ОБҐРУНТУВАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА

Ганна СЛИВКА-ТИЛИЩАК, Ізабелла МАРИНА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64, Київ 01601,
Ужгородський національний університет,
вул. Підгірна 46, Ужгород

e-mail: *aslyvka@tn.uz.ua, izabelm@freemail.hu*

Редакція отримала статтю 28 лютого 2012 р.

Знайдено умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами з простору Орліча.

1 Вступ

Тематика даної статті знаходиться на перетині двох галузей математики: математичної фізики та випадкових процесів. Зображення розв'язків рівнянь математичної фізики з випадковими факторами за допомогою функціональних рядів та вивчення їх властивостей, зокрема умов та швидкості збіжності до розв'язку задачі в різних просторах є досить цікавою та важливою задачею сучасної математики.

УДК: 519.21.; MSC 2010: Primary 60G35; Secondary 35L20.
Ключові слова і фрази: кругла мембрана, випадкові процеси з простору Орліча

Вивченню рівнянь математичної фізики з початковими випадковими умовами присвячені роботи [1]–[5]. В монографії [4] можна знайти посилання на наукові джерела, в яких описуються дослідження, що проводилися в даному напрямку.

В даній роботі використано метод дослідження крайових задач математичної фізики з випадковими факторами, що був запропонований Булдигіним В.В. та Козаченком Ю.В. [6], який дозволяє обґрунтовувати метод Фур'є для знаходження розв'язку цих задач та вивчати властивості розв'язку.

2 Рівняння коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами з простору Орліча

Розглянемо задачу про вільні коливання круглої однорідної мембрани радіуса R, якщо в початковий момент часу положення та швидкість зміни координат її точок є деякі випадкові поля, а край мембрани нерухомо закріплений [7]. Дана задача зводиться до розв'язування наступної крайової задачі в полярних координатах:

$$u_{tt}\left(t,\rho,\varphi\right)=a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right), \tag{1}$$

$$u\left(0,\rho,\varphi\right)=\xi(\rho,\varphi),\ u\left(0,\rho,\varphi\right)=\eta(\rho,\varphi), \tag{2}$$

$$0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$u\left(t,R,\varphi\right)=0. \tag{3}$$

Початкові умови $(\xi(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$ і $(\eta(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R]$ $\varphi\in[0,2\pi])$ є строго орлічеві випадкові поля [1]. При використанні методу Фур'є [7] роз'язок шукається у вигляді

$$u(t,\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\times$$

$$\times\cos n\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi, \tag{4}$$

де

$$\hat{a}_{nk}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi d\rho d\varphi}{\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos^2 n\varphi d\rho d\varphi},\ n=0,1,2,\dots$$

$$\breve{a}_{nk}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R \eta(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi d\rho d\varphi}{\pi\int_0^R \rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)d\rho},\ n=0,1,2,\dots$$

$$\hat{b}_{nk}=\frac{R\int_0^{2\pi}\int_0^R \eta(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi d\rho d\varphi}{\sqrt{\lambda_{nk}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos^2 n\varphi d\rho d\varphi},\ n=0,1,2,\dots$$

$$\breve{b}_{nk}=\frac{R\int_0^{2\pi}\int_0^R \xi(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi d\rho d\varphi}{\sqrt{\lambda_{nk}}R\pi\int_0^R \rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)d\rho},\ n=0,1,2,\dots$$

$\sqrt{\lambda_{nk}}=\frac{\nu_{nk}}{R},\ \nu_{nk}$ – власні значення крайової задачі

$$z''(\rho)+\frac{1}{\rho}z'(\rho)+(\lambda-\mu^2(\rho^2))z(\rho)=0,\ z(\rho)=0,\ |z(0)|<\infty,$$

які визначаються асимптотичними рівностями [8]

$$\nu_{nk}\cong k\pi+\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Власним значенням відповідають власні функції

$$z_k(\rho)=C_1J_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right),\ k=1,2,3,\dots,$$

де $J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$ — функції Бесселя першого роду n-го порядку.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1) *існують неперервні з ймовірністю одиниця похідні* $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho\partial\xi}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}$.
2) *для всіх* $0\le t\le T,\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ *ряд (4) і ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\breve{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\breve{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\Big(-\hat{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\Big)\,J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\Big(-\check{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\Big)\,J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n^2\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n^2\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{nk}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{nk}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

де

$$J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)=\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2}\left(J_{n-1}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)+J_{n+1}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right),$$

$$J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)=\frac{\lambda_{nk}}{4}\left(J_{n-2}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)-2J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)+J_{n+2}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right),$$

є збіжними.

Тоді з ймовірністю одиниця функція $u(t,\rho,\varphi)$, що зображена у вигляді ряду (4) *буде двічі неперервно диференційовним розв'язком задачі* (1)–(3).

Доведення. Оскільки існують підпослідовності часткових сум рядів зображених в умові 2) даної теореми, які збігаються рівномірно з імовірністю одиниця, то теорема доводиться як і в детермінованому випадку. □

У роботі [5] доведено, що $J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$, $J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$, можна записати у вигляді

$$J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) = \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta - n\theta\right)\cos\theta d\theta, \qquad (6)$$

$$J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) = -\frac{\lambda_{nk}}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta - n\theta\right)d\theta. \qquad (7)$$

Для $k \geq 1,\ n \geq 0$ введемо позначення:

$$S_{nk}^{(0_1)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(0_2)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(1_1)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(1_2)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(2_1)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\sqrt{\lambda_{nk}}\left(\hat{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t - \hat{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(2_2)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\sqrt{\lambda_{nk}}\left(\check{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t - \check{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(3_1)} = \sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_0}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(3_2)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(\check{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \check{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n' \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(4_1)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_0} n^2 \left(\hat{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \hat{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(4_2)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} n^2 \left(\check{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \check{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(5_1)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \lambda_{nk} \left(\hat{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \hat{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(5_2)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \lambda_{nk} \left(\check{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \check{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(6_1)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(\hat{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \hat{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \cos n\varphi,$$

$$S_{nk}^{(6_2)} = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(\check{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t + \check{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \right) J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin n\varphi.$$

Теорема 2.2. *Нехай $\xi(\rho,\varphi)$, $\eta(\rho,\varphi)$ — випадкові поля із простору Орліча. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував в області $[0,R]\times[0,\pi]\times[0,t]$ двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі* (1)–(3) *, що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду* (4)*, достатньо щоб*

1) *існували неперервні з ймовірністю одиниця похідні $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho\partial\xi}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}$;*

2) *для всіх $\rho\in[0,R]$, $\varphi\in[0,\pi]$, $t\in[0,T]$ збігалися ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t +$$
$$+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\sqrt{\lambda_{ml}}\Big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t-2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\sqrt{\lambda_{ml}}\Big(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t-2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}nm\Big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}nm\Big(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J'_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J'_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}nm\Big(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J'_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J'_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} n^2m^2 \left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\,+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} n^2m^2 \left(E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\,+\right.$$
$$\left.+E\check{b}_{nk}\check{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{nk}\lambda_{ml} \left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\,+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{nk}\lambda_{ml} \left(E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\,+\right.$$
$$\left.+E\check{b}_{nk}\check{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\,+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n''(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m''(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\,+\right.$$
$$\left.+E\check{b}_{nk}\check{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n''(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m''(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi;$$

3) *для* $n \geq 1$, $k = 0, 1, \dots 6$, $i = 1, 2$ *справджувалася нерівність*

$$\sup_{\substack{|\rho-\rho_1|\leq h\\ |\varphi-\varphi_1|\leq h\\ |t-t_1|\leq h}} \left(E\left|S_n^{(k_i)}(t,\rho,\varphi) - S_n^{(k_i)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_k(h),$$

де $\sigma_k(h)$ *— неперервні монотонно зростаючі функції такі, що* $\sigma_k(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *і є збіжним інтеграл*

$$\int\limits_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{R}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{\pi}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{T}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du, \tag{8}$$

$\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ *— функція обернена до* $\sigma_k(\varepsilon)$.

Доведення. Умова 2) даної теореми забезпечує збіжність в середньому квадратичному рядів, що розглянуті в умові 2) теореми 2.1. З умови 3) даної теореми та теореми 5 роботи [3] випливає, що ряди розглянуті в умові 2) теореми 2.1 збігаються за ймовірністю в $C([0,R]\times[0,\pi]\times[0,t])$. □

3 Умови існування з імовірністю одиниця розв'язку рівняння коливання круглої мембрани у частковому випадку

Приклад 1. *Нехай* $\xi(\rho,\varphi)$, $\eta(\rho,\varphi)$ *— строго орлічеві поля з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x)=|x|^p$, *тобто з простору* $L_p(\Omega)$. *Нехай в інтегралі* (8) $\sigma_k(h)=C_k|h|^{\delta}$, $0<\delta<1$. *Тоді, для того щоб інтеграл* (8) *був збіжним достатньо, щоб для досить малого* $\varepsilon>0$ *існував та був скінченним інтеграл:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\left(\frac{RC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\left(\frac{\pi C_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\left(\frac{TC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}+1\right)\right)^{\frac{1}{p}}du.$$

При достатньо малих $\varepsilon>0$ *дана умова буде мати вигляд:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{RC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\cdot\frac{\pi C_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\cdot\frac{TC_k^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\right)^{\frac{1}{p}}du \le D\int_{0+}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{u^{\frac{2}{p\delta}}}\right)du,$$

де $D=\left(\frac{RT\pi C_k^{\frac{3}{\delta}}}{8}\right)^{\frac{1}{p}}$. *Останній інтеграл збігається при* $\delta>\frac{3}{p}$.

Теорема 3.1. *Нехай* $(\xi(\rho,\varphi), \rho \in [0,R], \varphi \in [0,2\pi])$, $(\eta(\rho,\varphi),\ \rho \in [0,R],$ $\varphi \in [0,2\pi])$ *— строго орлічеві випадкові поля з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x) = |x|^p$, *при* $p > 3$, *а також*

$$B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi) = B_{0000}(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi) = E\xi(\rho,\varphi)\xi(\bar\rho,\bar\varphi),$$

$$R(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi) = R_{0000}(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)E\eta(\rho,\varphi)\eta(\bar\rho,\bar\varphi).$$

Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував в області $[0,R]\times[o,2\pi]\times$ $\times[0,T]$ *двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі* (1)–(3), *що зображується у вигляді ряду* (4), *достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *існували неперервні часткові похідні* $(\rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi])$

$$B_{1010} = \frac{\partial^4 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\rho^2\partial\bar\rho^2},$$

$$B_{0202} = \frac{\partial^4 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\varphi^2\partial\bar\varphi^2},$$

$$B_{1212} = \frac{\partial^4 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\rho\partial\bar\rho\partial\varphi\partial\bar\varphi},$$

$$R_{1010} = \frac{\partial^2 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\rho\partial\bar\rho},$$

$$R_{0202} = \frac{\partial^2 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\varphi\partial\bar\varphi},$$

і для достатньо малих h *виконуються нерівності:*

$$\sup_{\substack{|\rho-\bar\rho|\le h\\ |\varphi-\bar\varphi|\le h}} \left(B_z(\rho,\varphi,\rho,\varphi) - B_Z(\bar\rho,\bar\varphi,\bar\rho,\bar\varphi) - 2B_z(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)\right)^{\frac12} \le C_z|h|^\delta,$$

$$\sup_{\substack{|\rho-\bar\rho|\le h\\ |\varphi-\bar\varphi|\le h}} \left(R_z(\rho,\varphi,\rho,\varphi) - R_Z(\bar\rho,\bar\varphi,\bar\rho,\bar\varphi) - 2R_z(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)\right)^{\frac12} \le C_{z_1}|h|^\delta,$$

де $\delta > \frac{3}{p}$; $z = (0000);\ (1010);\ (0202);\ (1212)$, $z_1 = (0000);\ (1010);$ (0202);

2) *збігалися ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[|E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}|+|E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{lm}|+2|E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}|\right]<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[|E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}|+|E\check{b}_{nk}\check{b}_{lm}|+2|E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}|\right]<\infty;$$

3) *для довільних $\delta>\frac{3}{p}$ збіжними є такі ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n^2\left[\left(E(\hat{a}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(\hat{b}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\,(k+n)^{\delta}+n^{\delta}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n^2\left[\left(E(\check{a}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(\check{b}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\,(k+n)^{\delta}+n^{\delta}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)^2\left[\left(E(\hat{a}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(\hat{b}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\,(k+n)^{\delta}+n^{\delta}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)^2\left[\left(E(\check{a}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(\check{b}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\,(k+n)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

Доведення. Умова 1) даної теореми забезпечує виконання умови 1) теореми 2.2. Умова 2) випливає з умови 2) тієї ж теореми 2.2, якщо врахувати, що

$$\left|J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)d\theta\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)\right|d\theta\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\leq 1.$$

Розглянемо

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$=\left(E\left|\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi\ -\right.\right.$$

$$- \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(\hat{a}_{nk} \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 + \hat{b}_{nk} \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \right) J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \cos n\varphi_1 \Big|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Bigg(E \Bigg| \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \hat{a}_{nk} \left(\cos \sqrt{\lambda_{nk}} t \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \right) \cos n\varphi \ - \right.$$

$$\left. - \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \right) \cos n\varphi_1 \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \hat{b}_{nk} \left(\sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \right) \cos n\varphi - \right.$$

$$\left. - \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \right) \cos n\varphi_1 \Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(E \left(\hat{a}_{nk} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big| \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \right) \cos n\varphi -$$

$$- \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \right) \cos n\varphi_1 \Big| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(E \left(\hat{b}_{nk} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big| \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \right) \cos n\varphi -$$

$$- \sin \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \left(J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \right) \cos n\varphi_1 \Big| .$$

Використовуючи інтегральне зображення функції Бесселя першого роду порядку n (n — ціле невід'ємне число)

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (z \sin \theta - n\theta)\, d\theta, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

отримаємо такі оцінки

$$\Big| \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \cos n\varphi - \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \cos n\varphi_1 \Big| =$$

$$= \Bigg| \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin \theta - n\theta \right) \right) \cos n\varphi -$$

$$- \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \sin \theta - n\theta \right) \right) \cos n\varphi_1 \Bigg| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \sqrt{\lambda_{nk}} t \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin \theta - n\theta \right) \cos n\varphi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \sin \theta - n\theta \right) \cos n\varphi_1 \right] d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin \theta - n\theta \right) \cos n\varphi - \right.$$

$$\left. - \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \sin \theta - n\theta \right) \cos n\varphi_1 \right| d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\left| \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t - \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 \right| + \left| \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \sin \theta - n\theta \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos \left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \sin \theta - n\theta \right) \right| + \left| \cos n\varphi_1 - \cos n\varphi_1 \right| \right] d\theta \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\left| \sin \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(t - t_1)}{2} \right| + \left| \sin \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(\rho - \rho_1) \sin \theta}{2} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sin \frac{n(\varphi - \varphi_1)}{2} \right| \right] d\theta.$$

Використаємо асимптотичне зображення значень λ_{nk}(див. (5)) і нерівність $|\sin \alpha| \leq |\alpha|^{\delta}$ для $0 < \delta < 1$, матимемо

$$\left| \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho \right) \cos n\varphi - \cos \sqrt{\lambda_{nk}} t_1 J_n \left(\sqrt{\lambda_{nk}} \rho_1 \right) \cos n\varphi_1 \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\left| \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(t - t_1)}{2} \right|^{\delta} + \left| \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(\rho - \rho_1)}{2} \right|^{\delta} + \left| \frac{n(\varphi - \varphi_1)}{2} \right|^{\delta} \right] d\theta \leq$$

$$\leq 2 \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda_{nk}} h}{2} \right)^{\delta} + \left(\frac{\sqrt{\lambda_{nk}} h}{2} \right)^{\delta} + \left(\frac{nh}{2} \right)^{\delta} \right] \leq$$

$$\leq 2^{1-\delta} h^{\delta} (2(k+n)^{\delta} + n^{\delta}).$$

З вищевказаного маємо

$$\left(E \left| S_{nk}^{(0_1)}(t, \rho, \varphi) - S_{nk}^{(0_1)}(t_1, \rho_1, \varphi_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{0_1} |h|^{\delta},$$

$$C_{0_1} = 2^{1-\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} + (E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \times \left(2\,(k+n)^{\delta} + n^{\delta} \right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{0_2}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{0_2}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(1_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(1_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{1_1}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{1_1}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(1_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(1_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{1_2}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{1_2}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(2_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(2_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{2_1}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{2_1}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\frac{\pi}{R}\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(2_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(2_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{2_2}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{2_2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\frac{\pi}{R}\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right))^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

Розглянемо

$$\left(E\left|S_{nk}^{(3_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_1)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1} n\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi -\right.$$

$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(3_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_2)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1} n\left(E\left(\check{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\sin n\varphi -\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\sin n\varphi_1\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1} n\left(E\left(\check{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\sin n\varphi -\right.$$

$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\sin n\varphi_1\right|.$$

Використовуючи зображення (6) запишемо:

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|=$$

$$=\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)d\theta\right)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)d\theta\right)\cos n\varphi_1\right|=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\left[\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right]d\theta\right|=$$

$$\leq\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos\theta|\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi\leq\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right|d\theta\leq$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)}{R}|h|^{\delta}\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

Аналогічно знаходимо:

$$\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\leq$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)}{R}\left|h\right|^{\delta}\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|\leq$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)}{R}\left|h\right|^{\delta}\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)}{R}|h|^{\delta}\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

Отже,

$$\left(E\left|S_{nk}^{(3_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{3_1}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{3_1}=\frac{2^{1-\delta}}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(3_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{3_2}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{3_2}=\frac{2^{1-\delta}}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

Аналогічними міркуваннями отримаємо такі нерівності:

$$\left(E\left|S_{nk}^{(4_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(4_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{4_1}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{4_1}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n^2\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(4_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(4_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{4_2}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{4_2}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}n\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(5_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(5_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{5_1}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{5_1}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)^2\frac{\pi^2}{R^2}\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(5_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(5_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_{5_2}\left|h\right|^{\delta},$$

$$C_{5_2}=2^{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)^2\frac{\pi^2}{R^2}\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^{\delta}+n^{\delta}\right).$$

Розглянемо

$$\left(E\left|S_{nk}^{(6_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(6_1)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(6_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(6_2}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(E\left(\check{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\sin n\varphi-\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\sin n\varphi_1\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(E\left(\check{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\sin n\varphi-\right.$$

$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\sin n\varphi_1\right|.$$

Використовуючи (7) маємо

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\leq$$

$$=\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(-\frac{\lambda_{nk}}{\pi}\int_0^\pi\sin^2\theta\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(-\frac{\lambda_{nk}}{\pi}\int_0^\pi\sin^2\theta\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi_1\right|=$$

$$=\left|-\frac{\lambda_{nk}}{\pi}\int_0^\pi\sin^2\theta\left[\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right]d\theta\right|\leq$$

$$\leq\frac{\lambda_{nk}}{\pi}\int_0^\pi\left|\sin^2\theta\right|\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi-\right.$$

$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right|d\theta\leq$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)^2\pi}{R}\left|h\right|^\delta\left(2\left(k+n\right)^\delta+n^\delta\right).$$

Аналогічно переконуємося в справедливості нерівностей:

$$\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)^2\pi}{R}\left|h\right|^\delta\left(2\left(k+n\right)^\delta+n^\delta\right).$$

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)^2\pi}{R}\left|h\right|^\delta\left(2\left(k+n\right)^\delta+n^\delta\right).$$

$$\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|$$

$$\leq\frac{2^{1-\delta}(k+n)^2\pi}{R}\left|h\right|^\delta\left(2\left(k+n\right)^\delta+n^\delta\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(6_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(6_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{6_1}\left|h\right|^\delta,$$

$$C_{6_1}=\frac{2^{1-\delta}\pi}{R}\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty(k+n)^2\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(k+n\right)^\delta+n^\delta\right).$$

$$\left(E \left| S_{nk}^{(6_2)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(6_2}(t_1,\rho_1,\varphi_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C_{6_2} \left| h \right|^{\delta},$$

$$C_{6_2} = \frac{2^{1-\delta}\pi}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k+n)^2 \left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} + (E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \times \left(2\,(k+n)^{\delta} + n^{\delta} \right).$$

Отже, виконання умови 3) даної теореми забезпечує виконання умови 3) теореми 2.2. □

[1] *Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu.V.* Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions // Random Oper. And Stoch. Eq. — 1995. — **3**, №3. — P. 201–220.

[2] *Козаченко Ю.В., Сливка Г.І.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймов. та матем. статист. — 2003. — **69**. — С. 48–63.

[3] *Сливка-Тилищак Г.І., Вереш К.Й.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча // Наук. вісник. Ужгородського університету. Сер. мат. і інформ. – 2008. — **16**. — С 174–183.

[4] *Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак Г.І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. Монографія. — Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. — 175 с.

[5] *Сливка Г.І.* Коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами// Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. мат. і інформ. — 2004. — **9**. — С. 65–76.

[6] *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. — American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000. — 257 p.

[7] *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. — Київ: Либідь, 2006. — 424 с.

[8] *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высшая школа, 1964. — 559 с.

JUSTIFICATION OF THE FOURIER METHOD FOR ROUND MEMBRANE'S VIBRATIONS WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS FROM ORLICZ SPACE

Anna SLYVKA-TYLYSHCHAK, Izabella MARINA

Taras Shevchenko National University
64 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine
Uzhgorod National University,
46 Pidhirna Str., Uzhgorod

e-mail: *aslyvka@tn.uz.ua, izabelm@freemail.hu*

Conditions for the existence with probability of continuously twice differentiable solution of round membrane's vibrations with random initial conditions from Orlicz space are found.