ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є В АЛГЕБРІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ ШВАРЦА ПОВІЛЬНОГО РОСТУ

©2012 р. Сергій ШАРИН

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *sharynsir@yahoo.com*

Редакція отримала статтю 21 лютого 2012 р.

Нехай $\mathsf{P}(\mathcal{X}')$ — простір неперервних поліномів на ядерному (F) або (DF) просторі $\mathcal{X}'$. У цій статті ми розширюємо довільний лінійний неперервний оператор до деякого лінійного неперервного оператора на просторі $\mathsf{P}'(\mathcal{X}')$ поліноміальних розподілів. Зокрема, ми будуємо поліноміальне розширення перетворення Фур'є на простір поліноміальних розподілів Шварца повільного росту.

Вступ

Техніка лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) давно використовується при моделюванні та розв'язанні багатьох задач математичної фізики. Проте сучасний стан досліджень в деяких галузях науки вимагає нелінійного узагальнення поняття розподілу. Крім того, бажаною є алгебраїчна структура простору узагальнених функцій, що диктується потребами, наприклад, квантової теорії поля (див. [1]). У роботах [2, 3] побудовано поліноміальне розширення

УДК: 517.98; MSC 2010: 46G20, 46F25

Ключові слова і фрази: поліноми на нескінченновимірних просторах, повільно зростаючі розподіли Шварца, узагальнене перетворення Фур'є

Робота підтримана грантом ДФДД України № Ф35/531-2011

(лінійних) ультрарозподілів Рум'є та досліджено відповідне поліноміальне узагальнення перетворення Лапласа. При цьому досліджувані поліноміальні розподіли мають додаткову алгебраїчну структуру. Як відомо, лінійні розподіли та ультрарозподіли не утворюють алгебри. Власне наявність множення в просторах поліноміальних узагальнених функцій відрізняє наш підхід від інших відомих узагальнень класичних просторів розподілів [4, 5, 6].

У цій статті, що є продовженням робіт [7, 8], ми покажемо як розширити довільний лінійний неперервний оператор до деякого оператора на просторі поліноміальних розподілів. Зокрема, ми розширимо перетворення Фур'є на простір поліноміальних узагальнених функцій повільного росту.

1 Попередні відомості і означення

Нехай $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ — локально опуклі ядерні (F) або (DF) простори [9]. Позначимо $\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ простір всіх неперервних лінійних операторів з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах в $\mathcal{X}$. Для простоти писатимемо $\mathscr{L}(\mathcal{X})$ замість $\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$. Для позначення композиції операторів в $\mathscr{L}(\mathcal{X})$ ми будемо використовувати символ $\circ$. Сильно спряжений до $\mathcal{X}$ простір ми будемо позначати $\mathcal{X}' := \mathscr{L}(\mathcal{X},\mathbb{C})$. Дію функціоналу $f \in \mathcal{X}'$ на елемент $x \in \mathcal{X}$ ми будемо записувати $\langle f,x\rangle$, а відповідну двоїстість — $\langle \mathcal{X}',\mathcal{X}\rangle$.

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору $\mathcal{X}$ будемо використовувати позначення $\otimes^n\mathcal{X}$ (відповідно $\otimes^n_s\mathcal{X}$). Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) в проективній локально опуклій топології позначатимемо $\otimes_{\mathfrak{p}}$ (відповідно $\otimes_{s,\mathfrak{p}}$). Очевидно, що $\otimes^1_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X} = \mathcal{X}$. За означенням приймемо $\otimes^0_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X} := \mathbb{C}$.

Всюди в роботі символом $\mathop{\times}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}$ ми позначаємо декартовий локально опуклий добуток і $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}$ — пряму локально опуклу суму симетричних тензорних степенів $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}$ простору $\mathcal{X}$.

Простір $\mathsf{P}(\mathcal{X}) = \Big\{P = \sum\limits_{n=0}^{m} P_n : P_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{X}), m \in \mathbb{N}\Big\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в $\mathcal{X}$, називається простором неперервних поліномів на $\mathcal{X}$, де $\mathsf{P}_n(\mathcal{X})$ — простір усіх неперервних n-однорідних поліномів [10]. Сильно спряжені простори до $\mathsf{P}(\mathcal{X})$, $\mathsf{P}_n(\mathcal{X})$ ми будемо позначати $\mathsf{P}'(\mathcal{X})$, $\mathsf{P}'_n(\mathcal{X})$ відповідно.

В роботі [3] доведено наступне

Твердження 1.1. *Нехай $\mathcal{X}$ — локально опуклий ядерний (F) або (DF) простір. Тоді мають місце топологічні ізоморфізми*

$$\begin{gathered}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X} \overset{\Upsilon_{\mathcal{X}}}{\simeq} \mathsf{P}_n(\mathcal{X}'), \quad \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}' \overset{\Upsilon_{\mathcal{X}'}}{\simeq} \mathsf{P}_n(\mathcal{X}),\\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X} \overset{\tilde{\Upsilon}_{\mathcal{X}}}{\simeq} \mathsf{P}(\mathcal{X}'), \qquad \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}' \overset{\tilde{\Upsilon}_{\mathcal{X}'}}{\simeq} \mathsf{P}'(\mathcal{X}').\end{gathered} \tag{1}$$

Із [9, теорема 9.9] випливає, що $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}' \simeq (\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X})'$, тому ізоморфізм $\Upsilon_{\mathcal{X}'} : \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}' \simeq (\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X})' \ni f_n \longmapsto F_n := f_n \circ \otimes^n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{X})$ можна подати у вигляді

$$F_n(x) = \langle f_n, \otimes^n x\rangle, \quad x \in \mathcal{X}, \tag{2}$$

де $\otimes^n : \mathcal{X} \ni x \longmapsto \otimes^n x := x \otimes \cdots \otimes x \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}$.

Надалі елементи простору $\mathsf{P}'(\mathcal{X}')$ ми будемо розуміти як поліноміальні функціонали на просторі $\mathcal{X}$ в сенсі формули

$$F(x) := \left\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n x \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n(x), \qquad x \in \mathcal{X}, \tag{3}$$

де $F := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \in \mathsf{P}'(\mathcal{X}')$ і тому називатимемо їх *поліноміальними узагальненими функціями.*

2 Оператори на просторі поліноміальних розподілів

Нехай $A \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ та $A' \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}',\mathcal{X}')$ — пара взаємно спряжених операторів, $\mathbf{1} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$ — оператор множення на одиницю. Визначимо оператор $A'^{\otimes} \in \mathscr{L}\big(\bigtimes_n \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{Y}', \bigtimes_n \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}'\big)$ наступним чином

$$\begin{aligned} A'^{\otimes} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A'^{\otimes_n} : \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{Y}' &\longrightarrow \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{X}' \\ y = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n &\longmapsto A'^{\otimes}y = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A'^{\otimes_n} y_n, \end{aligned}$$

де $A'^{\otimes_0} := \mathbf{1}$, а кожен оператор $A'^{\otimes_n}$, $n \in \mathbb{N}$, є n-тим тензорним степенем оператора A', тобто

$$A'^{\otimes_n} := A' \otimes \cdots \otimes A' : \quad \begin{array}{ccc} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y}' & \longrightarrow & \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{X}' \\ y_1 \otimes_s \cdots \otimes_s y_n & \longmapsto & A'y_1 \otimes_s \cdots \otimes_s A'y_n. \end{array}$$

Теорема 2.1. *Наступні діаграми однозначно визначають лінійний неперервний оператор* $A'^{\otimes_n}_{\mathsf{P}}$ *на просторі* n*-однорідних поліномів* $\mathsf{P}_n(\mathcal{Y})$ *та лінійний неперервний оператор* $A'^{\otimes}_{\mathsf{P}}$ *на просторі поліноміальних розподілів* $\mathsf{P}'(\mathcal{Y}')$ *відповідно*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_n(\mathcal{Y}) \arrow[r, "A'^{\otimes_n}_{\mathsf{P}}"] \arrow[d, shift left, "\Upsilon^{-1}_{\mathcal{Y}'}"] & \mathsf{P}_n(\mathcal{X}) \arrow[d, shift left, "\Upsilon^{-1}_{\mathcal{X}'}"] \\ \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y}' \arrow[r, "A'^{\otimes_n}"] \arrow[u, shift left, "\Upsilon_{\mathcal{Y}'}"] & \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{X}', \arrow[u, shift left, "\Upsilon_{\mathcal{X}'}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{P}'(\mathcal{Y}') \arrow[r, "A'^{\otimes}_{\mathsf{P}}"] \arrow[d, shift left, "\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{Y}'}"] & \mathsf{P}'(\mathcal{X}') \arrow[d, shift left, "\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{X}'}"] \\ \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y}' \arrow[r, "A'^{\otimes}"] \arrow[u, shift left, "\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{Y}'}"] & \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{X}'. \arrow[u, shift left, "\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{X}'}"] \end{tikzcd}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що з Твердження 1.1 випливає, що вище записані діаграми комутативні. Тому лінійні відображення $A'^{\otimes_n}_{\mathsf{P}} := \Upsilon_{\mathcal{X}'} \circ A'^{\otimes_n} \circ \Upsilon^{-1}_{\mathcal{Y}'}$ та $A'^{\otimes}_{\mathsf{P}} := \widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{X}'} \circ A'^{\otimes} \circ \widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{Y}'}$ однозначно можна визначити за допомогою рівностей

$$\left[A'^{\otimes_n}_{\mathsf{P}} F_n\right](x) = \langle f_n, \underbrace{Ax \otimes \cdots \otimes Ax}_{n} \rangle, \qquad x \in \mathcal{X},$$
$$\left[A'^{\otimes}_{\mathsf{P}} F\right](x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f_n, \underbrace{Ax \otimes \cdots \otimes Ax}_{n} \rangle, \qquad x \in \mathcal{X},$$

де $f_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y}' \simeq (\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y})'$, $F_n := \Upsilon_{\mathcal{Y}'}(f_n) \in \mathsf{P}_n(\mathcal{Y})$, $F := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \in \mathsf{P}'(\mathcal{Y}')$ (див. формули (2) та (3)).

Із вище записаних співвідношень випливає, що для завершення доведення залишилось показати неперервність операторів $A'^{\otimes_n}$ та $A'^{\otimes}$. Зауважимо, що оператор $A'^{\otimes_n}$ є спряженим до $A^{\otimes_n} := A \otimes \cdots \otimes A$ відносно дуальних пар $\langle \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{X}', \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{X} \rangle$ та $\langle \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y}', \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y} \rangle$, тобто

$$\langle A'y_1 \otimes_s \ldots \otimes_s A'y_n, x_1 \otimes_s \ldots \otimes_s x_n \rangle = \langle y_1 \otimes_s \ldots \otimes_s y_n, Ax_1 \otimes_s \ldots \otimes_s Ax_n \rangle,$$

де $y_1 \otimes_s \ldots \otimes_s y_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{Y}'$, $x_1 \otimes_s \ldots \otimes_s x_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{X}$, $y_i \in \mathcal{Y}'$, $x_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n$.

Розглянемо в просторі $\otimes_{\mathfrak{p}}^n \mathcal{X}$ підпростір $\otimes^n \mathcal{X}$ функцій, що є скінченними сумами вигляду $x = \sum_{i=1}^m x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}$. Підпростір $\otimes^n \mathcal{X}$ є щільним в $\otimes_{\mathfrak{p}}^n \mathcal{X}$. З неперервності оператора A на $\mathcal{X}$ випливає, що для довільної неперервної напівнорми $q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$ на $\otimes_{\mathfrak{p}}^n \mathcal{Y}$ знайдуться такі константи $C_1, \ldots, C_n$ та напівнорми $p_1, \ldots, p_n$ на $\mathcal{X}$, що

$$(q_1 \otimes \ldots \otimes q_n)(A^{\otimes_n} x) = \inf \sum_{i=1}^m q_1(Ax_{i_1}) \cdots q_n(Ax_{i_n}) \leq$$

$$\inf \sum_{i=1}^m C_1 p_1(x_{i_1}) \cdots C_n p_n(x_{i_n}) = C_1 \cdots C_n (p_1 \otimes \ldots \otimes p_n)(x),$$

де інфімум беруть за всіма зображеннями $x = \sum_{i=1}^m x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}$. Отже, оператор $A^{\otimes_n} : \otimes_{\mathfrak{p}}^n \mathcal{X} \longrightarrow \otimes_{\mathfrak{p}}^n \mathcal{Y}$ є неперервним.

Нехай ζ_n — оператор симетризації, тобто

$$\zeta_n : \otimes^n \mathcal{X} \ni x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto x_1 \otimes_s \ldots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\zeta \in \mathfrak{G}_n} x_{\zeta(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\zeta(n)} \in \otimes_s^n \mathcal{X},$$

де $\mathfrak{G}_n$ — група перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$. Тоді для довільного $x \in \otimes^n \mathcal{X}$ маємо $(\zeta_n \circ A^{\otimes_n})x = (A^{\otimes_n} \circ \zeta_n)x$, оскільки підпростір $\otimes_s^n \mathcal{X} \subset \otimes^n \mathcal{X}$ є інваріантним відносно дії оператора $A^{\otimes_n}$. З неперервності ζ_n випливає неперервність звуження $A^{\otimes_n} : \otimes_{s,\mathfrak{p}}^n \mathcal{X} \longrightarrow \otimes_{s,\mathfrak{p}}^n \mathcal{Y}$. Звідси отримуємо неперервність спряженого оператора $A'^{\otimes_n}$ і, як наслідок, оператора $A'^{\otimes}$. $\square$

3 Поліноміальне узагальнення перетворення Фур'є

Нехай $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — простір швидко спадних функцій Шварца, $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — сильно спряжений до $\mathcal{S}$ простір розподілів Шварца повільного росту.

Розглянемо в $\mathcal{S}'$ замкнутий підпростір $\mathcal{S}'_+$ розподілів з носіями в конусі $\mathbb{R}^d_+$. Фактор простір $\mathcal{S}_+ := \mathcal{S} \big/ \mathcal{S}'^{\perp}_+ = \big\{ \boldsymbol{\varphi} := \varphi + \mathcal{S}'^{\perp}_+ : \varphi \in \mathcal{S} \big\}$ є дуальним до $\mathcal{S}'_+$, де $\mathcal{S}'^{\perp}_+$ — ортогональне доповнення $\mathcal{S}'_+$ відносно двоїстості $\big\langle \mathcal{S}', \mathcal{S} \big\rangle$. У статті [8] показано, що $\big\langle \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \big\rangle$ — коректно визначена дуальність. З теорії двоїстості та теорії ядерних просторів [9, 11] випливає, що $\mathcal{S}'_+$ є ядерним (DF) простором, а $\mathcal{S}_+$ — ядерним (F) простором.

Розглянемо простір $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ поліномів на $\mathcal{S}'_+$ і сильно спряжений до нього простір $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. З формул (1) випливає, що довільний елемент $f \in \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ можна записати у вигляді $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$, де $f_0 \in \mathbb{C}$, $f_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ \simeq (\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+)'$, $n \in \mathbb{N}$. Елементи простору $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називатимемо *поліноміальними розподілами Шварца повільного росту.*

Відомо [12], що для довільної функції $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(\xi) := F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathrm{i}(t,\xi)} \varphi(t)\, dt$ здійснює лінійний ізоморфізм простору $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$. Оскільки $\mathcal{S}'^{\perp}_+ \subset \mathcal{S}$, то Фур'є образ $F[\mathcal{S}'^{\perp}_+]$ простору $\mathcal{S}'^{\perp}_+$ є замкненим підпростором в $\mathcal{S}$. Нехай

$$\widehat{\mathcal{S}}_+ := \mathcal{S}/F[\mathcal{S}'^{\perp}_+] = \left\{ \widehat{\boldsymbol{\varphi}} := \widehat{\varphi} + F[\mathcal{S}'^{\perp}_+] \colon \widehat{\varphi} \in \mathcal{S} \right\}$$

позначає відповідний фактор простір. З означень фактор просторів $\mathcal{S}_+$ та $\widehat{\mathcal{S}}_+$ випливає, що перетворення Фур'є породжує ін'єктивне відображення $F_+ \colon \mathcal{S}_+ \longmapsto \widehat{\mathcal{S}}_+$. Користуючись ін'єктивністю F_+, простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ наділимо індукованою перетворенням F_+ топологією. Звідси випливає, що простір $\widehat{\mathcal{S}}_+$ є ядерним (F) простором.

Надалі кожен елемент (клас еквівалентності) простору $\mathcal{S}_+$ будемо розглядати як однозначно визначену функцію $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d_+)$, яка є звуженням довільного представника цього класу еквівалентності на $\mathbb{R}^d_+$. Тоді для кожної функції $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$ маємо

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-\mathrm{i}(t,\xi)} \boldsymbol{\varphi}(t)\, dt, \qquad \boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}(t,\xi)} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^d$ і $t \in \mathbb{R}^d_+$.

Нехай $F'_+ \colon \widehat{\mathcal{S}}'_+ \longmapsto \mathcal{S}'_+$ — спряжене до F_+ відображення, де $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ — сильно спряжений до $\widehat{\mathcal{S}}_+$ простір. Перетворення

$$\mathcal{F}' := (2\pi)^d (F'_+)^{-1} \colon \mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}}'_+$$

назвемо *узагальненим перетворенням Фур'є* узагальнених функцій з класу $\mathcal{S}'_+$. Простір $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є ядерним (DF) простором як сильно спряжений до (F) простору $\widehat{\mathcal{S}}_+$. Відомо, що простір $\mathcal{S}'_+$ є згортковою алгеброю з одиницею δ, де $\left\langle \delta, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \boldsymbol{\varphi}(0)$ — функціонал Дірака. Зрозуміло, що $\widehat{\delta * f} = \widehat{f} = \widehat{f * \delta}$. Тому, $\widehat{\mathcal{S}}'_+$ є комутативною мультиплікативною алгеброю з одиницею $\widehat{\delta}$ відносно множення $\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$, $f, g \in \mathcal{S}'_+$.

Білінійна форма

$$\left\langle \mathcal{F}' f, F_+ \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \left\langle F'_+ \mathcal{F}' f, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = (2\pi)^d \left\langle f, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle,$$

де $f \in \mathcal{S}'_+$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, визначає нову дуальність $\left\langle \widehat{\mathcal{S}}'_+, \widehat{\mathcal{S}}_+ \right\rangle$. Неважко показати, що $\widehat{\delta} = 1$. Дійсно, використавши другу з формул (4), маємо

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}' \delta, F_+ \boldsymbol{\varphi} \right\rangle &= (2\pi)^d \left\langle \delta, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = (2\pi)^d \boldsymbol{\varphi}(0) = \\ &\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}(t,\xi)}\, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi)\, d\xi \bigg|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\xi)\, d\xi = \left\langle 1, F_+ \boldsymbol{\varphi} \right\rangle, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+. \end{aligned} \tag{5}$$

Розширимо узагальнене перетворення Фур'є на поліноміальну алгебру $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, використавши тензорну структуру цього простору. Друга з комутативних діаграм

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathsf{P}}"] \arrow[d, shift left, "\Upsilon^{-1}_{\mathcal{S}'_+}"] & \mathsf{P}_n(\widehat{\mathcal{S}}_+) \arrow[d, shift left, "\Upsilon^{-1}_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}"] \\ \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes n}"] \arrow[u, shift left, "\Upsilon_{\mathcal{S}'_+}"] & \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \widehat{\mathcal{S}}'_+ , \arrow[u, shift left, "\Upsilon_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+) \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathsf{P}}"] \arrow[d, shift left, "\tilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}'_+}"] & \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+) \arrow[d, shift left, "\tilde{\Upsilon}^{-1}_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}"] \\ \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ \arrow[r, "\mathcal{F}'^{\otimes}"] \arrow[u, shift left, "\tilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}"] & \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \widehat{\mathcal{S}}'_+ \arrow[u, shift left, "\tilde{\Upsilon}_{\widehat{\mathcal{S}}'_+}"] \end{tikzcd}$$

однозначно визначає поліноміальне розширення

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathsf{P}} \colon \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+) \ni F = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \mapsto \widehat{F} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathsf{P}}(F_n) \in \mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+),\ F_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+),$$

узагальненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}'$, де $\mathcal{F}'^{\otimes n}_{\mathsf{P}}$ — n-однорідний випадок відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathsf{P}}$, тобто перетворення, що однозначно визначається першою комутативною діаграмою.

Відображення $\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathsf{P}}$ ми назвемо *поліноміальним узагальненням перетворенням Фур'є*. Зауважимо, що це перетворення діє як сюр'єктивний топологічний ізоморфізм з $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ на $\mathsf{P}'(\widehat{\mathcal{S}}'_+)$.

Приклад 1. *Обчислимо поліноміальне перетворення Фур'є елемента* $\delta_{\mathsf{P}} := (1, \delta, \delta \otimes \delta, \ldots, \otimes^n \delta, \ldots) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ \simeq \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$.

З формули (5) *випливає, що для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *отримаємо* $\mathcal{F}'^{\otimes n}[\otimes^n \delta] = 1 \otimes \cdots \otimes 1 = \otimes^n 1$. *Тому остаточно отримаємо*

$$\mathcal{F}'^{\otimes}_{\mathsf{P}}[\delta_p] = (1, 1, 1 \otimes 1, \ldots, \otimes^n 1, \ldots).$$

Приклад 2. *Нехай* $\vartheta_+ \colon \mathbb{R}^d \ni t \longmapsto \vartheta_+(t) := \vartheta(t_1)\cdots\vartheta(t_d)$ — *характеристична функція конуса* $\mathbb{R}^d_+$, *де* ϑ *позначає функцію Хевісайда. Покажемо, що* $\mathcal{F}'\vartheta_+ = (2\pi)^d\delta$. *Дійсно*

$$\left\langle\, \mathcal{F}'\vartheta_+, F_+\boldsymbol{\varphi} \,\right\rangle = (2\pi)^d \left\langle\, \vartheta_+, \boldsymbol{\varphi} \,\right\rangle = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d_+} \boldsymbol{\varphi}(t)\, dt =$$

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{-\mathrm{i}(t,\xi)} \boldsymbol{\varphi}(t)\, dt \,\Bigg|_{\xi=0} = (2\pi)^d \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(0) = (2\pi)^d \left\langle\, \delta, F_+\boldsymbol{\varphi} \,\right\rangle, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+,$$

Знайдемо поліноміальне перетворення Фур'є елемента

$$\vartheta_{\mathsf{P}} := \Big(1, \frac{1}{(2\pi)^d}\vartheta_+, \ldots, \otimes^n \frac{1}{(2\pi)^d}\vartheta_+, \ldots\Big) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+ \simeq \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+).$$

Легко бачити, що $\mathcal{F}'^{\otimes_n}\left[\otimes^n \frac{1}{(2\pi)^d}\vartheta_+\right] = \otimes^n\delta$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$. *Отже,* $\mathcal{F}'^{\otimes}[\vartheta_{\mathsf{P}}] = \delta_{\mathsf{P}}$.

[1] *Borchers H.* Algebras of unbounded operators in quantum fields theory // Physica. — 1988. — **124A**. — P. 1–127.

[2] *Lopushansky O.V.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation // Banach Center Publ. — 2010. — **88**. — P. 195–209.

[3] *Lopushansky O.V., Sharyn S.V.* Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ // Topology. — 2009. — **48**, №2–4. — P. 80–90.

[4] *Hida T., Kuo H.H., Potthoff J., Streit L.* White Noise: An Infinite Dimensional Calculus. — Kluwer Academic Publ., 1993.

[5] *Kondratiev Y.G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis // Hiroshima Math. J. — 1998. — **28**. — P. 213–260.

[6] *Obata N.* White Noise Calculus and Fock Space. — Springer, 1995.

[7] Шарин С.В. *Поліноміальні повільно зростаючі розподіли* // Карпатські матем. публ. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 123–132.

[8] *Шарин С.В.* Напівгрупи зсувів в алгебрі поліноміальних розподілів Шварца повільного росту // Математичний вісник НТШ. — 2011. — **8**. — С. 230–242.

[9] *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.

[10] *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. — Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

[11] *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. — М.: Мир, 1967. — 266 с.

[12] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.

FOURIER TRANSFORMATION IN THE ALGEBRA OF POLYNOMIAL SCHWARTZ TEMPERED DISTRIBUTIONS

Sergii SHARYN

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *sharynsir@yahoo.com*

Let $\mathsf{P}(\mathcal{X}')$ stand for the space of continuous polynomials on a nuclear (F) or (DF) space $\mathcal{X}'$. In the article we extend an arbitrary linear continuous operator to some linear continuous operator on the space $\mathsf{P}'(\mathcal{X}')$ of polynomial distributions. In particular, we construct a polynomial extension of Fourier transformation onto the space of polynomial Schwartz tempered distributions.