ОЦІНКА ПОХИБКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДВОПАРАМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ ТИПУ ХОРД

©2012 р. Степан ШАХНО, Галина ЯРМОЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 23 червня 2012 р.

У цій статті проведено аналіз стійкості двопараметричного методу типу хорд до похибок обчислення при розв'язуванні нелінійних рівнянь. Отримано оцінку повної похибки розглянутого методу.

1 Вступ

При розв'язуванні будь-якої задачі чисельним методом виникає похибка методу, зумовлена заміною вихідного операторного рівняння іншим або послідовністю лінійних операторних рівнянь, неусувна похибка, пов'язана із похибкою вхідних даних, а також похибка округлення, яка пов'язана із застосуванням ЕОМ для розв'язування поставлених задач.

Питаннями оцінки похибки при розв'язуванні нелінійних рівнянь займалося багато авторів. Зокрема, у [1] досліджено стійкість та похибку збурення методу Ньютона-Канторовича та його модифікації. Оцінка повної похибки при розв'язуванні нелінійного операторного рівняння методом простої ітерації отримана у роботі [2]. У праці [3] досліджено умови збіжності та оцінка повної похибки двокрокового

УДК: 519.6; MSC 2010: 65J15, 65H10
Ключові слова і фрази: нелінійне рівняння, двопараметричний метод типу хорд

ітераційно-різницевого методу. Аналіз стійкості прискореного методу Ньютона до похибок обчислень проведено у [4].

Нехай задано нелінійне рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де оператор F визначений на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. У цій праці ми досліджуємо умови збіжності двопараметричного методу типу хорд з врахуванням похибок заокруглення. Доведення теорем проводиться аналогічно, як у [5, 6]. Двопараметричний метод типу хорд, запропонований нами у [7], має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - [F(u_k, v_k)]^{-1} F(x_k),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{2}$$

де $F(u_k, v_k)$ — поділена різниця першого порядку оператора F за точками u_k і v_k, $u_k = x_k + a_k(x_{k-1} - x_k)$, $v_k = x_k + b_k(x_{k-1} - x_k)$, $a_k \in [-1; 1]$, $b_k \in [0; 1]$. У праці [8] нами досліджено напівлокальну збіжність методу (2).

Означення 1. *Обмежений лінійний оператор, який діє з X в Y, позначуваний $F(x, y)$, будемо називати поділеною різницею першого порядку для оператора F за фіксованими точками x і y ($x \neq y$), якщо виконується рівність*

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y).$$

2 Збурений варіант методу (2)

Поряд з (2) розглянемо збурений ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - [F(u_k, v_k) + \Gamma_k]^{-1} F(x_k),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots. \tag{3}$$

Тут $\{\Gamma_k\} \in L(X, Y)$ — послідовність лінійних операторів. У цьому випадку припускається, що поділена різниця $F(x, y)$ обчислюється з похибкою, а оператор F — точно. Для ітераційного процесу (3) справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $x_{-1}, x_0 \in D$ — *початкові наближення,* $S_0 = \{x \in D : \|x - x_0\| < R\}$. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\|x_{-1} - x_0\| = \alpha$;

2) *існує* $A_0^{-1} = [F(u_0, v_0)]^{-1}$ *і* $\left\|A_0^{-1}\right\| \le \beta_0$;

3) $\|F(x_0)\| \le \zeta_0$, $\eta_0 = \beta_0\zeta_0$;

4) $\|\Gamma_k\| \le \mu\eta_k$, $\beta_0\mu\eta_0 < 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *де* $\{\eta_k\}$ — *числова послідовність;*

5) *поділені різниці першого порядку для оператора* F *задовольняють умову Ліпшиця з константою* L

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le L\left(\|x-u\| + \|y-v\|\right),$$

де $x, y, u, v \in D$, $L > 0$.

Позначимо через

$$m = \beta_0 L \max\left\{\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} + (a+b)\,\alpha,\ (1+a+b)\,\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right\} + \beta_0\mu\eta_0,$$

припустимо, що $|a_k| \le a$, $b_k \le b$ *і рівняння*

$$u\left(1 - \frac{m}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,u + (a+b)\,\alpha\right) - \beta_0\mu u}\right) - \frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} = 0 \quad (4)$$

має хоча б один додатний корінь, причому R — *найменший додатний. Якщо* $\beta_0 L\left((2+a+b)\,R + (a+b)\,\alpha\right) + \beta_0\mu R < 1$,

$$M = \frac{m}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,R + (a+b)\,\alpha\right) - \beta_0\mu R} < 1$$

і $\bar{S}_0 \subset D$, *тоді послідовність* $\{x_k\}$, *утворена ітераційним процесом* (3), *коректно визначена і збігається до єдиного розв'язку* $x_* \in \bar{S}_0$ *рівняння* (1). *Крім цього, справедлива оцінка*

$$\|x_k - x_*\| < \frac{1}{h(1-M)} M^{\Phi_k}, \quad (5)$$

де $h = \dfrac{\beta_0\Big[L(1+a+b)+\mu\Big]}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,R + (a+b)\,\alpha\right) - \beta_0\mu R}$, $\Phi_{-1} = 0$, $\Phi_0 = 1$, $\Phi_k = \Phi_{k-1} + \Phi_{k-2}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Позначимо через $A_k = F(u_k, v_k)$. Згідно з (3)

$$x_1 = x_0 - [A_0 + \Gamma_0]^{-1} F(x_0) = x_0 - [A_0(I + A_0^{-1}\Gamma_0)]^{-1} F(x_0) =$$
$$= x_0 - [I + A_0^{-1}\Gamma_0]^{-1} A_0^{-1} F(x_0).$$

Оскільки $\|[I + A_0^{-1}\Gamma_0]^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|A_0^{-1}\|\|\Gamma_0\|}$, то, враховуючи умови теореми, отримаємо, що

$$\|x_1 - x_0\| = \left\| -[I + A_0^{-1}\Gamma_0]^{-1} A_0^{-1} F(x_0) \right\| \le \frac{\left\|A_0^{-1}\right\| \|F(x_0)\|}{1 - \|A_0^{-1}\|\|\Gamma_0\|} \le$$
$$\le \frac{\eta_0}{1 - \beta_0 \mu \eta_0} = \frac{1}{h}\Big(h \frac{\eta_0}{1 - \beta_0 \mu \eta_0}\Big)^{\Phi_0} < R.$$

Отже, $x_1 \in S_0$. Враховуючи умову 5) теореми, одержимо

$$\left\| I - A_0^{-1} A_1 \right\| \le \left\| A_0^{-1} \right\| \|A_0 - A_1\| \le \beta_0 L \left(\|u_0 - u_1\| + \|v_0 - v_1\|\right).$$

Оскільки

$$\|u_0 - u_k\| = \|x_0 + a_0(x_{-1} - x_0) - x_k - a_k(x_{k-1} - x_k)\| \le$$
$$\le \|x_0 - x_k\| + |a_0| \|x_{-1} - x_0\| + |a_k| \|x_{k-1} - x_k\|,$$

$$\|v_0 - v_k\| = \|x_0 + b_0(x_{-1} - x_0) - x_k - b_k(x_{k-1} - x_k)\| \le$$
$$\le \|x_0 - x_k\| + b_0 \|x_{-1} - x_0\| + b_k \|x_{k-1} - x_k\|$$

і $|a_k| \le a$, $b_k \le b$, то

$$\left\| I - A_0^{-1} A_1 \right\| \le \beta_0 L \left((2 + a + b) \|x_0 - x_1\| + (a + b) \|x_{-1} - x_0\|\right) \le$$
$$\le \beta_0 L \left[(2 + a + b) \frac{\eta_0}{1 - \beta_0 \mu \eta_0} + (a + b)\alpha \right] <$$
$$< \beta_0 L \Big[(2 + a + b) R + (a + b)\alpha \Big] < 1.$$

За теоремою Банаха A_1^{-1} існує і

$$\left\| A_1^{-1} \right\| < \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 L \left((2 + a + b) R + (a + b)\alpha\right)}.$$

Введемо наступні позначення:

$$M_{i-1} = \frac{\beta_0 \Big[L \|x_i - x_{i-1}\| + L(a + b) \|x_{i-1} - x_{i-2}\| + \mu \eta_{i-1} \Big]}{1 - \beta_0 L \Big[(2 + a + b) R + (a + b)\alpha \Big]}, \; i \ge 1,$$

$$C = \frac{1-\beta_0 L\Big[(2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha\Big]}{1-\beta_0 L\Big[(2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha\Big]-\beta_0\mu R},\ C_0 = \frac{1}{1-\beta_0\mu\eta_0}.$$

Очевидно, що $C_0 M_0 \le M$ і $CM_i \le M$, $i \ge 1$.

З означення поділеної різниці першого порядку та формули (3) отримаємо

$$F(x_1) = F(x_0) - F(x_0,x_1)(x_0-x_1) = (A_0+\Gamma_0-F(x_0,x_1))(x_0-x_1).$$

Врахувавши оцінку 4) і умову Ліпшиця 5), одержимо

$$\begin{aligned}\|F(x_1)\| &\le \Big[\|A_0-F(x_0,x_1)\|+\|\Gamma_0\|\Big]\|x_1-x_0\| \le\\ &\le \Big[L(\|u_0-x_0\|+\|v_0-x_1\|)+\mu\eta_0\Big]\|x_1-x_0\| \le\\ &\le \Big[L((a+b)\|x_0-x_{-1}\|+\|x_1-x_0\|)+\mu\eta_0\Big]\|x_1-x_0\|.\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\left\|A_1^{-1}\right\|\|F(x_1)\| < \frac{\beta_0\left(L(a+b)\|x_0-x_{-1}\|+L\|x_1-x_0\|+\mu\eta_0\right)}{1-\beta_0 L((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha)}\times$$
$$\times\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} = M_0C_0\eta_0 = \eta_1.$$

Покажемо, що $\eta_1 < \eta_0$. Справді,

$$\begin{aligned}\eta_1 &\le \frac{\beta_0 L\left((a+b)\,\alpha+\dfrac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right)+\beta_0\mu\eta_0}{(1-\beta_0 L((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha))(1-\beta_0\mu\eta_0)}\eta_0 \le\\ &\le \frac{m\eta_0}{1-\beta_0 L((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha)-\beta_0\mu\eta_0} \le\\ &\le \frac{m\eta_0}{1-\beta_0 L((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha)-\beta_0\mu R} = M\eta_0 < \eta_0.\end{aligned}$$

Крім цього, маємо

$$\eta_1 = \frac{CM_0}{C}\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} < \frac{M}{C}\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} < \frac{1}{Ch}\left(h\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right)^{\Phi_1}.$$

Отже, x_2 коректно визначене і

$$\|x_2 - x_1\| \le \left\|-[I + A_1^{-1}\Gamma_1]^{-1}\right\| \left\|A_1^{-1}\right\| \|F(x_1)\| \le$$
$$\le \frac{\left\|A_1^{-1}\right\| \|F(x_1)\|}{1 - \|A_1^{-1}\|\|\Gamma_1\|} < C\eta_1 < \frac{1}{h}\left(h\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right)^{\Phi_1}.$$

Крім цього, $\|x_2 - x_1\| < M\dfrac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}$. Оскільки R — розв'язок рівняння (4), то $\|x_2 - x_0\| \le \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| < (M+1)\dfrac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} < R$ і $x_2 \in S_0$.

Припустимо, що для $i = \overline{2, k-1}$ виконуються наступні умови

- лінійні оператори A_i оборотні,
- $\left\|A_i^{-1}\right\| \|F(x_i)\| < \eta_i = M_{i-1}C\eta_{i-1} < \dfrac{1}{Ch}\Big(h\dfrac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\Big)^{\Phi_i}$, $\eta_i < \eta_{i-1}$,
- $\|x_{i+1} - x_i\| < C\eta_i < \dfrac{1}{h}\Big(h\dfrac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\Big)^{\Phi_i} \le \dfrac{1}{h}M^{\Phi_i}$ і $x_{i+1} \in S_0$.

Тоді, для $i = k$ отримаємо

$$\left\|I - A_0^{-1}A_k\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\| \|A_0 - A_k\| \le \beta_0 L\left(\|u_0 - u_k\| + \|v_0 - v_k\|\right) \le$$
$$\le \beta_0 L\left[(2+a+b)\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0} + (a+b)\,\alpha\right] <$$
$$< \beta_0 L\left[(2+a+b)\,R + (a+b)\,\alpha\right] < 1$$

і $\left\|A_k^{-1}\right\| < \dfrac{\beta_0}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,R + (a+b)\,\alpha\right)}$.

З означення поділеної різниці першого порядку і формули (4) маємо

$$F(x_k) = F(x_{k-1}) - F(x_{k-1}, x_k)(x_{k-1} - x_k) =$$
$$= (A_{k-1} + \Gamma_{k-1} - F(x_{k-1}, x_k))(x_{k-1} - x_k).$$

Врахувавши умову 5) теореми, отримаємо

$$\|F(x_k)\| = \|(A_{k-1} + \Gamma_{k-1} - F(x_{k-1}, x_k))(x_{k-1} - x_k)\| \le$$
$$\le \Big[\|A_{k-1} - F(x_{k-1}, x_k)\| + \|\Gamma_{k-1}\|\Big]\|x_k - x_{k-1}\| \le$$
$$\le \Big[L\left(\|u_{k-1} - x_{k-1}\| + \|v_{k-1} - x_k\|\right) + \mu\eta_{k-1}\Big]\|x_k - x_{k-1}\| \le$$
$$\le \Big[L\|x_k - x_{k-1}\| + L(a+b)\|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \mu\eta_{k-1}\Big]\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\left\|A_k^{-1}\right\|\left\|F\left(x_k\right)\right\|<\\
&<\frac{\beta_0\Big[L\left\|x_k-x_{k-1}\right\|+L(a+b)\left\|x_{k-1}-x_{k-2}\right\|+\mu\eta_{k-1}\Big]C\eta_{k-1}}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha\right)}=\\
&=M_{k-1}C\eta_{k-1}=\eta_k<\\
&<\frac{\beta_0\Big[L\frac{1}{h}M^{\Phi_{k-1}}+L(a+b)\frac{1}{h}M^{\Phi_{k-2}}+\mu\frac{1}{Ch}M^{\Phi_{k-1}}\Big]\frac{1}{h}M^{\Phi_{k-1}}}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha\right)}<\\
&<\frac{1}{Ch}M^{\Phi_{k-1}+\Phi_{k-2}}=\frac{1}{Ch}M^{\Phi_k}.
\end{aligned}$$

Оскільки $M_{k-1}C \leq M < 1$, то $\eta_k < \eta_{k-1}$.

Отже,

$$\|x_{k+1}-x_k\| < C\eta_k < \frac{1}{h}M^{\Phi_k}.$$

Очевидно, що для $i=\overline{1,k}$ виконується $\|x_{i+1}-x_i\| < M^i\dfrac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}$. Тоді, врахувавши, що R — розв'язок рівняння (4), одержимо

$$\begin{aligned}
&\|x_{k+1}-x_0\| \leq \|x_{k+1}-x_k\|+\|x_k-x_{k-1}\|+...+\|x_1-x_0\|<\\
&<(M^k+M^{k-1}+...+1)\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}=\frac{1-M^{k+1}}{1-M}\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}<\\
&<\frac{1}{1-M}\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}=R
\end{aligned}$$

і $x_{k+1} \in S_0$.

Покажемо, що $\{x_k\}$ — послідовність Коші. Справді,

$$\begin{aligned}
&\|x_{k+p}-x_k\| \leq \|x_{k+p}-x_{k+p-1}\|+...+\|x_{k+1}-x_k\|<\\
&<(M^{p-1}+M^{p-2}+...+1)\frac{1}{h}\left(h\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right)^{\Phi_k}=\\
&=\frac{1-M^p}{h(1-M)}\left(h\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right)^{\Phi_k}<\frac{1}{h(1-M)}\left(h\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}\right)^{\Phi_k}<\\
&<\frac{1}{1-M}\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}=R.
\end{aligned} \tag{6}$$

Отже, $\{x_k\}$ — послідовність Коші і збігається до $x_* \in \bar{S}_0$.

Доведемо, що x_* — розв'язок рівняння (1) і він єдиний. Оскільки

$$\|F(x_k)\| \leq \left[L(1+a+b)\frac{\eta_0}{1-\beta_0\mu\eta_0}+\mu\eta_0\right]\|x_k-x_{k-1}\|$$

і $\|x_k - x_{k-1}\| \to 0$ при $k \to \infty$, то $F(x_*) = 0$.

Доведення єдиності проведемо від супротивного. Припустимо, що існує $x_{**} \in \bar{S}_0$, $x_{**} \neq x_*$ і $F(x_{**}) = 0$. Позначимо $F(x_{**}, x_*) = H$. За означенням поділеної різниці першого порядку маємо

$$H(x_{**}-x_*) = F(x_{**}) - F(x_*).$$

Якщо оператор H оборотний, то $x_{**} = x_*$. Справді,

$$\begin{aligned}
&\left\|A_0^{-1}H - I\right\| = \left\|A_0^{-1}(H-A_0)\right\| \leq \left\|A_0^{-1}\right\|\|H-A_0\| \leq \\
&\leq \beta_0 L\left[\|x_{**}-u_0\| + \|x_*-v_0\|\right] \leq \\
&\leq \beta_0 L\left[\|x_{**}-x_0\| + \|x_*-x_0\| + (a+b)\|x_{-1}-x_0\|\right] < \\
&< \beta_0 L(2R+(a+b)\alpha) < 1.
\end{aligned}$$

Отже, H^{-1} існує. З (6) можна отримати наступну оцінку

$$\|x_k - x_*\| < \frac{1}{h(1-M)}M^{\Phi_k}.$$

Теорема доведена. □

3 Оцінка повної похибки методу (2)

Припустимо, що наближено обчислюється оператор F, тобто маємо збурене рівняння

$$F_\varepsilon(x) = 0. \tag{7}$$

Будемо вважати, що оператор F_ε є "близьким" до оператора F в тому сенсі, що виконується умова

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \leq \delta(\varepsilon, x), \tag{8}$$

$\delta(\varepsilon, x) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$, $x \in D$.

Застосуємо метод (2) для розв'язування рівняння (7)

$$x_{k+1}^{\varepsilon} = x_k^{\varepsilon} - [F_{\varepsilon}(u_k^{\varepsilon}, v_k^{\varepsilon})]^{-1} F_{\varepsilon}(x_k^{\varepsilon}),\ k = 0,\ 1,\ 2, \dots . \tag{9}$$

Для ітераційного процесу (9) справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай:*

1) *для оператора F_ε виконуються умови теореми 1;*
2) *рівняння* (1) *має хоча б один розв'язок;*
3) $\|[F(x,y)]^{-1}\| \le \beta$, *для всіх $x, y \in D$;*
4) *виконується умова* (8).

Тоді при $k \to \infty$ і $\varepsilon \to 0$ ітераційний процес (9) *збігається до розв'язку $x_* \in \bar{S}_0$ рівняння* (1) *і справджується оцінка*

$$\|x_k - x_*\| < \frac{1}{h(1-M)} M^{\Phi_k} + \beta\delta(\varepsilon, x). \tag{10}$$

Доведення. Нехай x_*^{ε} — розв'язок рівняння (7). Тоді справедлива оцінка

$$\|x_k - x_*^{\varepsilon}\| < \frac{1}{h(1-M)} M^{\Phi_k}. \tag{11}$$

Оскільки $F(x_*) = 0$ і $F_\varepsilon(x_*^\varepsilon) = 0$, то аналогічно [3]

$$0 = F_\varepsilon(x_*^\varepsilon) - F(x_*) = F_\varepsilon(x_*^\varepsilon) - F_\varepsilon(x_*) + F_\varepsilon(x_*) - F(x_*) =$$
$$= F_\varepsilon(x_*^\varepsilon, x_*)(x_*^\varepsilon - x_*) + F_\varepsilon(x_*) - F(x_*).$$

Звідси отримаємо

$$x_* - x_*^\varepsilon = [F_\varepsilon(x_*^\varepsilon, x_*)]^{-1}(F_\varepsilon(x_*) - F(x_*)),$$

$$\|x_* - x_*^\varepsilon\| \le \beta\delta(\varepsilon, x). \tag{12}$$

Оскільки

$$\|x_k - x_*\| \le \|x_k - x_*^\varepsilon\| + \|x_* - x_*^\varepsilon\|,$$

то з (11) і (12) випливає оцінка (10). Теорема доведена. □

Оцінимо повну похибку при розв'язуванні рівняння (1) методом (2). Для цього припустимо, що поділена різниця $F(x, y)$ і оператор F

обчислються наближено. Розглянемо наступний збурений ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - [F(u_k, v_k) + \Gamma_k]^{-1}[F(x_k) + \Psi_k],\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{13}$$

де $\{\Gamma_k\} \in L(X, Y)$ — послідовність лінійних операторів, а $\{\Psi_k\}$ — послідовність операторів, які діють з простору X в Y.

Теорема 3. *Нехай $x_{-1}, x_0 \in D$ — початкові наближення, $S_0 = \{x \in D : \|x - x_0\| < R\}$. Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\|x_{-1} - x_0\| = \alpha$;

2) існує $A_0^{-1} = [F(u_0, v_0)]^{-1}$ і $\left\|A_0^{-1}\right\| \le \beta_0$;

3) $\|F(x_0)\| \le \zeta_0$, $\eta_0 = \beta_0\zeta_0$;

4) $\|\Gamma_k\| \le \mu\eta_k$, $\beta_0\mu\eta_0 < 1$;

5) $\|\Psi_0\| \le \gamma\eta_0^2$, $\|\Psi_k\| \le \gamma\eta_k\eta_{k-1}$, $k \ge 1$;

6) поділені різниці першого порядку для оператора F задовольняють умову Ліпшиця з константою L

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \le L\left(\|x - u\| + \|y - v\|\right),$$

де $x,\ y,\ u,\ v \in D$, $L > 0$.

Позначимо через

$$m = \beta_0 L \max\left\{\frac{\eta_0(1 + \beta_0\gamma\eta_0)}{1 - \beta_0\mu\eta_0} + (a + b)\,\alpha, (1 + a + b)\,\frac{\eta_0(1 + \beta_0\gamma\eta_0)}{1 - \beta_0\mu\eta_0}\right\} + \\ + \beta_0\mu\eta_0 + \beta_0\gamma\eta_0,$$

$$C^* = \frac{\beta_0\gamma\eta_0}{1 - \beta_0 L\left((2 + a + b)\,R + (a + b)\,\alpha\right)},$$

припустимо, що $|a_k| \le a$, $b_k \le b$ і

$$u\left(1 - \frac{m(1 + C^*)}{1 - \beta_0 L\left((2 + a + b)\,u + (a + b)\,\alpha\right) - \beta_0\mu u}\right) - \frac{\eta_0(1 + \beta_0\gamma\eta_0)}{1 - \beta_0\mu\eta_0} = 0 \tag{14}$$

має хоча б один додатний корінь, причому R — найменший додатний. Якщо $\beta_0 L\left((2 + a + b)\,R + (a + b)\,\alpha\right) + \beta_0\mu R < 1$,

$$M = \frac{m}{1 - \beta_0 L\left((2 + a + b)\,R + (a + b)\,\alpha\right) - \beta_0\mu R}(1 + C^*) < 1$$

і $\bar{S}_0 \subset D$, тоді послідовність $\{x_k\}$, утворена ітераційним процесом (13), коректно визначена і збігається до єдиного розв'язку $x_* \in \bar{S}_0$ рівняння (1). Крім цього, справедлива оцінка

$$\|x_k - x_*\| < \frac{1}{h(1-M)} M^{\Phi_k},$$

де $h = \dfrac{\beta_0\Big(L(1+a+b)+\mu+\gamma\Big)(1+C^*)}{1-\beta_0 L\left((2+a+b)\,R+(a+b)\,\alpha\right)-\beta_0\mu R}$, $\Phi_{-1}=0,\ \Phi_0=1,$ $\Phi_k = \Phi_{k-1}+\Phi_{k-2},\ k=1,2,\ldots.$

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1.

4 Висновки

В цій статті проведено аналіз стійкості двопараметричного методу типу хорд до похибок обчислень при розв'язуванні нелінійних рівнянь і встановлено оцінку повної похибки. Отримані оцінки вказують на те, що ітераційний процес (2) є стійким, тобто, похибки, якщо вони не дуже великі, не впливають на його збіжність. Крім цього, вони не змінюють порядок збіжності (у роботі [7] доведено, що порядок збіжності методу (2) рівний $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$), якщо виконуються умови $\|\Gamma_k\| \le \mu\eta_k$, $\|\Psi_0\| \le \gamma\eta_0^2$, $\|\Psi_k\| \le \gamma\eta_k\eta_{k-1}$, $k \ge 1$. Таким чином, потрібно якомога точніше обчислювати відхил $F(x_k)$, а точність обчислення поділеної різниці $F(u_k, v_k)$ може бути на порядок нижчою.

[1] *Михлин С.Г.* Некоторые вопросы теории погрешностей. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. — 333 с.

[2] *Бабич М.Д., Иванов В.В.* Оценка полной погрешности при решении нелинейных операторных уравнений методом простой итерации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1967. — **7**, №5. — С. 988–1000

[3] *Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н.* Исследование условий сходимости и оценка полной погрешности одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений // Вычисл. и прикл. матем. — 1976. — **28**. — С. 3–9.

[4] *Шахно С.М.* Построение и исследование некоторых методов типа Ньютона-Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений. Автореферат ... канд. физ.-мат. наук. — Киев. — 1988. — 17 с.

[5] *Amat S., Busquier S.* On a higher order Secant method // Appl. Math. Comp. — 2003. — **141**. — P. 321–329.

[6] *Hernandez M.A., Rubio M.J.* The Secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. — 2002. — **15**. — P. 395–399.

[7] *Шахно С.М., Граб С.І., Ярмола Г.П.* Двопараметричні методи типу хорд для розв'язування нелінійних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. — 2009. — **15**. — С. 117–127.

[8] *Шахно С.М., Ярмола Г.П.* Застосування двопараметричних різницевих методів для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. — 2011. — **17**. — С. 37–46.

ON ERROR ESTIMATES FOR A TWO-PARAMETRIC SECANT-TYPE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

Stepan SHAKHNO, Halyna YARMOLA

Ivan Franko National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

In this paper the analysis of the stability of two-parametric secant-type method with errors calculation for solving nonlinear equations is conducted. The overall error of the reporting method is obtained.