



ПРИКЛАДИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З СУЦІЛЬНИМИ РОЗРИВАМИ НА ГОРИЗОНТАЛЯХ

Т.О. БАНАХ¹, В.К. МАСЛЮЧЕНКО², О.І. ФІЛІПЧУК²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Т.О. Банак, В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук. *Приклади нарізно неперервних відображень з суцільними розривами на горизонталях* // Мат. вісник НТШ, **14** (2017) 52–63.

Побудовані приклади нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \rightarrow Z$, які скрізь розривні чи розривні у кожній точці деякої горизонталі $X \times \{b\}$ і набувають значень у σ -метризованому просторі Z .

T.O. Banakh, V.K. Maslyuchenko, O.I. Filipchuk, *Examples of separately continuous mappings with horizontals consisting of discontinuity points*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **14** (2017), 52–63.

We construct examples of separately continuous mappings $f : X \times Y \rightarrow Z$ with values in a σ -metrizable space Z , such that for some $b \in Y$ the whole horizontal line $X \times \{b\}$ consists of discontinuity points of f .

1. Вступ

У праці [1] було встановлено, що для топологічних просторів X , Y і Z , таких, що Y має зліченну псевдобазу, а Z – σ -метризований, у кожного горизонтально квазінеперервного відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$, яке неперервне

2010 *Mathematics Subject Classification*: 54C08

УДК: 515.12

Ключові слова та фрази: нарізно неперервне відображення

E-mail: t.o.banakh@gmail.com, v.maslyuchenko@gmail.com

відносно другої змінної, множина $C(f)$ його точок неперервності є залишковою в добутку $X \times Y$, тобто множина $D(f)$ його точок розриву є першої категорії в $X \times Y$. У [2] було з'ясовано, що неперервність відносно другої змінної у цій теоремі можна замінити на квазінеперервність. Коли ж простір значень Z є сильно σ -метризовним чи \aleph_0 -простором, а простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то у таких відображень для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ буде залишковою в X (див. [1], [3]). Звичайно, всі ці властивості за таких умов мають і нарізно неперервні відображення.

У праці [4] було доведено, що нарізно неперервні відображення $f : [0, 1]^2 \rightarrow C_p[0, 1]$ зі значеннями у просторі $C_p[0, 1]$ всіх неперервних функцій $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ з топологією поточної збіжності мають залишкову множину точок неперервності і разом з тим, у [5] був вказаний приклад нарізно неперервного відображення $f_0 : [0, 1]^2 \rightarrow C_p[0, 1]$, у якого $D(f_0) = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Тому постало таке

Питання 1. Чи існують такі непорожні топологічні простори X , Y і Z і нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$, що Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – σ -метризовний і на деякій горизонталі $X \times \{b\}$ відображення f не має точок неперервності?

Відповідь на це питання нескладно отримати. По-перше, її можна вивести з одного результату Дж. Бреккенріджа та Т. Нішіури [6], з якого випливає, що існує нарізно неперервна функція $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$, у якої $D(f) = \mathbb{Q}^2$. Тут простір значень Z навіть метризовний.

Тому питання 1 варто уточнити. Справа в тому, що залишкова множина в квадраті $[0; 1]^2$, як і в кожному берівському просторі, буде всюди щільною, отже, у прикладі з праці [5] функція f_0 буде мати всюди щільну в $[0; 1]^2$ множину $C(f_0)$ точок неперервності. Тому точнішим варіантом питання 1 буде

Питання 2. Чи існують такі непорожні топологічні простори X , Y і Z і нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$, що добуток $X \times Y$ берівський, Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – σ -метризовний і на деякій горизонталі $X \times \{b\}$ відображення f не має точок неперервності?

Приклад з [5] тут не проходить, бо простір $C_p[0, 1]$ не є σ -метризовним [4].

Ясно, що простір Z у такому прикладі має бути σ -метризовним, але не сильно σ -метризовним. Прикладом такого простору є площина Бінга \mathbb{B} (див. [8]). Отже, питання 2 можна конкретизувати, взявши в ньому $Z = \mathbb{B}$. Оскільки у [8]

було з'ясовано, що для c -зв'язних просторів X і Y кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{B}$ є сталим, то для побудови прикладу простори X і Y слід взяти дуже незв'язними. Так виникла кандидатура прямої Зоргенфрея \mathbb{L} [9, с. 47] і

Питання 3. Чи існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, у якого $C_b(f) = \emptyset$ для деякого $b \in \mathbb{L}$?

Зауважимо, що як сама пряма Зоргенфрея \mathbb{L} , так і її квадрат – це берівські простори з першою аксіомою зліченності.

Тут ми дамо відповідь на питання 2, навівши приклад двох метризовних компактів X , Y , регулярного простору Z , який є об'єднанням зростаючої послідовності своїх підпросторів Z_n , що є метризовними компактами, і нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$, яке скрізь розривне на деякій горизонталі $X \times \{b\}$.

Далі ми даємо позитивну відповідь на питання 3, показавши, що для кожного $b \in \mathbb{L}$ існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, у якого $C_b(f) = \emptyset$. При цьому ми використовуємо те, що площина Бінга \mathbb{B} – це нерегулярний простір з першою аксіомою зліченності. Цю побудову ми узагальнюємо на випадок, коли X і Y – нуль-вимірні T_1 -простори без ізольованих точок, причому X має зліченний псевдохарактер, Y – задовольняє першу аксіому зліченності і Z – нерегулярний простір з першою аксіомою зліченності.

2. Приклад нарізно неперервного відображення без точок неперервності на деякій горизонталі

Нехай $\omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ – перший нескінченний ординал, який ми ототожнюємо з множиною $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ всіх натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, об'єднаною з нульовим елементом. Розглянемо канторовий куб $X = \{0, 1\}^\omega$, наділений топологією тихоновського добутку дискретних двоточок [9, с. 137]. Добре відомо [12, с.124], що канторів куб гомеоморфний канторівій множині $C \subset [0, 1]$. Гомеоморфізм $\varphi : X \rightarrow C$ будується за правилом $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x(k)}{3^{k+1}}$. Для елемента $x \in X$ і номера $n \in \omega$ звуження $x|_{\{0,1,\dots,n-1\}}$ ми називаємо *зрізкою* і позначаємо через $x|n$. Для точки $a \in X$ і номера n покладемо

$$U_n(a) = \{x \in X : x|n = a|n\}.$$

Множини $U_n(a)$ є відкрито-замкненими в X і система $\mathcal{U}(a) = \{U_n(a)_{n \in \omega} -$

це база околів точки a у просторі X . Простір X ми будемо коротко позначати символом 2^ω . Цей простір є метризовним компактом.

Ототожнимо кожний номер $n \in \omega$ з множиною $\{0, \dots, n-1\}$, а множину $\{0, 1\}^n$ всіх скінченних послідовностей $(x(0), \dots, x(n-1))$ з нулів та одиниць коротко позначимо через 2^n . Нехай $2^{<\omega} = \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n$ – це сукупність усіх скінченних послідовностей з нулів і одиниць. Введемо на множині $Z = 2^\omega \cup 2^{<\omega} = 2^{\leq\omega}$ топологію \mathcal{T} , вважаючи, що підмножина U простору (Z, \mathcal{T}) є відкритою, якщо перетин $U \cap 2^\omega$ відкритий у 2^ω і для кожного $x \in U \cap 2^\omega$ існує такий номер n , залежний, взагалі кажучи, від x , що $x|k \in U$ як тільки $k \geq n$. Ясно, що у введеному топологічному просторі Z для кожного $x \in 2^\omega$ послідовність зрізок $x|n$ збігається до x . Зауважимо, що для довільного $z \in 2^{<\omega}$ одноточкова множина $U = \{z\}$ є відкритою в Z , адже $U \cap 2^\omega = \emptyset$. Таким чином, точки з $2^{<\omega}$ є ізольованими у просторі Z . Крім того, ясно, що простір $X = 2^\omega$ зі своєю топологією є підпростором простору Z .

Покладемо $Z_n = 2^\omega \cup 2^{\leq n}$, де $2^{\leq n} = \bigcup_{k \leq n} 2^k$. Підпростір 2^ω простору Z – це метризовний компакт, а підпростір $2^{\leq n}$ складається зі скінченного числа ізольованих точок, отже, теж є метризовним компактом. Підпростір Z_n є топологічною сумою просторів 2^ω та $2^{\leq n}$, тому також є метризовним компактом. При цьому $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного n і $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Простори Z_n замкнені в Z . Таким чином, Z – це σ -метризовний і σ -компактний простір, який має вичерпування $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$, що складається з метризовних компактів.

Покажемо, що простір Z регулярний, тобто T_1 - і T_3 -простір. Замкненість одноточкових підмножин простору Z очевидна для точок $z \in 2^\omega$, адже множина 2^ω замкнена в Z .

Нехай $z \in 2^{<\omega}$. Покажемо, що множина $W = Z \setminus \{z\}$ є відкритою в Z . Візьмемо такий номер m , що $z \in 2^m$. Оскільки $W \cap 2^\omega = 2^\omega$, адже $z \notin 2^\omega$, то множина $W \cap 2^\omega$ відкрита в 2^ω . Нехай $w \in W \cap 2^\omega = 2^\omega$ і n – довільний номер, для якого $n > m$. Тоді при $k \geq n$ рівність $w|k = z$ неможлива, адже $w|k \in 2^k$, а $z \in 2^m$ і $k > m$, отже, $2^k \cap 2^m = \emptyset$. Тому $w|k \in W$ при $k \geq n$. З означення топології в Z випливає, що $W \in \mathcal{T}$, а значить, $\{z\}$ – замкнена множина.

Далі з'ясуємо, що у будь-якої точки $z \in Z$ і довільного її околу W_z існує замкнений окіл V , такий, що $V \subseteq W_z$. У випадку, коли $z \in 2^{<\omega}$, це ясно, оскільки $V = \{z\}$ – це відкрито-замкнена множина, як ми з'ясували вище.

Нехай $z \in 2^\omega$. Візьмемо відкритий окіл U точки z в Z , такий, що $U \subseteq W_z$. Перетин $U \cap 2^\omega$ – це відкритий у 2^ω окіл точки z . Тому існує такий номер n ,

що $U_n(z) \subseteq U \cap 2^\omega$. Далі для кожного $x \in U \cap 2^\omega$ існує такий номер $m(x) > n$, що $V_x = \{x|k : k \geq m(x)\} \subseteq U$. Покладемо

$$V = U_n(z) \cup B, \quad \text{де} \quad B = \bigcup_{x \in U_n(z)} V_x.$$

Ясно, що $V \subseteq U$. З означення топології \mathcal{T} безпосередньо випливає, що V – це окіл точки z у просторі Z . Залишилось довести, що множина V замкнена в Z . Це негайно випливає з рівності $\bar{B} = V$. Щоб її довести, зауважимо, що $U_n(z) \subseteq \bar{B}$, бо для довільної точки $x \in U_n(z)$ послідовність зрізок $\{x|k\}_{k \geq n(x)} \subset B$ збігається до x . Тому $V = U_n(z) \cup B \subseteq \bar{B} \cup B \subseteq \bar{B}$.

Далі, нехай $w \in Z \setminus V$. Якщо $w \in 2^{<\omega}$, то $\{w\}$ є околom точки w , який не перетинається з V , тому $w \notin \bar{V}$, а $\bar{V} \supseteq \bar{B}$, бо $B \subseteq V$, отже, $w \notin \bar{B}$. Припустимо, що $w \in 2^\omega$. Оскільки $w \notin V$, то $w \notin U_n(z)$. Множина $U_n(z)$ замкнена у 2^ω . Тому множина $\tilde{U} = 2^\omega \setminus U_n(z)$ буде відкритою в 2^ω і $w \in \tilde{U}$. Множина

$$O = \tilde{U} \cup \bigcup_{u \in \tilde{U}} \{u|k : k \in \mathbb{N}\}$$

буде, очевидно, відкритою в Z , $w \in O$ і $O \cap V = \emptyset$. Справді, $\tilde{U} \cap V = \emptyset$, бо $\tilde{U} \cap U_n(z) = \emptyset$ і $\tilde{U} \cap B = \emptyset$. Якби для деякого $u \in \tilde{U}$ існували такі елементи $x \in U_n(x)$ і номер $k \geq m(x)$, що $u|k = x|k$, то і $u|n = x|n$, оскільки $n < m(x)$, але $x|n = z|n$, тому і $u|n = z|n$, а значить, $u \in U_n(z)$, що приводить до суперечності. Таким чином, виходить, що і в цьому випадку $w \notin \bar{V}$, а значить, $w \notin \bar{B}$. Отже, і $\bar{B} \subseteq V$, що разом з попереднім дає нам рівність $\bar{B} = V$ і замкненість V .

Тому топологічний простір Z є нуль-вимірним і, отже, регулярним. Оскільки Z є зліченим об'єднанням метризованих компактів, то Z має зліченну сітку топології і, отже, є космічним простором. Нагадаємо, що *космічним* називається регулярний топологічний простір зі зліченною сіткою топології.

Теорема 1. Нехай $X = 2^\omega$ – канторовий куб, $Y = [0, \omega]$ – простір ординалів від 0 до ω , наділений своєю природною порядковою топологією, $Z = 2^{\leq \omega}$ і $f : X \times Y \rightarrow Z$ – відображення, що задається правилом:

$$f(x, y) = x|y.$$

Тоді f – це нарізно неперервне відображення, причому $D(f) = X \times \{\omega\}$.

Доведення. При $y = \omega$ звуження $f(x, \omega) = x|\omega = x$, тобто $f_\omega : X \rightarrow Z$ – це тотожне вкладення, яке є неперервним згідно з означенням топології на Z .

Якщо ж $y \in Y$ і $y \neq \omega$, то $y = n$ для деякого $n \in \omega$ і $f_y(x) = x|n$. Для фіксованого $a \in X$ точка $a|n$ буде ізольованою в Z , а її прообраз

$$f_y^{-1}(a|n) = \{x \in X : x|n = a|n\} = U_n(a)$$

– це окіл точки a в X . Це показує, що f_y неперервне в точці a . Таким чином, Y -розрізи $f_y : X \rightarrow Z$ – це неперервні відображення.

Для фіксованого $x \in X$ послідовність $f^x(n) = x|n$ збігається до $x = f^x(\omega)$ в Z , що дає нам неперервність $f^x : Y \rightarrow Z$ у точці ω . Неперервність f^x в інших точках з Y випливає з того, що вони ізольовані в Y .

Таким чином, f – це нарізно неперервне відображення.

Доведемо тепер, що $D(f) = X \times \{\omega\}$. Нехай $p_0 = (a, b) \in X \times Y$ і $y_0 \neq \omega$. Оскільки $\{b\}$ – відкрита множина у просторі Y , а звуження $f|_{X \times \{b\}}$ на відкриту підмножину $X \times \{b\}$ добутку $X \times Y$ задається формулою $g = f(x, b) = f_b(x)$ для кожного $x \in X$, де функція $f_b : X \rightarrow Z$ неперервна, то неперервним буде і звуження g , а з ним і функція f у точці p_0 .

Нехай $p_0 = (a, \omega) \in X \times \{\omega\}$. Доведемо, що $p_0 \in D(f)$. За означенням $f(p_0) = f(a, \omega) = a|\omega = a$. Для кожного номера $n \in \omega$ існує єдина точка $x_n \in 2^{n+1}$, для якої $x_n|n = a|n$ і $x_n(n) \neq a(n)$. Розглянемо множину $W_0 = Z \setminus \{x_n : n \in \omega\}$. Ясно, що $x_n \neq a$ для кожного n , отже, $p_0 \in W_0$. Покажемо, що W_0 – відкрита множина у просторі Z . Справді, $W_0 \cap X = X$, отже, перетин $W_0 \cap X$ відкритий в X . Нехай $x \in W_0 \cap X = X$. Якщо $x = a$, то $x|n = a|n$ для кожного n . Візьмемо $m = 1$ і доведемо, що $a|n \in W_0$ для кожного $n \geq m$, тобто, що $a|n \neq x_k$ для кожного $n \geq m$ і довільного $k \in \omega$. Оскільки $a|n \in 2^n$ і $x_k \in 2^{k+1}$, то $a|n \neq x_k$ при $n \neq k+1$, адже тоді $2^n \cap 2^{k+1} = \emptyset$. Нехай $n = k+1$. Тоді за побудовою $(a|n)(k) = a(k) \neq x_k(k)$, отже, $a|n \neq x_k$. Якщо ж $x \neq a$, то існує такий номер m , що $x(m) \neq a(m)$. Візьмемо $n > m + 1$ і доведемо, що $x_k \neq x|n$ для довільного k . Знову це досить перевірити для $n = k + 1$. Тоді $k > m$ і $x_k(m) = a(m) \neq x(m)$, отже, $x_k \neq x|n$. Таким чином, W_0 – це відкритий окіл точки p_0 в Z .

Нехай U – окіл точки a в X і V – окіл точки ω в Y . Покажемо, що $f(U \times V) \not\subseteq W_0$. Існує такий номер m , що $U_m(a) \subseteq U$ і $(m, \omega] \subseteq V$. Нехай $n > m$. Тоді $x_n|n = a|n$, зокрема, $x_n|m = a|m$. Розглянемо довільну точку $u_n \in X$, таку, що $u_n|(n+1) = x_n$. Тоді і $u_n|m = x_n|m = a|m$, отже, $u_n \in U_m(a)$. Точка $v_n = n + 1 \in V$, отже, $(u_n, v_n) \in U \times V$. Але $f(u_n, v_n) = f(u_n, n+1) = u_n|(n+1) = x_n \notin W_0$. Отже, $f(U \times V) \not\subseteq W_0$, що і доводить розривність f у точці p_0 . \square

Зауваження 1. Згідно з недавнім результатом першого автора [3], для довільного нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ на добутку двох просторів X, Y з першою аксіомою зліченності зі значеннями у регулярному просторі Z , що має зліченну k -сітку, множина $\{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою в X для довільної точки $y \in Y$. Зліченність k -сітки простору Z у цьому результаті не можна послабити до зліченності сітки, що показує приклад відображення, побудований у теоремі 1.

3. Функції на квадраті прямої Зоргенфрея зі значеннями у площині Бінга

Нехай \mathbb{L} – пряма Зоргенфрея [9, с. 47], а \mathbb{B} – площина Бінга [8], [9, с. 518], [13]. Проміжки $[a, b)$ є відкрито-замкненими множинами в \mathbb{L} , а \mathbb{B} – зліченний гаусдорфовий і не регулярний простір. Обидва простори задовольняють першу аксіому зліченності і є сепарабельними, зокрема, в \mathbb{L} множина \mathbb{Q} всіх раціональних чисел буде зліченною і всюди щільною.

Теорема 2. Для кожного $b \in \mathbb{L}$ існує нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, у якого $D(f) = \mathbb{L} \times \{b\}$.

Доведення. З нерегулярності простору \mathbb{B} випливає, що існує така точка z_0 в \mathbb{B} і такий її оточення W_0 , в якому не міститься жодного замкненого оточення точки z_0 в \mathbb{B} . Оскільки простір \mathbb{B} задовольняє першу аксіому зліченності, то існує така спадна послідовність оточень W_n точки z_0 у просторі \mathbb{B} , що система $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ є базою оточень точки z_0 в \mathbb{B} . Ясно, що $\overline{W}_n \not\subseteq W_0$ для кожного n , отже, для кожного n існує точка $z_n \in \overline{W}_n \setminus W_0$. Оскільки $z \in \overline{W}_n$ і площина Бінга \mathbb{B} задовольняє першу аксіому зліченності, то існує послідовність $z_{n,k} \in W_n$, яка збігається до z_n .

Нехай $n \mapsto a_n$ – деяка перенумерація множини \mathbb{Q} , для якої $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Тоді $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, причому $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{L}$. Введемо для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{N}$ числа $a_{n,k} = a_n + \frac{1}{k}$ і $b_n = b + \frac{1}{n}$. Розглянемо проміжки $I_{n,k} = [a_{n,k+1}, a_{n,k})$ та $J_n = [b_{n+1}, b_n)$ і прямокутники $P_{n,k} = I_{n,k} \times J_n$. Ясно, що прямокутники $P_{n,k}$ – це відкрито-замкнені множини в квадраті \mathbb{L}^2 прямої Зоргенфрея, які попарно не перетинаються. Визначимо тепер функцію $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{B}$, покладаючи $f(p) = z_{n,k}$, якщо $p \in P_{n,k}$, $f(a_n, y) = z_n$ при $y \in J_n$ і $f(p) = z_0$ в іншому випадку. Покажемо, що $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ – шукана функція.

Множини $P_{n,k}$ відкриті в \mathbb{L}^2 і звуження $f|_{P_{n,k}}$ сталі і дорівнює $z_{n,k}$, тому

f неперервне у всіх точках з $P_{n,k}$. Множини $\mathbb{L} \times [b_1, +\infty)$, $(-\infty, a_n) \times J_n$, $[a_n + 1, +\infty) \times J_n$ і $\mathbb{L} \times (-\infty, b)$ теж відкриті в \mathbb{L}^2 і $f(p) = z_0$ на цих множинах. Тому і на них функція f неперервна.

Нехай $p_0 = (a_n, y_0)$, де $b_{n+1} \leq y_0 < b_n$. Тоді $f(p_0) = z_n$. Покажемо, що f неперервна в точці p_0 . Нехай W – окіл точки z_n . Оскільки $z_{n,k} \rightarrow z_n$ в \mathbb{B} , то існує такий номер K , що $z_{n,k} \in W$ при $k \geq K$. Прямокутник $Q = [a_n, a_n + \frac{1}{k}] \times J_n$ є околом точки p_0 в \mathbb{L}^2 . Якщо $p = (x, y) \in Q$, то $x \in [a_{n,k+1}, a_{n,k}]$ для деякого $k \geq K$ і $y \in J_n$. В такому разі $f(p) = z_{n,k} \in W$, отже, $f(Q) \subseteq W$, що і дає нам неперервність f у точці p_0 .

Таким чином, ми бачимо, що f неперервна у кожній точці з множини $\mathbb{L}^2 \setminus (\mathbb{L} \times \{b\})$. Оскільки $f_b(x) = f(x, b) = z_0$ для кожного $x \in \mathbb{L}$, то $f_y : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{B}$ буде неперервною функцією для кожного $y \in \mathbb{L}$. Нехай $x \in \mathbb{L}$. Доведемо, що функція $f^x : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{B}$ також неперервна. Для цього досить довести її неперервність у точці b . Нехай W – окіл точки $f^x(b) = z_0$ у просторі \mathbb{B} . Тоді існує такий номер N , що $W_N \subseteq W$, а значить, $W_n \subseteq W$ при $n \geq N$, бо $W_n \subseteq W_N$. В такому разі $z_{n,k} \in W$ при $n \geq N$ і довільному k . Крім того, очевидно, що $z_0 \in W$.

Припустимо, що $x \neq a_n$ для кожного n . Множина $V = [b, b_N)$ – це окіл точки b в \mathbb{L} . Якщо $y \in V$, то точка $p = (x, y)$ належить одному з прямокутників $P_{n,k}$ або одній з півсмуг $(-\infty, a_n) \times J_n$ чи $[a_n + 1, +\infty) \times J_n$ для деякого $n \geq N$. Тому $f^x(y) = f(p) = z_{n,k}$ або z_0 , а значить, $f^x(y) \in W$, тобто $f^x(V) \subseteq W$, що показує неперервність f^x у точці b .

Нехай $x = a_m$ для деякого m . Візьмемо $c = \min\{b_N, b_{m+1}\}$ і розглянемо тепер окіл $V = [b, c)$ точки b в \mathbb{L} . Зрозуміло, що при $y \in V$ у точці $p = (x, y)$ функція f може набувати лише значень $z_{n,k}$ з $n \geq N$ або z_0 . І в цьому випадку $f^x(y) = f(p) \in W$, отже, і тут розріз f^x неперервний у точці b .

Таким чином, ми встановили, що $f : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ – нарізно неперервна функція, у якої $\mathbb{L}^2 \setminus (\mathbb{L} \times \{b\}) \subseteq C(f)$. Залишилося перевірити, що $\mathbb{L} \times \{b\} \subseteq D(f)$. Нехай $p_0 = (x, b) \in \mathbb{L} \times \{b\}$. Тоді $f(p_0) = z_0$. За побудовою W_0 – це окіл точки $z_0 = f(p_0)$. Розглянемо довільний окіл O точки p_0 в \mathbb{L}^2 і доведемо, що $f(O) \not\subseteq W_0$. Існують такі околи $U = [x_0, x_0 + \delta)$ і $V = [b, b + \delta)$ в \mathbb{L} точок x_0 і b відповідно, що $U \times V \subseteq O$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то існує такий номер N , що $b_n < b + \delta$ при $n \geq N$. Множина $\mathbb{Q} \setminus \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$ буде всюди щільною в \mathbb{L} разом з множиною \mathbb{Q} . Тому існує такий номер m , що $m \geq N$ і $a_m \in U$. Відрізок $\{a_m\} \times J_m$ міститься у прямокутнику $U \times V$, а значить, і в околі O . Оскільки $f(a_m, y) = z_m \notin W_0$ для кожного $y \in J_m$, то $f(O) \not\subseteq W_0$, звідки випливає, що

$p_0 \in D(f)$. □

4. Функції на добутках нульвимірних просторів зі значеннями у нерегулярних просторах

Нагадаємо [9, с. 529], що топологічний T_1 простір X називається *нульвимірним*, якщо він має базу з відкрито-замкнених множин. Зрозуміло, що тоді і кожна точка $x \in X$ має базу з відкрито-замкнених околів. Якщо нульвимірний T_1 -простір X задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожної точки $x \in X$ існує така спадна послідовність її відкрито-замкнених околів U_n , яка утворює базу околів точки x і для неї $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{x\}$. Наприклад, пряма Зоргенфрея \mathbb{L} – це нульвимірний простір з першою аксіомою зліченності, і для неї $U_n = [x, x + \frac{1}{n})$.

Ми будемо розглядати компакфікацію Александрова $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ гаусдорфого локально компактного простору X [9, с. 261]. Для дискретного простору $\omega = \mathbb{N}_0$ його компакфікація Александрова $\alpha\omega$ гомеоморфна простору $[0, \omega]$, що розглядається в теоремі 2.

Побудову, що запропонована в доведенні теореми 2, можна узагальнити на випадок добутку нульвимірних просторів.

Теорема 3. *Нехай на топологічному просторі X існує така послідовність неперервних функцій $h_n : X \rightarrow \alpha\omega$, що послідовність прообразів $(h_n^{-1}(\infty))_{n=1}^{\infty}$ є точково скінченною і для кожної непорожньої відкритої в X множини U множина $\{n \in \mathbb{N} : h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \emptyset\}$ нескінченна, Y нульвимірний T_1 -простір з першою аксіомою зліченності у деякій неізолюваній точці $b \in Y$ і Z – простір з першою аксіомою зліченності, який не задовольняє аксіому T_3 . Тоді існує таке нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$, що $X \times \{b\} \subseteq D(f)$.*

Доведення. З умов, накладених на простір Y випливає, що існує така спадна послідовність $(V_n)_{n=0}^{\infty}$ відкрито-замкнених околів точки b , що $V_0 = Y$, $V_n \setminus V_{n+1} \neq \emptyset$ і $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ – база околів точки b в Y .

Оскільки простір Z не задовольняє аксіому T_3 , то існують точка $z_0 \in Z$ і її окіл W_0 , такі, що $\overline{W} \not\subseteq W_0$ для кожного околу W точки z_0 . Виберемо у просторі Z спадну базу околів W_n точки z_0 , де $n \in \mathbb{N}$. Ясно, що для кожного номера n існує точка $z_n \in \overline{W}_n \setminus W_0$. Оскільки $z_n \in \overline{W}_n$ і простір Z задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного n існує така послідовність точок $z_{n,k} \in W_n$, $k \in \omega$, що $z_{n,k} \rightarrow z_n$ при $k \rightarrow \infty$. Покладаючи $g_n(k) = z_{n,k}$ при $k \in \omega$ і

$g_n(\infty) = z_n$, ми отримуємо неперервне відображення $g_n : \alpha\omega \rightarrow Z$, для якого $g_n(\omega) \subseteq W_n$ і $g_n(\infty) = z_n$ для кожного n .

Визначимо відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ формулою

$$f(x, y) = \begin{cases} z_0, & \text{якщо } x \in X \text{ і } y = b; \\ g_n(h_n(x)), & \text{якщо } x \in X \text{ і } y \in V_{n-1} \setminus V_n \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

і покажемо, що воно шукане.

Перевіримо, що відображення f нарізно неперервне. Зафіксуємо $y \in Y$. Якщо $y = b$, то $f_y(x) = z_0$ на X , отже, f_y неперервне як стале відображення. Нехай $y \neq b$. Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} (V_{n-1} \setminus V_n) = Y \setminus \{b\}$, то існує такий номер n , що $y \in V_{n-1} \setminus V_n$. Тоді $f_y = g_n \circ h_n$, отже, і y -розрізи f_y будуть неперервними як композиції неперервних відображень. Зафіксуємо тепер $x \in X$. За побудовою відображення $f^x : Y \rightarrow Z$ буде сталим на кожній відкрито-замкненій множині $V_{n-1} \setminus V_n$, отже, і неперервним у кожній з її точок, а значить, і у кожній точці множини $Y \setminus \{b\}$. Доведемо, що воно буде неперервним і в точці b . Нехай W – довільний окіл точки $f^x(b) = z_0$ у просторі Z . Знайдемо такий номер N_0 , що $W_N \subseteq W$, тоді і $W_n \subseteq W$ при $n \geq N_0$. За умовою $I = \{n \in \mathbb{N} : h_n(x) = \infty\}$ скінченна. Розглянемо номер $N = \max\{N_0, \max I\} + 1$ і окіл $V = V_N$ точки b . Оскільки $N \notin I$, то $h_N(x) \neq \infty$. Якщо $y \in V$ і $y \neq b$, то $y \in V_{n-1} \setminus V_n$ для деякого $n > N$ і

$$f^x(y) = g_n(h_n(x)) \in g_n(\omega) \subseteq W_n \subseteq W.$$

Якщо ж $y = b$, то $f^x(b) = z_0 \in W$, таким чином, $f^x(V) \subseteq W$, що і доводить неперервність відображення $f^x : Y \rightarrow Z$ у точці b .

Залишилося довести, що $X \times \{b\} \subset D(f)$. Нехай $a \in X$. Доведемо, що відображення f розривне у точці $c = (a, b)$. Розглянемо довільний окіл O точки c в добутку $X \times Y$. Знайдемо такі відкриті околи U і V точок a і b у просторах X і Y відповідно, що $U \times V \subseteq O$. Існує такий номер m , що $V_m \subseteq V$. За умовою множина $\{n \in \mathbb{N} : h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \emptyset\}$ – нескінченна. Тому існує такий номер n , що $n > m$ і $h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \emptyset$. Візьмемо які-небудь точки $u \in h_n^{-1}(\infty) \cap U$ і $v \in V_{n-1} \setminus V_n$. Ясно, що $u \in U$ і $v \in V_{n-1} \subseteq V_m \subseteq V$, отже, точка $q = (u, v) \in O$. Але $f(q) = f(u, v) = g_n(h_n(u)) = g_n(\infty) = z_n \notin W_0$. Таким чином, $f(O) \not\subseteq W_0$, що і завершує доведення теореми. \square

Приклад 1. Покажемо, що на сепарабельному нульвимірному T_1 -просторі X без ізольованих точок, що задовольняє першу аксіому зліченності, існує послідовність функцій $h_n : X \rightarrow \alpha\omega$, така, як у формулюванні теореми 3.

Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність точок з X , така, що $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$ і множина $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ всюди щільна в X . Існування такої послідовності впливає з сепарабельності простору X і того, що X – це T_1 -простір без ізольованих точок. Для кожного n існує така спадна база відкрито-замкнених околів $(U_{n,k})_{k \in \omega}$ точки a_n , що $U_{n,0} = X$ і $\bigcap_{k=0}^{\infty} U_{n,k} = \{a_n\}$. Введемо для кожного номера n функцію

$$h_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } x = a_n; \\ k, & \text{якщо } x \in U_{n,k} \setminus U_{n,k+1} \text{ для деякого } k \in \omega. \end{cases}$$

Оскільки множини $U_{n,k} \setminus U_{n,k+1}$ відкриті і звуження $h_n|_{U_{n,k} \setminus U_{n,k+1}}$ стали, то функція h_n неперервна в кожній точці різниці $U_{n,k} \setminus U_{n,k+1}$, а значить, і в кожній точці об'єднання $\bigcup_{k=0}^{\infty} (U_{n,k} \setminus U_{n,k+1})$, яке збігається з множиною $X \setminus \{a_n\}$. Неперервність h_n у точці a_n впливає з того, що $h_n(U_{n,m}) \subseteq [m, \infty]$ для кожного m і система всіх проміжків $[m, \infty]$ – це база околів точки ∞ у просторі $\alpha\omega$.

Перевіримо, що послідовність функцій h_n задовольняє умови з теореми 6. Оскільки прообраз $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$, то послідовність множин $h_n^{-1}(\infty) = \{a_n\}$ точково скінченна. Нехай U – непорожня відкрита множина в X . Візьмемо якусь точку $a \in U$. Оскільки точка a не ізольована в X , а простір X нульвимірний, то існує така спадна база з відкрито-замкнених околів U_j точки a , що $U_j \setminus U_{j+1} \neq \emptyset$ для кожного j і $U_1 \subseteq U$. Множини $U_j \setminus U_{j+1}$ відкриті, а $\bar{A} = X$, тому для кожного j існує такий номер n_j , що $a_{n_j} \in U_j \setminus U_{j+1}$. Зрозуміло, що $a_{n_j} \neq a_{n_i}$, а значить, $n_j \neq n_i$ при $j \neq i$. Оскільки $a_{n_j} \in U$ і $h_{n_j}(a_{n_j}) = \infty$, то $a_{n_j} \in h_{n_j}^{-1}(\infty) \cap U$ для кожного $j \in \mathbb{N}$, отже множина $E = \{n : h_n^{-1}(\infty) \cap U \neq \emptyset\} \supseteq \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$, нескінченна.

Тому з теореми 3 впливає такий

Наслідок 1. *Нехай X – сепарабельний нульвимірний T_1 -простір без ізольованих точок, який задовольняє першу аксіому зліченності, Y – нульвимірний T_1 -простір з першою аксіомою зліченності у деякій неізольованій точці $b \in Y$ і Z – простір з першою аксіомою зліченності, який не задовольняє аксіому T_3 . Тоді існує таке нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$, що $X \times \{b\} \subseteq D(f)$.*

Зрозуміло, що теорему 2 можна вивести з цього наслідку.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк, О.І. Шишина, *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ -метризовних просторах*, Мат. методи і фіз-мех. поля, **45**:1 (2002) 42–46.
2. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук, *Точкова розривність $K_h K$ -функцій зі значеннями в σ -метризовних просторах*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика, **191-192** (2004) 103–106.
3. Т. Banach, *Continuity points of separately continuous functions with values in \aleph_0 -spaces*, Мат. вісник НТШ, **14** (2017), 29–35.
4. В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Нарізно неперервні відображення і вичерпні простори*, Мат. вісн. НТШ, **7** (2010) 98–110.
5. В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів*, Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 20-26 лютого 2012 р., Ворохта : тези доповідей. – Івано-Франківськ, (2012) 5–6.
6. J.C. Breckenridge, T. Nishiura, *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces*, Bull. Inst. Acad. Sinsca, **4**:2 (1976) 191–203.
7. В.В. Михайлюк, *Топологія нарізної неперервності та одне узагальнення теореми Серпінського*, Мат. студії, **14**:2 (2000) 193–196.
8. О.О. Карлова, В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник, *Площина Бінга і нарізно неперервні відображення*, Мат. студії, **38**:2 (2012) 188–193.
9. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир, (1986) 752 с.
10. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук, *Про нарізно неперервні відображення з не більш, ніж зліченною множиною значень*, Укр. мат. журн. (у друці)
11. К. Куратовский, *Топология. Т.1*, М. : Мир, (1966) 594 с.
12. В.К. Маслюченко, *Лекції з теорії міри та інтеграла. Ч.1. Міра*, Чернівці: ЧНУ, (2011) 156 с.
13. R.H. Bing, *A connected countable Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953) 474–474.

Надійшло 29.08.2017

Після переробки 29.12.2017