# ПАРИ ОПУКЛИХ МНОЖИН У РОЗМИТИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

*©2012 р. Олександр САВЧЕНКО*

Херсонський державний аграрний університет,
вул. Рози Люксембург 23, Херсон 73011

e-mail: *savchenko1960@rambler.ru*

Редакція отримала статтю 15 грудня 2011 р.

Стаття присвячена аналогові конструкції лінійного простору пар компактних опуклих множин у контексті розмитих нормованих просторів. Означено розмиту норму на лінійному просторі пар компактних опуклих множин. Показано, що ця розмита норма на просторі пар опуклих компактних множин породжується нормою, описаною у статті Пінскера у випадку розмитої норми, породженої звичайною нормою. Показано також, що функтор пар опуклих поліедрів утворює монаду на категорії розмитих нормованих просторів і нерозтягуючих лінійних операторів.

## 1 Вступ

У теорії локально опуклих просторів добре відома конструкція простору пар компактних опуклих множин. Такі об'єкти природно виникають, наприклад, у квазідиференціальному численні [1]. Відома конструкція Пінскера дає змогу означити топологію на просторі (класів еквівалентності) таких пар. Якщо лінійний простір нормований, то на лінійному просторі пар теж існує природна норма. Після оригінальної

УДК: 515.12; MSC 2010: 54A40,46B20,46A55

*Ключові слова і фрази:* розмитий нормований простір, метрика Гаусдорфа, пари опуклих компактних множин, монада

статті Пінскера ця конструкція перевідкривалась. Вона також відома як гратка Германдера-Родстрема-Мінковського [2].

Метою цієї статті є одержання аналога такої норми для випадку розмитої норми на лінійному просторі. Це поняття вперше запроваджене у статті [3] (див. також [4, 5]); воно тісно пов'язане з поняттям розмитого метричного простору, зокрема, кожна розмита норма природно породжує розмиту метрику на просторі.

Зауважмо, що кожна норма на лінійному просторі природно породжує розмиту норму. Показано, що описана розмита норма на просторі пар опуклих компактних множин породжується у цьому випадку нормою, описаною у статті Пінскера.

Ми розглядаємо також категорний аспект описаної конструкції. Показано, що функтор пар опуклих поліедрів утворює монаду на категорії розмитих нормованих просторів і нерозтягуючих лінійних операторів.

## 2 Розмиті нормовані простори

Нам знадобиться поняття t-норми.

**Означення 1.** *Бінарну операцію* $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ *називають неперервною t-нормою, якщо* $*$ *задовольняє такі умови: (i)* $*$ *комутативна і асоціативна; (ii)* $*$ *неперервна; (iii)* $a*1=a$ *для всіх* $a\in[0,1]$*; (iv)* $a*b\le c*d$*, якщо* $a\le c$ *і* $b\le d$*, і* $a,b,c,d\in[0,1]$.

Прикладами t-норм є такі операції:

$$a*b=ab,\ a*b=\min\{a,b\},\ a*b=\max\{a+b-1,0\}$$

(t-норма Лукасєвича).

У літературі найбільш поширеними є два підходи до означення розмитого метричного простору.

**Означення 2.** *Трійка* $(X,M,*)$ *називається GV-розмитим метричним простором, якщо* $X$ *— довільна множина,* $*$ *— неперервна t-норма і* $M$ *— розмита множина на* $X^2\times(0,\infty)$ *(тобто функція* $X^2\times(0,\infty)\to[0,1]$*), що задовольняє умови для всіх* $x,y,z\in X$ *і* $s,t>0$*: (i)* $M(x,y,t)>0$*, (ii)* $M(x,y,t)=1$ *тоді і лише тоді, коли* $x=y$*, (iii)*

$M(x,y,t) = M(y,x,t)$, *(iv)* $M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M(x,z,t+s)$, *(v) функція* $M(x,y,-)\colon (0,\infty) \to [0,1]$ *неперервна.*

**Означення 3.** *Трійку* $(X, N, *)$ *називають розмитим нормованим простором, якщо* $X$ *— лінійний простір,* $*$ *— неперервна* $t$*-норма і* $N$ *— розмита множина на* $X \times (0,\infty)$*, що задовольняє такі умови для кожних* $x, y \in X$ *і* $t, s > 0$*: (i)* $N(x,t) > 0$*, (ii)* $N(x,t) = 1$ *тоді і лише тоді, коли* $x = 0$*, (iii)* $N(\alpha x, t) = N(x, t/|\alpha|)$ *для всіх* $\alpha \ne 0$*, (iv)* $N(x,t) * N(y,s) \le N(x+y, t+s)$*, (v)* $N(x,-)\colon (0,\infty) \to [0,1]$ *неперервна, (vi)* $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$.

Відомо, що для кожного розмитого нормованого простору $(X, N, *)$ функція $M\colon X \times X \times (0,\infty)$, означена формулою $M(x,y,t) = N(x-y,t)$ є розмитою метрикою на множині $X$.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — нормований простір. Відомо, що тоді функція

$$N(x,t) = \frac{t}{t + \|x\|}$$

є розмитою нормою на $X$. Позначимо цю розмиту норму через $N_{\|\cdot\|}$.

### 2.1 Пари компактних опуклих множин

Нехай $X$ — локально опуклий простір. Через $\mathrm{cc}(X)$ позначаємо множину всіх непорожніх компактних опуклих підмножин у $X$. Для кожних $A, B \in \mathrm{cc}(X)$ через $A + B$ позначаємо суму Мінковського

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

На множині $\mathrm{cc}(X) \times \mathrm{cc}(X)$ означимо відношення $\sim$:

$$(A,B) \sim (C,D) \text{ тоді і лише тоді, коли } A + D = B + C.$$

Відомо [6, 2], що $\sim$ є відношенням еквівалентності. Через $[A,B]$ позначаємо клас еквівалентності, що містить $(A,B)$. Відомо також, що фактормножина $L(X) = (\mathrm{cc}(X) \times \mathrm{cc}(X))/\sim$ є лінійним простором відносно операцій $[A,B] + [C,D] = [A+C, B+D]$ і $\alpha[A,B] = [\alpha A, \alpha B]$.

Через $\mathrm{conv}(A)$ позначаємо опуклу оболонку підмножини $A$ у лінійному просторі. Якщо $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то для її опуклої оболонки також вживаємо позначення $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Для кожних підмножин $A, B \subset X$ нехай $A \vee B = \mathrm{conv}(A \cup B)$.

Для кожних $[A, B], [C, D] \in L(X)$ нехай

$$[A, B] \oplus [C, D] = [(A + D) \vee (B + C), B + D].$$

З такою операцією $L(X)$ утворює векторну гратку.

Нехай $B$ — непорожня підмножина розмитого метричного простору $(X, M, *)$. Для кожних $a \in X$ і $t > 0$ нехай

$$M(a, B, t) = \sup\{M(a, b, t) \mid b \in B\}$$

(див. [7, означення 2.4]).

Для кожної розмитої метрики $M$ на $X$ через $M_H$ позначаємо розмиту метрику Гаусдорфа на множині $\exp X$ непорожніх компактних підмножин у $X$. Як і в статті [7], означимо функцію $M_H$ на $\exp X \times \exp X \to (0, \infty)$ формулою:

$$M_H(A, B, t) = \min\left\{\inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t)\right\}$$

для всіх $A, B \in \exp X$ і $t > 0$.

**Лема 1.** $M(\alpha a, \alpha B, t) = M(a, B, t/|\alpha|)$.

***Доведення.*** Оскільки множина $\alpha B$ компактна, то існує $b \in B$ таке, що $M(\alpha a, \alpha B, t) = M(\alpha a, \alpha b, t)$. Тоді $M(\alpha a, \alpha B, t) = M(a, b, t/|\alpha|) \leq M(a, B, t/|\alpha|)$.

З іншого боку, існує $c \in B$ таке, що $M(a, B, t/|\alpha|) = M(a, c, t/|\alpha|)$, а отже, $M(a, B, t/|\alpha|) = M(\alpha a, \alpha b, t) \leq M(\alpha a, \alpha B, t)$. $\square$

Аналогічно доводиться таке твердження.

**Лема 2.** $M_H(\alpha A, \alpha B, t) = M(A, B, t/|\alpha|)$.

Означимо функцію $N_H\colon L(X) \times L(X) \times (0, \infty) \to [0, 1]$ формулою: $N_H([A, B], t) = M_H(A, B, t)$.

**Теорема 1.** *Функція $N_H$ є розмитою нормою на $L(X)$.*

***Доведення.*** Покажемо спочатку, що функція $N_H$ коректно означена. Нехай $[A,B],[C,D] \in L(X)$ і $[A,B] = [C,D]$. Припустимо, що $N_H([A,B],t) > r$. Тоді, зокрема, $\inf_{a\in A} M(a,B,t) > r$, звідки випливає, що для кожного $a \in A$ маємо $M(a,B,t) > r$. Отже, для кожного $a \in A$ існує $b \in B$ таке, що $M(a,b,t) = N(a-b,t) > r$.

Оскільки $A + D = B + C$, то для кожного $d \in D$ існує $c \in C$ таке, що $a + d = b + c$, звідки

$$M(a,b,t) = N(a-b,t) = N(c-d,t) = M(c,d,t) > r.$$

Покажемо, що

$$\min\{N_H([A,B],t), N_H([C,D],s)\} \leq N_H([A,B] + [C,D], t+s).$$

Нехай $N_H([A,B],t) > r$, $N_H([C,D],s) > r$ для деякого $r \in (0,1)$. Якщо $x \in a + c$, то $x = a + c$ для деяких $a \in A$ і $c \in C$. Тоді існують $b \in B$ і $d \in D$ такі, що $M(a,b,t) > r$, $M(c,d,s) > r$. Нехай $y = b + d$, тоді

$$M(x,y,t+s) = N(a+c-b-d,t+s) \geq \min\{N(a-b,t), N(c-d,s\} > r,$$

звідки випливає $M_H(A+C,B+D,t+s) = N_H([A,B]+[C,D],t+s) > r$.

Нехай $[A,B] \in L(X)$ і $\alpha \neq 0$. Тоді за лемою 2 маємо

$$\begin{aligned} N_H(\alpha[A,B],t) =& N_H([\alpha A, \alpha B],t) = M_H(\alpha A, \alpha B, t) = \\ =& M_H(A,B,t/|\alpha|) = N_H([A,B],t/|\alpha|). \end{aligned}$$

Нехай $[A,B] \in L(X)$. Покажемо, що $\lim_{t\to\infty} N_H([A,B],t) = 1$.

Нехай $r \in (0,1)$. Зауважимо спочатку, що для кожних $a \in A$ і $b \in B$ існує $t_{ab} \in (0,\infty)$ таке, що для кожного $t \geq t_{ab}$ маємо $M(a,b,t) > r$. Оскільки функція $M$ неперервна, то існують околи $U_a$ та $V_b$ точок $a$ і $b$ відповідно такі, що для кожних $a' \in U_a$, $b' \in V_b$ маємо $M(a',b',t) > r$.

З відкритого покриття $\{U_a \times V_b \mid a \in A,\ b \in B\}$ компакта $A \times B$ виберемо скінченне підпокриття $\{U_{a_i} \times V_{b_j} \mid i = 1,\dots,k;\ j = 1,\dots,l\}$. Нехай $t_0 = \max\{t_{a_i b_j} \mid i = 1,\dots,k;\ j = 1,\dots,l\}$. Якщо тепер $(c,d) \in A \times B$, то існують $i,j$ такі, що $(c,d) \in U_{a_i} \times V_{b_j}$, тобто при $t \geq t_0$ маємо $M(c,d,t) > r$. Звідси безпосередньо випливає потрібна властивість.

Решта властивостей з означення розмитої норми очевидні. □

**Теорема 2.** *Якщо розмита норма $N$ на лінійному просторі $X$ породжена нормою $\|\cdot\|$, то розмита норма $N_H$ на лінійному просторі $L(X)$ породжена нормою $\|\cdot\|_H$.*

***Доведення.*** Позначимо через $d$ метрику на $X$, породжену нормою $\|\cdot\|$, $d(x,y,t) = \|x-y,t\|$. Нехай $[A,B] \in L(X)$. Зауважимо, що $\|[A,B]\|_H = d_H(A,B)$. Тоді

$$N_H([A,B],t) = M_H(A,B,t) = \frac{t}{t+d_H(A,B)} = \frac{t}{t+\|[A,B]\|_H}$$

(тут друга рівність випливає з результатів статті [7]). □

**Лема 3.** *Нехай $A, B$ — непорожні скінченні підмножини в розмитому нормованому просторі $(X, N, *)$. Тоді $M_H(\mathrm{conv}(A), \mathrm{conv}(B), t) \geq M_H(A,B,t)$.*

***Доведення.*** Застосовуючи індукцію, доведення можна звести до встановлення такого факту. Нехай $A, B$ — опуклі підмножини в $X$ і $a, b \in X$. Якщо $M_H(A,B,t) > r$ і $M(a,b,t) > r$, то $M_H(\mathrm{conv}(A \cup \{a\}), \mathrm{conv}(B \cup \{b\}), t) > r$.

Справді, нехай $\alpha x + (1-\alpha)a \in \mathrm{conv}(A \cup \{a\})$, де $x \in A$. Виберемо $y \in B$ так, щоби $M(x,y,t) > r$. Тоді одержуємо:

$$\begin{aligned}
M(\alpha x+&(1-\alpha)a, \alpha y + (1-\alpha)b, t) = N(\alpha(x-y) + (1-\alpha)(a-b), t) = \\
&= N(\alpha(x-y) + (1-\alpha)(a-b), \alpha t + (1-\alpha)t) \geq \\
&\geq \min\{N(\alpha(x-y), \alpha t), N((1-\alpha)(a-b), 1-\alpha)t)\} = \\
&= \min\{N(x-y,t), N((a-b),t) = \min\{M(x,y,t), M(a,b,t)\} > r.
\end{aligned}$$

Твердження леми тепер випливає з означення розмитої метрики Гаусдорфа. □

Нагадаємо, що відображення $f$ розмитого метричного простору $(X_1, M_1, *)$ в розмитий метричний простір $(X_2, M_2, *)$ називається ізометричним вкладенням, якщо

$$M_2(f(x), f(y), t) = M_1(x,y,t), \ (x,y,t) \in X \times X \times (0,\infty).$$

**Твердження 1.** *Відображення* $f\colon X \to L(X)$, $f(x) = [\{x\}, \{0\}]$, *є ізометричним вкладенням.*

***Доведення.*** Нехай $x, y \in X$, тоді з властивостей розмитої метрики Гаусдорфа випливає

$$\begin{aligned} M_H(f(x), f(y), t) =& M_H([\{x\}, \{0\}], [\{y\}, \{0\}], t) = \\ =& N_H([\{x\} + \{0\}], [\{0\} + \{y\}], t) = \\ =& N_H([\{x\}, \{y\}], t) = M_H(\{x\}, \{y\}, t) = M(x, y, t). \end{aligned}$$

□

Нехай $(X_i, N_i, *)$ — розмиті нормовані простори. Лінійне відображення $f\colon X_1 \to X_2$ називають нерозтягуючим, якщо $N_2(f(x), t) \geq N_1(x, t)$ для кожного $x \in X_1$ і кожного $t \in (0, \infty)$. Еквівалентно, $M_2(f(x), f(y), t) \geq M_1(x, y, t)$ для кожних $x, y \in X_1$ і кожного $t \in (0, \infty)$. Легко бачити, що розмиті нормовані простори і їх нерозтягуючі лінійні відображення утворюють категорію. Позначимо цю категорію через $\mathcal{FNS}(*)$.

Для кожного нерозтягуючого лінійного відображення $f\colon X_1 \to X_2$ розмитих нормованих просторів позначимо через $L(f)\colon L(X_1) \to L(X_2)$ відображення, означене формулою $L(f)([A, B]) = [f(A), f(B)]$. Коректність такого означення нескладно показати і ми залишаємо це читачеві.

**Твердження 2.** *Якщо лінійне відображення* $f\colon X_1 \to X_2$ *розмитих нормованих просторів нерозтягуюче, то відображення*

$$L(f)\colon L(X_1) \to L(X_2)$$

*також нерозтягуюче.*

***Доведення.*** Нехай $[A, B] \in L(X_1)$. Тоді з властивостей метрики Гаусдорфа випливає:

$$\begin{aligned} N_{2H}(L(f)([A, B], t)) =& N_{2H}([f(A), f(B)], t) = M_{2H}(f(A), f(B), t) \geq \\ \geq& M_{1H}(A, B, t) = N_{1H}([A, B], t). \end{aligned}$$

□

Легко бачити, що при цьому одержуємо ендофунктор $L$ у категорії $\mathcal{FNS}(*)$. Існує природне перетворення $\eta$ тотожнього функтора $1_{\mathcal{FNS}(*)}$ у функтор $L$. відображення $\eta_X\colon X \to L(X)$ діє за формулою $\eta_X(x) = [\{x\}, \{0\}]$.

Позначимо через $L_p(X)$ множину класів еквівалентності пар опуклих поліедрів, а саме: $L_p(X) = \big\{[\mathrm{conv}(A), \mathrm{conv}(B)] \mid A, B \subset X$ — непорожні скінченні множини$\big\}$. Зрозуміло, що $L_p$ — підфунктор функтора $L$.

На множині $L(X)$ можна означити операцію $\oplus$: нехай $[A, B]$, $[C, D] \in L(X)$, приймемо $[A, B] \oplus [C, D] = [(A + D) \vee (B + C), B + D]$ (див. [6]).

Означимо на добутку $L(X) \times L(X)$ min-норму, породжену означеною вище нормою на співмножниках.

**Лема 4.** *Операція $\oplus$ є нерозтягуючим відображенням з $L(X) \times L(X)$ у $L(X)$.*

З такою операцією множина $L(X)$ стає нормованою граткою.

**Лема 5.** *Нехай $M = \langle [A_1, B_1], \dots, [A_k, B_k] \rangle \subset L_p(X)$. Тоді*

$$\sup M = [(A_1 + B_2 + \dots + B_k) \vee (B_1 + A_2 + B_3 \dots + B_k) \vee$$

$$\vee (B_1 + B_2 + \dots + A_k), B_1 + \dots + B_k].$$

***Доведення.*** Проводиться безпосередніми обчисленнями. □

Вказана вище операція дає змогу означити природне перетворення $\mu$ функтора $L_p^2 = L_p L_p$ в $L_p$; при цьому відображення $\mu_X$ задається так. Нехай $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in L_p^2(X)$, тоді існують $[A_i, C_i], [B_j, D_j] \in L_p(X)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, такі, що $\mathcal{A} = \langle [A_1, C_1], \dots, [A_k, C_k] \rangle$, $\mathcal{B} = \langle [B_1, D_1, ], \dots, [B_l, D_l] \rangle$. Тоді приймаємо

$$\mu_X([\mathcal{A}, \mathcal{B}]) = ([A_1, C_1] \oplus \dots \oplus [A_k, C_k]) + ([D_1, B_1, ] \oplus \dots \oplus [D_l, B_l]).$$

Іншими словами, $\mu_X([\mathcal{A}, \mathcal{B}]) = \max(\mathcal{A}) - \max(\mathcal{B})$.

Для того, щоби показати коректність такого означення природного перетворення, зауважимо, що для кожного нерозтягуючого лінійного відображення $f\colon X_1 \to X_2$ діаграма

$$\begin{tikzcd} L_p^2(X_1) \arrow[r, "L_p^2(f)"] \arrow[d, "\mu_{X_1}"'] & L_p^2(X_2) \arrow[d, "\mu_{X_2}"] \\ L_p(X_1) \arrow[r, "L_p(f)"'] & L_p(X_2) \end{tikzcd}$$

комутативна.

Покажемо, що $\mu_X(\eta_{L_p(X)}) = 1_{L_p(X)}$. Нехай $[A,B] \in L_p(X)$, тоді

$$\mu_X(\eta_{L_p(X)})([A,B]) = \mu_X(\{[A,B]\},\{0\}) = \max\{[A,B]\} - \max\{0\} = [A,B].$$

Покажемо тепер, що $\mu_X L_p(\eta_X) = 1_{L_p(X)}$. Нехай $[A,B] \in L_p(X)$, $A = \langle a_1,\dots,a_k\rangle$, $B = \langle b_1,\dots,b_l\rangle$. Тоді

$$\begin{aligned} &\mu_X L_p(\eta_X)([A,B]) = \mu_X([\langle \eta_X(a_1),\dots,\eta_X(a_k)\rangle, \langle \eta_X(b_1),\dots,\eta_X(b_l)\rangle]) = \\ &= \max\langle \eta_X(a_1),\dots,\eta_X(a_k)\rangle - \max\langle \eta_X(b_1),\dots,\eta_X(b_l)\rangle = \\ &= \max\langle [\{a_1\},\{0\}],\dots,[\{a_k\},\{0\}]\rangle - \max\langle [\{b_1\},\{0\}],\dots,[\{b_l\},\{0\}]\rangle = \\ &= [\langle a_1,\dots,a_k\rangle,\{0\}] - [\langle b_1,\dots,b_l\rangle,\{0\}] = [A,B]. \end{aligned}$$

Нарешті, покажемо, що діаграма

$$\begin{tikzcd} L_p^3(X) \arrow[r, "L_p(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{L_p(X)}"'] & L_p^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ L_p^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & L_p(X) \end{tikzcd}$$

комутативна.

Нехай $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] \in L_p^3(X)$. Тоді $\mu_X\mu_{L_p(X)}[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = \mu_X(\max\mathfrak{A} - \max\mathfrak{B})$ і $\mu_X L_p(\mu_X)[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = \max(\mu_X(\mathfrak{A}) - \mu_X(\mathfrak{B}))$.

Нехай $\mathfrak{A} = \langle [\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1],\dots,[\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_k]\rangle$. Тоді $\max\mathfrak{A} = [\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1] \oplus \dots \oplus [\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_k]\rangle$ і, використовуючи лему 5, одержуємо

$$\begin{aligned} \mu_X \max\mathfrak{A} = &\mu_X([(\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_n) \vee \dots \vee \\ &\vee(\mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{A}_n), \mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_n]) = \\ &= \max((\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_n) \vee \dots \vee (\mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{A}_n)) - \\ &- \max(\mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_n) = ((\max\mathcal{A}_1 + \max\mathcal{B}_2 + \dots + \max\mathcal{B}_n) \oplus \\ &\oplus \dots \oplus (\max\mathcal{B}_1 + \dots + \max\mathcal{B}_{n-1} + \max\mathcal{A}_n)) - \\ &-(\max\mathcal{B}_1 + \dots + \max\mathcal{B}_n) = \\ &=(\max\mathcal{A}_1 + \dots + \max\mathcal{A}_n) - (\max\mathcal{B}_1 + \dots + \max\mathcal{B}_n). \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\max\mu_X(\mathfrak{A}) &= \max\langle\mu_X([\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1]),\dots,\mu_X([\mathcal{A}_k,\mathcal{B}_k])\rangle = \\ &=(\max\mathcal{A}_1-\max\mathcal{B}_1)\oplus\dots\oplus\max\mathcal{A}_k-\max\mathcal{B}_k) = \\ &=(\max\mathcal{A}_1+\dots+\max\mathcal{A}_n)-(\max\mathcal{B}_1+\dots+\max\mathcal{B}_n).\end{aligned}$$

Оскільки аналогічні рівності можна довести і для $\mathfrak{B}$, приходимо до висновку, що наведена вище діаграма комутативна.

Доведене вище можна переформулювати в термінах теорії категорій. Усі необхідні означення можна знайти, наприклад, у книзі [8].

**Теорема 3.** *Трійка $(L_p,\eta,\mu)$ утворює монаду на категорії $\mathcal{FNS}(*)$.*

## 3 Зауваження

Результати цієї статті можна поширити у різних напрямках. Перший з них стосується розмитих 2-нормованих просторів [9]. При цьому розмитою 2-нормою на лінійному просторі $L$, $\dim L \geq 2$, називається функція $N\colon L\times L\times[0,\infty)\to[0,1]$, що задовольняє умови для всіх $x,y,z\in L$ і $s,t\in[0,\infty)$: 1) $N(x,y,0)=0$; 2) $N(x,y,t)=1$ тоді і лише тоді, коли $x,y$ лінійно залежні; 3) $N(x,y,t)=N(y,x,t)$; 4) $N(x+y,z,t\circ s)\geq N(x,z,t)*N(y,z,s)$; 5) функція $N(x,y,\cdot)\colon[0,\infty)\to[0,1]$ неперервна; 6) $N(\alpha x,y,t)=N(x,y,\frac{t}{\varphi(\alpha)})$.

Трійку $(L,N,*)$ при цьому називають 2-нормованим простором. Відображення $N$ називають 2-нормою.

Стосовно інших далеких узагальнень та модифікацій поняття розмитого нормованого простору див., наприклад, [10], де розглядається поняття інтуїціоністського розмитого $n$-нормованого простору.

Замість пар компактних опуклих множин можна розглядати пари замкнених обмежених опуклих множин. Однак відсутність відповідних властивостей розмитої метрики Гаусдорфа для цього випадку не дає нам змоги зараз зробити це узагальнення.

Виникає природна проблема: охарактеризувати категорію алгебр для монади, описаної в теоремі 3. Припускаємо, що ця категорія є категорією розмитих нормованих векторних graток та ізотонних нерозтягуючих лінійних операторів.

Сформулюємо також запитання: чи функтор $L$ є функторіальною частиною монади на категорії $\mathcal{FNS}(*)$?


[1] *Demyanov V.F., Rubinov A.M.* Quasidifferential calculus, Optimization Software Inc., Publications Division, New York, 1986.

[2] *Hörmander L.* Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe // Arkiv Mat. — 1954. — **3**. — P. 181–186.

[3] *Saadati R., Vaezpour S.M.*, Some results on fuzzy Banach spaces // J. Appl. Math. & Computing. — 2005. — **17**, №1-2. — P. 475–484.

[4] *Katsaras A.K.*, Fuzzy topological vector spaces // Fuzzy Sets and Systems. — 1984. — **12**. — P. 143–154.

[5] *Bag T., Samanta T.K.*, Finite dimensional fuzzy normed linear spaces // J. Fuzzy Math. — 2003. — **11**, №3. — P. 687–705.

[6] *Пинскер А.Г.* Пространства выпуклых множеств локально-выпуклого пространства // Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та. — 1966. — **63**. — С. 13–17.

[7] *Rodríguez-López J., Romaguera S.* The Hausdorff fuzzy metric on compact sets // Fuzzy Sets and Systems. — 2004. — **147**, 2. — P. 273–283.

[8] *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces. — Mathematical Studies: Monograph Series, V. 5, Lviv: VNTL Publishers, 1999. — 200 p.

[9] *Goleţ I.* On Generalized Fuzzy Normed Spaces // Inter. Math. Forum. — 2009. — **4**, №25. — P. 1237–1242.

[10] *Vijayabalaji S., Thillaigovindan N., Jun Young Bae.* Intuitionistic fuzzy $n$-normed linear space // Bull. Korean Math. Soc. — 2007. — **44**, №2. — P. 291–308.

[11] *Заричный М.М.* Характеризация функторов $G$-симметрической степени и продолжения функторов на категории Клейсли // Матем. заметки. — 1992. — **52**, №5. — С. 42–48.

## PAIRS OF CONVEX SUBSETS IN FUZZY NORMED SPACES

*Aleksandr SAVCHENKO*

Kherson State Agrarian University,
23 Rozy Lyuksemburg Str., Kherson 73011

e-mail: *savchenko1960@rambler.ru*

The paper is devoted to a counterpart of the construction of the linear space of pairs of compact convex sets in the context of the fuzzy normed spaces. A fuzzy norm on the linear space of pairs of compact convex sets is defined. It is shown that this fuzzy norm on the set of pairs of compact convex sets is generated by the norm described in the paper of Pinsker in the case of fuzzy norm generated by an ordinary norm.

It is also shown that the functor of pairs of convex polyhedra forms a monad on the category of fuzzy normed spaces and nonexpanding linear operators.