), як $R_{ij} = R^{\alpha}{}_{ij\alpha}$ – тензор Річчі, g_{ij} – псевдоріманова метрика, $R = R_{ij}g^{ij}$ – скалярна кривина. Символом T_{ij} позначено двічі коваріантний тензор енергії-імпульсу. Нарешті, c – швидкість світла у вакуумі та k – гравітаційна стала. Зазначимо, що можна вибрати таку систему одиниць, в якій (1) матиме вигляд:

$$R_{ij} - \tfrac{Rg_{ij}}{2} = -T_{ij}. \tag{1'}$$

Крім того зауважимо, що всюди надалі вважатимемо вимір просторів, що розглядаються $n > 2$. Ми вивчатимемо перетворення тензору енергії-імпульсу при геодезичних відображеннях просторів $(V_n, g) \to (\overline{V}_n, \overline{g})$. Подібним чином у роботах ([6], [7]) досліджуються геодезичні відображення, що лишають незмінним тензор Ейнштейна:

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{n}.$$

Але метою нашого дослідження є, власне, тензор

$$S_{ij} = -T_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2},$$

який у деяких класичних джерелах, зокрема в [3], має також назву тензора Ейнштейна. Нагадаємо ([2], [5]):

Означення 1. *Геодезичне відображення* (псевдо)ріманового простору (V_n, g) на іншій (псевдо)рімановий простір $(\overline{V}_n, \overline{g})$ – це така взаємно однозначна відповідність між їх точками, при якій кожна геодезична лінія простору (V_n, g) переходить в геодезичну лінію простору $(\overline{V}_n, \overline{g})$.

Позначивши компоненти об'єктів зв'язності просторів (V_n, g) та $(\overline{V}_n, \overline{g})$ відповідно через Γ^h_{ij} та $\overline{\Gamma}^h_{ij}$, маємо перше рівняння Леві-Чивіта:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i.$$

Тут δ^i_j – символ Кронекера, ψ_i – компоненти деякої точної диференціальної 1-форми. Друге рівняння Леві-Чивіта є диференціальним рівнянням відносно метрики $\overline{g}$ простору $\overline{V}_n$:

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik}. \tag{2}$$

У (2) комою позначена коварінтна похідна у зв'язності, узгодженій із метрикою простору (V_n, g). Відомо також, що тензори кривини просторів (V_n, g) та $(\overline{V}_n, \overline{g})$ пов'язані рівністю:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \psi_{ij} - \delta^h_j \psi_{ik}, \tag{3}$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j. \tag{4}$$

Існує аналогічний зв'язок між тензорами Річчі:

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\psi_{ij}. \tag{5}$$

Згідно з $(1')$, деформацію тензору енергії-імпульсу можна записати наступним чином:

$$\overline{T}_{ij} - T_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} - \overline{R}_{ij} + \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2}. \tag{6}$$

Беручи до уваги (5) та (6), маємо:

$$\overline{T}_{ij} - T_{ij} = \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2} - \frac{Rg_{ij}}{2} - (n-1)\psi_{ij}. \tag{7}$$

2. Збереження тензору енергії-імпульсу при геодезичних відображеннях

Нас цікавить випадок, коли $\overline{T}_{ij} - T_{ij} = 0$. Враховуючи (4), з (7) випливає, що ковектор ψ_i має задовільняти системі

$$\psi_{i,j} = \psi_i \psi_j + \frac{1}{2(n-1)}(\overline{R}\overline{g}_{ij} - Rg_{ij}). \tag{8}$$

Необхідно отримати та дослідити умови інтегровності (8). Для цього ми диференціюємо (8) по x^k у зв'язності, узгодженій з метрикою g_{ij}. Беручи до уваги (2), маємо:

$$\psi_{i,jk} = \psi_i \psi_j \psi_k + \psi_i \psi_{j,k} + \frac{\psi_k \overline{R}\overline{g}_{ij} + \psi_j \overline{R}\overline{g}_{ik}}{n-1} + \frac{\partial_k \overline{R}\overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{R}\overline{g}_{jk} - \partial_k R g_{ij} - \psi_j R g_{ik}}{2(n-1)}.$$

Альтернуючи по j та k і застосовуючи тотожність Річчі:

$$\psi_{i,jk} - \psi_{i,kj} = \psi_\alpha R^\alpha_{ijk}, \tag{9}$$

отримуємо:

$$\psi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \frac{1}{2(n-1)}\big(\partial_k \overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik} + R(\psi_k g_{ij} - \psi_j g_{ik})\big). \tag{10}$$

Умову (10) можна записати іншим чином:

$$\psi_\alpha R^\alpha_{ijk} - \psi_\alpha \frac{R}{2(n-1)}\big(\delta^\alpha_k g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{ik}\big) = \frac{1}{2(n-1)}\big(\partial_k \overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik}\big),$$

або:
$$\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = \frac{1}{2(n-1)}\big(\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j\overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k Rg_{ij} + \partial_j Rg_{ik}\big), \tag{11}$$
де
$$Y^h_{ijk} \overset{\text{def}}{=} R^h_{ijk} - \frac{R}{2(n-1)}\big(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\big). \tag{12}$$
З (5) можна виразити $\psi_{ij} = \frac{1}{2(n-1)}(\overline{R}\overline{g}_{ij} - Rg_{ij})$ та підставити у (3):
$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k\frac{1}{2(n-1)}\big(\overline{R}\overline{g}_{ij} - Rg_{ij}\big) - \delta^h_j\frac{1}{2(n-1)}\big(\overline{R}\overline{g}_{ik} - Rg_{ik}\big). \tag{13}$$
Отже, з (13) випливає рівність $\overline{Y}^h_{ijk} = Y^h_{ijk}$. Таким чином, нами доведена:

Теорема 2. *Тензор $Y^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{2(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$ є інваріантним при геодезичних відображеннях, що зберігають тензор енергії-імпульсу.*

Додамо, що:
$$Y^\alpha_{ij\alpha} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} = S_{ij} \tag{14}$$
та
$$Y^h_{\alpha\beta k}g^{\alpha\beta} = R^h_k - \frac{R\delta^h_k}{2} = S^h_k. \tag{15}$$

У загальному випадку, без вимоги $\overline{T}_{ij} - T_{ij} = 0$, якщо простори (V_n, g) та $(\overline{V}_n, \overline{g})$ знаходяться у геодезичній відповідності, має виконуватись система:
$$\psi_{i,j} = \psi_i\psi_j + \frac{1}{n-1}(\overline{R}_{ij} - R_{ij}). \tag{16}$$

Диференціюємо (16) по x^k у зв'язності, узгодженій з метрикою g_{ij}:
$$\psi_{i,jk} = \psi_{i,k}\psi_j + \psi_i\psi_{j,k} + \frac{\overline{R}_{ij,k} - R_{ij,k}}{n-1} = \psi_i\psi_j\psi_k + \frac{\psi_j\overline{R}_{ik} - \psi_j R_{ik}}{n-1} + \psi_i\psi_{j,k} + \frac{\overline{R}_{ij,k} - R_{ij,k}}{n-1}. \tag{17}$$
З іншого боку, коваріантна похідна по x^k тензору Річчі $\overline{R}_{ij}$ простору $(\overline{V}_n, \overline{g})$ у зв'язності, узгодженій з метрикою $\overline{g}_{ij}$ (замість коми, позначаючи відповідну коваріантну похідну, ми використовуємо вертикальну риску):
$$\overline{R}_{ij|k} = \overline{R}_{ij,k} - \overline{R}_{\alpha j}(\delta^\alpha_i\psi_k + \delta^\alpha_k\psi_i) - \overline{R}_{i\alpha}(\delta^\alpha_j\psi_k + \delta^\alpha_k\psi_j),$$
отже:
$$\overline{R}_{ij,k} = \overline{R}_{ij|k} + \overline{R}_{\alpha j}(\delta^\alpha_i\psi_k + \delta^\alpha_k\psi_i) + \overline{R}_{i\alpha}(\delta^\alpha_j\psi_k + \delta^\alpha_k\psi_j) = \overline{R}_{ij|k} + 2\psi_k\overline{R}_{ij} + \psi_i\overline{R}_{kj} + \psi_j\overline{R}_{ik}.$$

Підставивши у (17), маємо:
$$\begin{aligned}\psi_{i,jk} &= \psi_{i,k}\psi_j + \psi_i\psi_{j,k} + \frac{1}{n-1}\big(\overline{R}_{ij,k} - R_{ij,k}\big) = \\ &= \psi_i\psi_j\psi_k + \psi_i\psi_{j,k} + \frac{1}{n-1}\big(\overline{R}_{ij|k} + 2\psi_k\overline{R}_{ij} + 2\psi_j\overline{R}_{ik} + \psi_i\overline{R}_{kj} - \psi_j R_{ik} - R_{ij,k}\big).\end{aligned} \tag{18}$$

Альтернуємо (18) по j та k, врахувавши (9):

$$\psi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1}\big(\overline{R}_{ij|k} - \overline{R}_{ik|j} - R_{ij,k} + R_{ik,j} - \psi_j R_{ik} + \psi_k R_{ij}\big).$$

Отже,

$$\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1}\big(\overline{R}_{ij|k} - \overline{R}_{ik|j} - R_{ij,k} + R_{ik,j}\big), \tag{19}$$

де

$$W^h_{ijk} \overset{\text{def}}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\big(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}\big) \tag{20}$$

– тензор Вейля проективної кривини. Оскільки відомо, що $W^\alpha_{ijk,\alpha} = \frac{n-2}{n-1}(R_{ij,k} - R_{ik,j})$, умови (19) можна записати у виді: $\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-2}(W^\beta_{ijk|\beta} - W^\gamma_{ijk,\gamma})$.

Зазначимо, що умови інтегровності (2) мають вигляд [10]: $\overline{g}_{i\alpha}\overline{R}^\alpha_{jkl} + \overline{g}_{\beta j}\overline{R}^\beta_{ikl} = 0$, де $\overline{R}^h_{ijk}$ визначається за рівністю (3), тобто розв'язок рівняння (2) має бути метрикою простору $(\overline{V}_n, \overline{g})$.

Тепер віднімемо відповідно праві та ліви частини рівностей (19) (яка є завжди справедливою при геодезичних відображеннях (псевдо)риманових просторів) та (11) (виконується у нашому, спеціальному випадку):

$$\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} - \psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1}\big((\overline{R}_{ij|k} - \overline{R}_{ik|j} - R_{ij,k} + R_{ik,j}) - \frac{1}{2}(\partial_k \overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik})\big).$$

Групуючи та зводячи подібні, маємо:

$$-\psi_\alpha H^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1}\big(S_{ij|k} - S_{ik|j} - S_{ij,k} + S_{ik,j}\big), \tag{21}$$

де

$$H^h_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1}\big(\delta^h_k S_{ij} - \delta^h_j S_{ik}\big), \quad S_{ij} = R_{ij} - \frac{R g_{ij}}{2}.$$

Оскільки $H^\alpha_{ijk,\alpha} = \frac{1}{n-1}(S_{ij,k} - S_{ik,j})$, то рівняння (20) можна записати у вигляді: $\psi_\alpha H^\alpha_{ijk} = H^\alpha_{ijk,\alpha} - H^\alpha_{ijk|\alpha}$. Крім того, тензор H^h_{ijk} має властивості:

$$H^\alpha_{ij\alpha} = R_{ij} - \frac{R g_{ij}}{2} = S_{ij}$$

та

$$H^h_{\alpha\beta k} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{n-1}\left(R^h_k - \frac{(n-3)R\delta^h_k}{2}\right).$$

Зрозуміло, тензор H^h_{ijk} також є інваріантом при геодезичних відображеннях, що зберігають тензор енергії-імпульсу. Повертаючись до умови (21), очевидно, що вона рівносильна (11) при геодезичних відображеннях (оскільки справедлива рівність (19)). Отже, є справедливою

Теорема 3. *Якщо простори (V_n, g) та $(\overline{V}_n, \overline{g})$ знаходяться у геодезичній відповідності, породженій ковектором ψ_i так, що тензор енергії-імпульсу є інваріантним, то мають виконуватись умови:*

1) $\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = \frac{1}{2(n-1)}(\partial_k \overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik})$*;*

2) $-\psi_\alpha H^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1}(S_{ij|k} - S_{ik|j} - S_{ij,k} + S_{ik,j})$.

Умови 1) та 2) в цьому випадку є еквівалентними.

Тепер перейдемо до розгляду спеціальних випадків.

3. Геодезичні відображення конформно-гармонічних просторів

Означення 4. (Псевдо)рімановий простір (V_n, g) називається *конформно-гармонічним*, якщо в ньому виконується тотожність:

$$C^\alpha_{ijk,\alpha} = \frac{n-3}{n-2}\Big(R_{ij,k} - R_{ik,j} + \frac{1}{2(n-1)}\big(\partial_j R g_{ik} - \partial_k R g_{ij}\big)\Big) = 0.$$

Тут C^h_{ijk} – тензор Вейля конформної кривини:

$$C^h_{ijk} \overset{\text{def}}{=} R^h_{ijk} + \frac{1}{n-2}\left(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik} R^h_j - g_{ij} R^h_k\right) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}\right).$$

Отже, у конформно-гармонічному просторі ($n > 3$) має місце:

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)}\big(\partial_k R g_{ij} - \partial_j R g_{ik}\big). \tag{22}$$

З (22) випливає, що (11) можна записати

$$\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = R_{ij|k} - R_{ik|j} - R_{ij,k} + R_{ik,j},$$

тому, врахувавши (19), маємо:

$$\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} - \frac{1}{n-1}\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0. \tag{23}$$

Підставимо у (23) праві частини (12) та (20):

$$\psi_\alpha\Big(R^\alpha_{ijk} - \frac{1}{n-1}\big(\delta^\alpha_k R_{ij} - \delta^\alpha_j R_{ik}\big) - \frac{1}{n-1}\Big(R^\alpha_{ijk} - \frac{R}{2(n-1)}\big(\delta^\alpha_k g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{ik}\big)\Big)\Big) = 0.$$

Звівши подібні, можна записати (23) у вигляді:

$$\frac{n-2}{n-1}\psi_\alpha Q^\alpha_{ijk} = 0,$$

де

$$Q^h_{ijk} \overset{\text{def}}{=} R^h_{ijk} - \frac{\delta^h_k}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}\big) + \frac{\delta^h_j}{n-2}\big(R_{ik} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ik}\big). \tag{24}$$

Причому, тензор Q^h_{ijk} буде інваріантом при геодезичних відображеннях, що зберігають тензор енергії-імпульсу. Таким чином, ми довели таку теорему:

Теорема 5. *Якщо конформно-гармонічні простори (V_n, g) та $(\overline{V}_n, \overline{g})$ $(n > 3)$ знаходяться у геодезичній відповідності, породженій ковектором ψ_i так, що тензор енергії-імпульсу є інваріантним, то є необхідною умова: $\psi_\alpha Q^\alpha_{ijk} = 0$.*

Беручи до уваги, що тензор Брінкмана має вигляд:

$$L_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-2}\Big(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}\Big),$$

то (24) можна записати як:

$$Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} - (\delta^h_k L_{ij} - \delta^h_j L_{ik}).$$

Крім того, тензор Q^h_{ijk} має властивості:

$$Q^\alpha_{ij\alpha} = -\frac{1}{n-2}\Big(R_{ij} - \frac{R g_{ij}}{2}\Big) = -\frac{1}{n-2} S_{ij}$$

та

$$Q^h_{\alpha\beta k} g^{\alpha\beta} = \frac{n-1}{n-2}\Big(R^h_k - \frac{R}{2(n-1)}\delta^h_k\Big) = (n-1)L^h_k. \tag{25}$$

Зауважимо, що теорема 5 справджується також при $n = 3$, якщо виконується умова (22).

4. Геодезичні відображення просторів, що належать до класів Степанова

Нарешті, розглянемо застосування отриманих результатів до просторів, що відносяться до класів, описаних в [8]. Нагадаємо, що згідно запропонованої автором класифікації, можливі розв'язки рівнянь Ейнштейна поділяються на сім класів. Перші три з них визначені властивостями:

$$\Omega_1: \qquad R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0, \tag{26}$$

$$\Omega_2: \qquad R_{ij,k} - R_{ik,j} = 0, \tag{27}$$

$$\Omega_3: \qquad R_{ij,k} = \frac{n-2}{2(n-1)(n+2)}\Big(\frac{2n}{n-2}\partial_k R g_{ij} + \partial_i R g_{kj} + \partial_j R g_{ik}\Big). \tag{28}$$

Наведемо деякі властивості відповідних просторів [8]. Якщо ми згорнемо (26) з тензором g^{ij}, що є оберненим до метричного, отримаємо: $\partial_k R + 2R^\alpha_{k,\alpha} = 0$. Внаслідок тотожності $\partial_k R = 2R^\alpha_{k,\alpha}$ випливає, що

$$\partial_k R = 0, \tag{29}$$

отже, скалярна кривина просторів класу Ω_1 є сталою. Аналогічні міркування показують, що властивість (29) виконується також і для класу Ω_2. З іншого боку, для просторів класів Ω_2 та Ω_3 виконується рівність (22). Наступні три класи є попарними об'єднаннями перших трьох, виходячи із спільних для класів властивостей. Нарешті, сьомий клас є, власне, перетином перших трьох. Ми зупинимось лише на дослідженні геодезичних відображень просторів, що входять до класів Ω_1, Ω_2 та Ω_3. Нижче ми будемо для спрощення, геодезичне відображення між просторами $(V_n, g) \in \Omega_1$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_1$, породжене ковектором ψ_i позначати як $\gamma : (V_n, g) \xrightarrow{\psi_i} (\overline{V}_n, \overline{g})$.

1) $\gamma : (V_n, g) \xrightarrow{\psi_i} (\overline{V}_n, \overline{g})$, $(V_n, g) \in \Omega_1$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_1$.
З (29) випливає, що в цьому випадку є необхідною рівність:

$$\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0. \tag{30}$$

2) $\gamma : (V_n, g) \xrightarrow{\psi_i} (\overline{V}_n, \overline{g})$, $(V_n, g) \in \Omega_2$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_2$.
З одного боку, оскільки у цих просторів також є властивість (29), то є справедливим (30). З іншого боку, з (22) випливає вимога:

$$\psi_\alpha Q^\alpha_{ijk} = 0. \tag{31}$$

Згорнемо (30) та (31) з g^{ij}. Враховуючи (15) та (25) маємо:

$$\psi_\alpha \Big(R^\alpha_k - \frac{R\delta^\alpha_k}{2} \Big) = 0; \tag{32}$$

$$\psi_\alpha \Big(R^\alpha_k - \frac{R\delta^\alpha_k}{2(n-1)} \Big) = 0. \tag{33}$$

Порівнюючи (32) та (33), маємо, що при $n > 2$ необхідно $\psi_k = 0$, отже, нами доведена

Теорема 6. *Між просторами, що належать класу Ω_2 $(n > 2)$ не існує нетривіальних геодезичних відображень, що зберігають тензор енергії-імпульсу.*

3) $\gamma : (V_n, g) \xrightarrow{\psi_i} (\overline{V}_n, \overline{g})$, $(V_n, g) \in \Omega_3$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_3$.
Оскільки для цих просторів виконується (22), з теореми 5 випливає, що в цьому випадку є необхідною умова (31):

$$\psi_\alpha Q^\alpha_{ijk} = 0.$$

4) $\gamma : (V_n, g) \xrightarrow{\psi_i} (\overline{V}_n, \overline{g})$, $(V_n, g) \in \Omega_1$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_2$.
У кожного з цих просторів є властивість (29), тому справедлива рівність (30): $\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0$. Крім того, внаслідок (27), для геометричних об'єктів простору $(V_n, g) \in \Omega_1$ має виконуватись вимога:

$$\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1} \big(R_{ik,j} - R_{ij,k} \big). \tag{34}$$

Згорнемо (34) з g^{ij}:

$$\psi_\alpha W^\alpha_{\beta\gamma k} g^{\beta\gamma} = \frac{1}{n-1} \big(R^\alpha_{k,\alpha} - \partial_k R \big) = -\frac{\partial_k R}{2(n-1)}.$$

Оскільки

$$W^h_{\beta\gamma k} g^{\beta\gamma} = \frac{n}{n-1} \big(R^h_k - \frac{R}{n} \delta^h_k \big),$$

то
$$n\psi_\alpha\big(R^\alpha_k - \frac{R}{n}\delta^\alpha_k\big) = -\frac{\partial_k R}{2}. \tag{35}$$
Беручи до уваги (29), з (35) випливає:
$$\psi_\alpha\big(R^\alpha_k - \frac{R}{n}\delta^\alpha_k\big) = 0. \tag{36}$$
Порівнюємо (36) та (32):
$$\psi_\alpha\big(R^\alpha_k - \frac{R\delta^\alpha_k}{2}\big) = 0.$$
Отже, знову, при $n > 2$ необхідно $\psi_k = 0$. Таким чином, нами доведена

Теорема 7. *Між просторами, $(V_n, g) \in \Omega_1$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_2$ $(n > 2)$ не існує нетривіальних геодезичних відображень, що зберігають тензор енергії-імпульсу.*

5) $\gamma : (V_n, g) \overset{\psi_i}{\to} (\overline{V}_n, \overline{g})$, $(V_n, g) \in \Omega_3$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_1$.
Внаслідок (11), враховуючи що для $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_1$ виконується $\partial_k\overline{R} = 0$, геометричні об'єкти простору $(V_n, g) \in \Omega_3$ мають задовільняти вимозі:
$$\psi_\alpha Y^\alpha_{ijk} = \frac{1}{2(n-1)}\big(\partial_j R g_{ik} - \partial_k R g_{ij}\big), \tag{37}$$
Згорнемо (37) з g^{ij}. Використовуючи (15), маємо:
$$\psi_\alpha\Big(R^\alpha_k - \frac{R\delta^\alpha_k}{2}\Big) = -\frac{\partial_k R}{2}. \tag{38}$$

6) $\gamma : (V_n, g) \overset{\psi_i}{\to} (\overline{V}_n, \overline{g})$, $(V_n, g) \in \Omega_3$ та $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_2$.

Оскільки для $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_2$ є справедливим $\partial_k\overline{R} = 0$, то у просторі $(V_n, g) \in \Omega_3$ виконуються умови (37), а, отже, і (38):
$$\psi_\alpha\Big(R^\alpha_k - \frac{R\delta^\alpha_k}{2}\Big) = -\frac{\partial_k R}{2}.$$
З іншого боку, для обох просторів виконується (22), тому буде справедливою рівність (37), і внаслідок, (33):
$$\psi_\alpha\Big(R^\alpha_k - \frac{R\delta^\alpha_k}{2(n-1)}\Big) = 0.$$
Віднімаємо від (33) рівність (38):
$$\psi_\alpha\Big(\frac{R\delta^\alpha_k}{2} - \frac{R\delta^\alpha_k}{2(n-1)}\Big) = \frac{\partial_k R}{2}.$$
Звідси, якщо $R \neq 0$,
$$\psi_k = \frac{n-1}{n-2}\,\frac{\partial_k R}{R}. \tag{39}$$
Рівняння (39) можна записати як
$$\psi_k = \frac{n-1}{n-2}\,\partial_k \ln R. \tag{40}$$
Розв'язок рівняння (40) є очевидним: $\psi = \frac{n-1}{n-2}\ln R$. Звідси випливає

Теорема 8. *Якщо між просторами* $(V_n, g) \in \Omega_3$ *та* $(\overline{V}_n, \overline{g}) \in \Omega_2$ $(n > 2)$ *існує нетривіальне геодезичне відображення* $\gamma : (V_n, g) \overset{\psi_i}{\to} (\overline{V}_n, \overline{g})$, *що зберігає тензор енергії-імпульсу, причому, скалярна кривина* $(V_n, g) \in \Omega_3$, $R \neq 0$, *то скаляр* ψ, *що визначає відображення, однозначно визначається об'єктами простору* $(V_n, g) \in \Omega_3$*:*

$$\psi = \frac{n-1}{n-2} \ln R.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, *Теория поля*, М: Наука, (1988), 512 с.
2. J. Mikeš, A. Vanžurovà, I. Hinterleitner, *Geodesic mappings and some generalizations*, Palacky University Press, Olomouc, (2009), 304 p.
3. А.З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности*, М: Наука, (1966), 496 с.
4. П.К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, М: Наука, (1967), 664 с.
5. Н.С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, М: Наука, (1979), 257 с.
6. O.E. Chepurna, V.A. Kiosak, J. Mikeš, *On geodesic mappings preserving the Einstein tensor*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. **49**:2 (2010), 49–52.
7. Е.Е. Чепурная, В.А. Киосак, *Инвариантные преобразования с сохранением геодезических*, Proc. Intern. Geom. Center. **4**:2 (2011), 36–42.
8. S.E. Stepanov, I.I. Tsyganok, *The Seven Classes of the Einstein Equations*, arXiv:1001.4673v1 [math.DG] 26 Jan 2010.
9. В.А. Киосак, *Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса*, Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. **26** (2011), 98–104.
10. Л.П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, М.: ИЛ, (1948), 316 с.
11. T. Levi-Civita, *Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche*, Ann. Mat. Pura Appl. **24**:1 (1896), 255–300.

Надійшло 15.11.2012

Після переробки 26.04.2013