НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ЛІВИЙ ДІЛЬНИК ТА НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ ПРАВЕ КРАТНЕ МАТРИЦЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Андрій РОМАНІВ, Володимир ЩЕДРИК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060

e-mail: *shchedrykv@ukr.net*

Редакція отримала статтю 25 березня 2012 р.

Досліджуються властивості найбільшого спільного лівого дільника (н.с.л.д.) та найменшого спільного правого кратного (н.с.п.к.) матриць другого порядку над комутативною областю головних ідеалів. У зв'язку з цим описано форми Сміта цих матриць та вказано їхні перетворювальні матриці. Отримано умови взаємної простоти матриць. Доведено, що добуток визначників н.с.л.д. та н.с.п.к. двох матриць дорівнює добутку їх визначників.

1 Вступ

Нехай R — комутативна область головних ідеалів з $1 \neq 0$ і A та B — матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A є правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця D є правим

УДК: 512.64; MSC 2010: 15A21

Ключові слова і фрази: комутативна область головних ідеалів, найбільший спільний лівий дільник, найменше спільне праве кратне матриць, форма Сміта, перетворювальна матриця

кратним кожного спільного лівого дільника матриць A та B, то матрицю D називають **найбільшим спільним лівим дільником** (н.с.л.д.) матриць A та B (в позначеннях $(A,B)_l$).

Якщо $M = AP = BQ$, то матрицю M називають спільним правим кратним матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця M є лівим дільником кожного спільного правого кратного матриць A та B, то матрицю M називають **найменшим спільним правим кратним** (н.с.п.к.) матриць A та B (в позначеннях $[A,B]_r$).

C. MacDuffee [1] запропонував метод знаходження н.с.л.д. та н.с.п.к. матриць A та B, який ґрунтується на результатах E. Cahen [2] та A. Chatelet [3]. B. M. Stewart [4] показав, що н.с.л.д. та н.с.п.к. матриць A та B визначені однозначно з точністю до правої асоційованості. Найбільш ґрунтовні дослідження н.с.л.д. та н.с.п.к. проводились для поліноміальних матриць. Вони були спрямовані, як на пошук нових методів знаходження таких матриць, зокрема, через побудову певних аналогів результантної матриці, так і на встановлення степеня цих матричних поліномів, роботи [5–8]. Близькими до цієї тематики є дослідження спільних дільників матриць. У зв'язку з цим виділимо роботи [9–11]. Пропонована стаття присвячена вивченню структури н.с.л.д. та н.с.п.к. з точки зору опису їхніх форм Сміта та перетворювальних матриць.

Нехай A, B — неособливі 2×2 матриці над R. Для матриць A та B існують такі оборотні матриці P_A, Q_A, P_B, Q_B, відповідно, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{E}, \text{ де } \mathrm{E} = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ \varepsilon_1\,|\varepsilon_2,$$
$$P_B B Q_B = \Delta, \text{ де } \Delta = diag(\delta_1, \delta_2),\ \delta_1\,|\delta_2.$$

Матриці E та Δ називаються канонічними діагональними формами або ж формами Сміта, а матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B — лівими та правими перетворювальними матрицями матриць A та B, відповідно.

Нехай $a \in R$, $a \neq 0$. Розглянемо множину $\mathbf{G}_a$ всіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ ah_{21} & h_{22} \end{Vmatrix}.$$

Легко переконатись, що $\mathbf{G}_a$ є мультиплікативною групою. Позначимо через $\mathbf{P}_A$ та $\mathbf{P}_B$ множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриць A та B, відповідно. Згідно з результатами робіт [12, 13], $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} P_A$, $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{\delta_1}} P_B$.

2 Допоміжні твердження та факти

Вкажемо деякі властивості найбільшого спільного дільника (н.с.д.) та найменшого спільного кратного (н.с.к.) елементів кільця R. При цьому запис $a|b$ означатиме, що a ділить b. Н.с.д. елементів a та b будемо позначати через (a, b), а їх н.с.к. через $[a, b]$.

Лема 1. *Н.с.д. та н.с.к. елементів кільця R мають такі властивості:*

1) $\left(\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right) = \frac{(a,b)}{(a,b,c)}, \quad a, b \neq 0.$
2) $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right) = \frac{a}{(a,[b,c])}, \quad a, b, c \neq 0.$
3) $\left[\frac{a}{(a,b)}, \frac{a}{(a,c)}\right] = \frac{a}{(a,(b,c))}, \quad a \neq 0.$
4) $\left[\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right] = \frac{[a,b]}{([a,b],c)}, \quad a, b \neq 0.$

Доведення. Маємо

$$\left(\frac{a}{(a,c)}, \frac{b}{(b,c)}\right) = \frac{(a,b)}{(a,b,c)} \left(\frac{(a^2,ab,ac)}{(a^2,ab,c(a,b))}, \frac{(b^2,ab,bc)}{(a^2,ab,c(a,b))}\right).$$

Оскільки

$$\frac{a}{(a,b)} \frac{(a^2,ab,c(a,b))}{(a^2,ab,ac)} = \frac{(a^3,a^2b,ac(a,b))}{(a^2(a,b),ab(a,b),(a,b)ac)} \in R,$$

то $\frac{(a^2,ab,ac)}{(a^2,ab,c(a,b))} \Big| \frac{a}{(a,b)}$. Аналогічно показуємо, що $\frac{(b^2,ab,bc)}{(b^2,ab,c(a,b))} \Big| \frac{b}{(a,b)}$. Із

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1,$$

випливає, що

$$\left(\frac{(a^2,ab,ac)}{(a^2,ab,c(a,b))}, \frac{(b^2,ab,bc)}{(b^2,ab,c(a,b))}\right) = 1.$$

А це означає, що рівність 1) є правильною.

Рівність 2) легко отримується із 1).

Розглянемо добуток

$$\frac{a}{(a,[b,c])}\frac{a}{(a,(b,c))}=\frac{a^2}{(a^2,a\left([b,c],(b,c)\right),bc)}=$$

$$=\frac{a^2}{(a^2,a(b,c),bc)}=\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}.$$

Тоді

$$\left[\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right]=\frac{\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}}{\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right)}.$$

На підставі рівності 2) отримуємо

$$\frac{\frac{a^2}{(a,b)(a,c)}}{\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{a}{(a,c)}\right)}=\frac{\frac{a}{(a,[b,c])}\;\frac{a}{(a,(b,c))}}{\frac{a}{(a,[b,c])}}=\frac{a}{(a,(b,c))}.$$

Рівність 3) доведено. І на завершення зауважимо, що рівність 4) є наслідком 3). □

Нехай P_B та P_A — ліві перетворювальні матриці матриць A та B.

Лема 2. *Нехай $P_BP_A^{-1}=\|s_{ij}\|_1^2=S$. Тоді елемент $\left(\frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1])},s_{21}\right)$ є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B та P_A.*

Доведення. Нехай F_A та F_B інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тобто $F_A\in\mathbf{P}_A$, $F_B\in\mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A\in\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ та $H_B\in\mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{\delta_1}}$, що $F_A=H_AP_A$, $F_B=H_BP_B$. Позначимо $F_BF_A^{-1}=\left\|s'_{ij}\right\|_1^2$. Наше завдання полягає у тому щоб показати, що

$$\left(\frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1])},s_{21}\right)=\left(\frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1])},s'_{21}\right).$$

Розглянемо добуток матриць

$$F_BF_A^{-1}=H_BP_B(H_AP_A)^{-1}=H_BP_BP_A^{-1}H_A^{-1}=H_BSH_A^{-1},$$

де $S=P_BP_A^{-1}$. Позначимо $H_BS=\|k_{ij}\|_1^2$. Оскільки

$$H_B=\left\|\begin{matrix}h_{11} & h_{12}\\ \frac{\delta_2}{\delta_1}h_{21} & h_{22}\end{matrix}\right\|,$$

то

$$k_{21} = \left\| \begin{matrix} \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} s_{11} \\ s_{21} \end{matrix} \right\| = \frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}.$$

Розглянемо

$$\left(k_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right) = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right).$$

Оскільки

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])}{(\varepsilon_2, \delta_2)} = \frac{(\delta_2(\varepsilon_2, \delta_2), \delta_2[\varepsilon_1, \delta_1])}{\delta_1(\varepsilon_2, \delta_2)} \in R,$$

то $\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \Big| \frac{\delta_2}{\delta_1}$. Отже,

$$\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} h_{21} s_{11} + h_{22} s_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right) = \left(h_{22} s_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right).$$

Із оборотності матриці H_B випливає, що $\left(h_{22}, \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) = 1$. Отже, і

$$\left(h_{22}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right) = 1.$$

Таким чином,

$$\left(k_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right) = \left(s_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right).$$

Розглянемо $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^2$. Оскільки $H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\|$, то

$$t_{21} = \left\| \begin{matrix} s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \nu_{11} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nu_{21} \end{matrix} \right\| = s_{21} \nu_{11} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \nu_{21} s_{22}.$$

Зауваживши, що $\frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \Big| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ та застосувавши міркування, аналогічні до щойно проведених, отримуємо

$$\left(t_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right) = \left(s_{21}, \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])} \right).$$

Зваживши на асоціативність кільця $M_2(R)$, завершуємо доведення. $\square$

Лема 3. *Нехай* $S = \|s_{ij}\|_1^2 \in GL_2(R)$*. Для того, щоб матрицю* S *можна було записати у вигляді* $S = L_a L_b$*, де* $L_a \in \mathbf{G}_a$*,* $L_b \in \mathbf{G}_b$*,* $a, b \neq 0$ *необхідно та достатньо, щоб* $(a,b)|s_{21}$*.*

Доведення. Необхідність очевидна.

Достатність. Нехай $s_{21} = (a,b)t$. Із оборотності матриці S випливає, що $((a,b)t, s_{22}) = 1$. На підставі властивості 6 із [14], існують такі k_{12}, k_{22}, для яких $s_{21}k_{12}+s_{22}k_{22} = 1$, де $(k_{22}, b) = 1$. Отже, $(k_{12}b, k_{22}) = 1$. Звідси випливає, що існують такі k_{11}, k_{21}, для яких $k_{11}k_{22} - bk_{21}k_{12} = 1$. Це означає, що матриця $K_1 = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ bk_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}$ належить групі $\mathbf{G}_b$. Тоді

$$SK_1 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ (a,b)t & s_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ bk_{21} & k_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix} = S_1.$$

Отже,

$$\begin{Vmatrix} 1 & -g_{12} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} S_1 = H_1 S_1 = \begin{Vmatrix} q_{11} & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix} = S_2,$$

де $H_1 \in \mathbf{G}_a$. Оскільки матриця S_2 є оборотною, то q_{11} є оборотним елементом кільця R. Тоді

$$\begin{Vmatrix} q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} S_2 = H_2 S_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix},$$

де $H_2 \in \mathbf{G}_a$. Оскільки $H_1, H_2 \in \mathbf{G}_a$, то $H_3 = H_2 H_1 \in \mathbf{G}_a$ і

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ (a,b)g_{21} & 1 \end{Vmatrix} = H_3 S K_1.$$

В кільці R існують такі u та v, що $(a,b)g_{21} = (au+bv)g_{21} = aug_{21}+bvg_{21}$. Розглянемо матриці $H_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ aug_{21} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_a$ та $K_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ bvg_{21} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_b$. Очевидно, що $H_3 S K_1 = H_4 K_2$. Тобто $S = (H_3^{-1}H_4)(K_2 K_1^{-1})$. Зауваживши, що $H_3^{-1}H_4 \in \mathbf{G}_a$, $K_2 K_1^{-1} \in \mathbf{G}_b$, переконуємося у правильності нашого твердження. □

Лема 4. *Нехай* $k = \frac{a}{(a,b)}$*,* $\tau = \frac{k}{(k,s)}$*,* $a, k \neq 0$*. Тоді* $\frac{a}{(a,\tau b)}|s$ *.*

Доведення. Оскільки $\tau = \frac{a}{(a,b)\left(\frac{a}{(a,b)},s\right)} = \frac{a}{(a,(a,b)s)} = \frac{a}{(a,bs)}$, то

$$\frac{a}{(a,\tau b)} = \frac{a}{\left(a, \frac{a}{(a,bs)}b\right)} = \frac{a(a,bs)}{(a(a,bs),ab)} =$$

$$= \frac{(a,bs)}{((a,bs),b)} = \frac{(a,bs)}{(a,b)} = \left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}s\right) = \left(\frac{a}{(a,b)}, s\right).$$

Отже, $\frac{a}{(a,\tau b)}\,|s$, що і потрібно було довести. □

В роботі [13] отримано низку результатів, що стосуються подільності матриць над комутативними областями елементарних дільників. Зауваживши, що комутативна область головних ідеалів належить до класу кілець елементарних дільників, ці результати ми можемо адаптувати до нашого конкретного випадку наступним чином.

Теорема 1. *Нехай матриці A та D мають, відповідно, форми Сміта*

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & \\ & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \\ & \varphi_2 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді для того, щоб $A = DC$ необхідно та достатньо виконання наступних умов:

1. $\varphi_i\,|\varepsilon_i$, $i = 1, 2$;

2. $P_D = LP_A$, де $P_D \in \mathbf{P}_D, P_A \in \mathbf{P}_A, L \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}}$.

Наступне твердження вказує на взаємозв'язок між спільними дільниками матриць.

Лема 5. *Нехай матриці A, B, D, T мають наступні форми Сміта:*

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|, B \sim \left\| \begin{matrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{matrix} \right\|, D \sim \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{matrix} \right\|, T \sim \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|,$$

причому матриці D та T є спільними лівими дільниками матриць A та B. Тоді якщо $\gamma_1|\varphi_1 = (\varepsilon_1,\ \delta_1)$ та $\gamma_2|\varphi_2$, то $D = TN$.

Доведення. Оскільки матриця D є спільним лівим дільником матриць A та B, то з теореми 1 випливає, що

$$P_D = L_A P_A, \text{ де } P_D \in \mathbf{P}_D, P_A \in \mathbf{P}_A, L_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}},$$

а також $P_D = L_B P_B$, де $P_B \in \mathbf{P}_B, L_B \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\delta_1)}}$.

З аналогічних міркувань отримуємо $P_T = K_A P_A$, де $P_T \in \mathbf{P}_T$, $K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}}$, а також $P_T = K_B P_B$, де $K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}}$.
Розглянемо добуток

$$P_T P_D^{-1} = K_A P_A P_A^{-1} L_A^{-1} = K_A L_A^{-1} = \underbrace{\left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)} k_{21} & k_{22} \end{matrix} \right\|}_{K_A} \underbrace{\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|}_{L_A^{-1}}.$$

Тобто $P_T P_D^{-1} = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\right) l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\|$.

На підставі леми 1 (рівність 1))

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\right) = \frac{(\gamma_2,\varphi_2)}{(\gamma_2,\varphi_2,\varepsilon_1)}.$$

Оскільки $\gamma_2 \,|\varphi_2$, то $\frac{(\gamma_2,\varphi_2)}{(\gamma_2,\varphi_2,\varepsilon_1)} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}$. Отже,

$$P_T P_D^{-1} = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} \right\| = M. \tag{1}$$

З іншого боку $P_T P_D^{-1} = K_B P_B P_B^{-1} L_B^{-1} = K_B L_B^{-1}$. Аналогічно показуємо, що

$$P_T P_D^{-1} = \left\| \begin{matrix} \upsilon_{11} & \nu_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)} \nu_{21} & \nu_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} \right\| = M. \tag{2}$$

З рівностей (1) та (2) випливає, що $\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)} \,|m_{21}$ та $\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)} \,|m_{21}$, тобто $\left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}\right] |m_{21}$. Згідно з лемою 1 (рівність 3)),

$$\left[\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varepsilon_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}\right] = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,(\varepsilon_1,\delta_1))}.$$

Оскільки $(\varepsilon_1,\delta_1) = \varphi_1$, то

$$\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,(\varepsilon_1,\delta_1))} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varphi_1)}.$$

Отже, $M \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\varphi_1)}}$. Оскільки, згідно з умовою твердження $\gamma_i|\varphi_i$, $i = 1,2$, то на підставі теореми 1 $D = TN$. Лему доведено. $\square$

Наступне твердження вказує на взаємозв'язок між спільними кратними матриць.

Лема 6. *Нехай матриці A, B, M, F мають наступні форми Сміта:*

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|, B \sim \left\| \begin{matrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{matrix} \right\|, M \sim \left\| \begin{matrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{matrix} \right\|, F \sim \left\| \begin{matrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{matrix} \right\|,$$

причому матриці M та F є спільними правими кратними матриць A та B. Тоді якщо $\omega_1|\tau_1$ та $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2|\tau_2$, то $F = MN$.

Доведення. Оскільки матриця M є спільним правим кратним матриць A та B, то з теореми 1 випливає, що $P_A = L_M P_M$, де $P_A \in \mathbf{P}_A$, $P_M \in \mathbf{P}_M$, $L_M \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$, а також $P_B = L_{M_1} P_M$, де $P_B \in \mathbf{P}_B$, $L_{M_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$. Звідси випливає, що $P_M = L_M^{-1} P_A$ та $P_M = L_{M_1}^{-1} P_B$.

З аналогічних міркувань отримаємо:

$$P_A = L_F P_F, \text{ де } P_F \in \mathbf{P}_F, L_F \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}},$$
$$P_B = L_{F_1} P_F, \text{ де } L_{F_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)}}.$$

Отже, $P_F = L_F^{-1} P_A$ та $P_F = L_{F_1}^{-1} P_B$. Тоді

$$P_F P_M^{-1} = L_F^{-1} P_A P_A^{-1} L_M = L_F^{-1} L_M = \underbrace{\left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)} k_{21} & k_{22} \end{matrix} \right\|}_{L_F^{-1}} \underbrace{\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|}_{L_M},$$

Таким чином,

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)} \right) l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\|.$$

На підставі леми 1 (рівність 2)) отримуємо рівність

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)} \right) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, [\tau_1, \omega_1])}.$$

Оскільки $\omega_1|\tau_1$, то $\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,[\tau_1,\omega_1])} = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}$. А це означає, що

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\| = G. \tag{3}$$

З іншого боку, $P_F P_M^{-1} = L_{F_1}^{-1} P_B P_B^{-1} L_{M_1}^{-1} = L_{F_1}^{-1} L_{M_1}^{-1}$. Аналогічно показуємо, що

$$P_F P_M^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\| = G. \tag{4}$$

З рівностей (3) та (4) випливає, що $\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)} | g_{21}$ та $\frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)} | g_{21}$. Тобто

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)} \right] | g_{21} \,.$$

Згідно з лемою 1 (рівність 4)),

$$\left[\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\tau_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2,\tau_1)} \right] = \frac{[\varepsilon_2,\delta_2]}{([\varepsilon_2,\delta_2],\tau_1)}.$$

Оскільки $[\varepsilon_2,\delta_2] = \omega_2$, то

$$\frac{[\varepsilon_2,\delta_2]}{([\varepsilon_2,\delta_2],\tau_1)} = \frac{\omega_2}{(\omega_2,\tau_1)}.$$

Отже, $G \in \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2,\tau_1)}}$. Оскільки, згідно з умовою твердження $\omega_i | \tau_i$, $i = 1, 2$, то $F = MN$. Лему доведено. $\square$

3 Основні результати. Найбільший спільний лівий дільник матриць

Теорема 2. *Нехай матриці A, B мають наступні форми Сміта:*

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & \\ & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|, B \sim \left\| \begin{matrix} \delta_1 & \\ & \delta_2 \end{matrix} \right\|$$

і $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, де $P_A \in \mathbf{P}_A$, $P_B \in \mathbf{P}_B$. Тоді

$$(A, B)_l = (L_A P_A)^{-1} \Phi = (L_B P_B)^{-1} \Phi,$$

де

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \\ & \varphi_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & \\ & \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{\tau} \end{matrix} \right\|, \tau = \frac{k}{(k, s_{21})}, k = \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2), [\varepsilon_1,\delta_1])},$$

а матриці L_A та L_B задовольняють рівність $L_B^{-1} L_A = P_B P_A^{-1}$ і належать, відповідно, групам $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}}$ та $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\delta_1)}}$.

Доведення. Відразу зауважимо, що згідно з лемою 2 елемент $\tau = \frac{k}{(k,\, s_{21})}$, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Покажемо, що матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна записати у вигляді

$$P_B P_A^{-1} = MN, \tag{5}$$

де $M \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\, \delta_1)}}$, $N \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$, $\varphi_2 = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{\tau}$. Використавши лему 1 (рівність 2)), отримаємо

$$\left(\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}\right) = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, [\varepsilon_1, \delta_1])} = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), \tau[\varepsilon_1, \delta_1])} = \mu,$$

де $\tau = \frac{k}{(k, s_{21})}$, $k = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])}$. Згідно з лемою 4 маємо $\mu \,|s_{21}$. На підставі леми 3 матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна зобразити у вигляді (5).

Отже, $M^{-1} P_B = N P_A$. Перепозначивши $M^{-1} = L_B$, $N = L_A$, отримаємо $(L_A P_A)^{-1} \Phi = (L_B P_B)^{-1} \Phi = D$. Оскільки $\varphi_i | \varepsilon_i$ та $\varphi_i | \delta_i$, $i = 1, 2$, а також врахувавши те, що $L_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$ та $L_B \in \mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$, на підставі теореми 1 отримуємо, що матриця D є спільним лівим дільником матриць A та B.

Нехай $T = P_T^{-1} \Gamma Q_T^{-1}$, де $\Gamma = \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|$, $\gamma_1 \,|\gamma_2$, — інший спільний лівий дільник матриць A та B, тобто $A = TA_1$, $B = TB_1$. Отже, $\gamma_i | \varepsilon_i$ та $\gamma_i | \delta_i$, $i = 1, 2$. Звідси отримуємо, що $\gamma_1 \,|(\varepsilon_1, \delta_1) = \varphi_1$ та $\gamma_2 |(\varepsilon_2,\ \delta_2) = z$. Тобто $\gamma_2 = \frac{z}{x}$. Із рівностей $A = TA_1$, $B = TB_1$ також випливає, що $P_T = K_A P_A$, де $K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, \varepsilon_1)}}$ та $P_T = K_B P_B$, де $K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, \delta_1)}}$. Отже, $K_A P_A = K_B P_B$. Тобто $K_B^{-1} K_A = P_B P_A^{-1}$. Матриця $K_B^{-1} K_A$ має вигляд

$$K_B^{-1} K_A = \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, \delta_1)} u_{21} & u_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, \varepsilon_1)} v_{21} & v_{22} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, \delta_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, \varepsilon_1)}\right) l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\, [\varepsilon_1,\, \delta_1])} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{(\varepsilon_2,\, \delta_2)}{((\varepsilon_2,\, \delta_2),\, [\varepsilon_1,\, \delta_1] x)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{z}{(z,\, tx)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\| = P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 ,$$

де $t = [\varepsilon_1,\ \delta_1]$. Таким чином, $s_{21} = \frac{z}{(z,\ tx)} l_{21}$. Нагадаємо, що $k = \frac{z}{(z,\ t)}$. Тоді

$$(k, s_{21}) = \left(k,\ \frac{z}{(z,\ tx)} l_{21}\right).$$

Тому $\left(k,\ \frac{z}{(z,\ tx)}\right) \mid (k, s_{21})$. Оскільки $\frac{z}{(z,\ tx)} \mid \frac{z}{(z,\ t)} = k$, то

$$\left(k,\ \frac{z}{(z,\ tx)}\right) = \frac{z}{(z,\ tx)} = \frac{\frac{z}{(z,\ t)}}{\left(\frac{z}{(z,\ t)},\ x\right)} = \frac{k}{(k,\ x)}.$$

Отже, $\frac{k}{(k,\ x)} \mid (k, s_{21})$. Тобто існує таке m, що

$$\frac{k}{(k,\ x)} = \frac{(k, s_{21})}{m}\ .$$

Звідси випливає, що

$$\frac{(k,\ x)}{m} = \frac{k}{(k, s_{21})} \in R.$$

Нагадавши, що $\tau = \frac{k}{(k, s_{21})}$ з останньої рівності отримуємо, що $\tau | x$. Отже, $\gamma_2 = \frac{z}{x} \mid \frac{z}{\tau} = \varphi_2$. Оскільки також $\gamma_1 = \varphi_1$, то на підставі леми 5 матриця T є лівим дільником матриці D. Отже, D є найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B. Теорему доведено. □

Позначимо через I одиничну матрицю.

Наслідок 1. *Для того, щоб* $(A, B)_l = I$ *необхідно та досить, щоб*

$$((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1] s_{21}) = 1.$$

Доведення. $(A, B)_l = I$ тоді і лише тоді, коли $\Phi = I$. Тобто $(\varepsilon_2, \delta_2) = \tau$, де $\tau = \frac{k}{(k, s_{21})}$, $k = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])}$. Позначивши, $(\varepsilon_2, \delta_2) = a$ та $[\varepsilon_1, \delta_1] = b$, отримаємо

$$\frac{\frac{a}{(a,b)}}{\left(\frac{a}{(a,b)}, s_{21}\right)} = a.$$

Тоді

$$\frac{a}{(a, (a, b) s_{21})} = \frac{a}{(a, b s_{21})} = a,$$

тобто $(a, b s_{21}) = 1$. Отже, $((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1] s_{21}) = 1$. □

Наслідок 2. *Нехай* $\Gamma = \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \\ & \gamma_2 \end{matrix} \right\|$, $\gamma_1|\gamma_2$, *є спільним дільником форм Сміта матриць* A *та* B. *Для матриць* A *та* B *існує спільний лівий дільник з формою Сміта* Γ *тоді і тільки тоді, коли* Γ *є дільником матриці* $\left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & \\ & \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{\tau} \end{matrix} \right\|$ *(позначення взяті з теореми* 2*).*

Доведення. Випливає з означення н.с.л.д. матриць і теореми 4 із [13].

□

4 Найменше спільне праве кратне матриць

Теорема 3. *Нехай матриці* A, B *мають наступні форми Сміта:*

$$A \sim \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & \\ & \varepsilon_2 \end{matrix} \right\|, B \sim \left\| \begin{matrix} \delta_1 & \\ & \delta_2 \end{matrix} \right\|$$

і $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, *де* $P_A \in \mathbf{P}_A$, $P_B \in \mathbf{P}_B$. *Тоді*

$$[A, B]_r = (L_2 P_A)^{-1}\Omega = (L_1 P_B)^{-1}\Omega,$$

де

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \omega_1 & \\ & \omega_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} [\varepsilon_1, \delta_1]\tau & \\ & [\varepsilon_2, \delta_2] \end{matrix} \right\|,$$

$$\tau = \frac{k}{(k, s_{21})}, k = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1])},$$

а матриці L_2 *та* L_1 *задовольняють рівність* $L_1^{-1} L_2 = P_B P_A^{-1}$ *і належать, відповідно, групам* $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$ *та* $\mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$.

Доведення. Відразу зауважимо, що згідно з лемою 2 елемент $\tau = \frac{k}{(k, s_{21})}$, а отже, і матриця Ω не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Покажемо, що матрицю $P_B P_A^{-1}$ можна записати у вигляді

$$P_B P_A^{-1} = KT, \tag{6}$$

де $K \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$, $T \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$, $\omega_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]\tau$. Використавши лему 1 (рівність 1)), отримаємо

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \omega_1)}, \frac{\delta_2}{(\delta_2, \omega_1)} \right) = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{(\varepsilon_2, \delta_2, \omega_1)} = \frac{(\varepsilon_2, \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1]\tau)} = \mu,$$

де $\tau = \frac{k}{(k,s_{21})}$, $k = \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),[\varepsilon_1,\delta_1])}$. Згідно з лемою 4 отримуємо $\mu|s_{21}$. На підставі леми 3 матрицю $P_BP_A^{-1}$ можна зобразити у вигляді (6). Отже,

$$K^{-1}P_B = TP_A.$$

Перепозначивши $K^{-1} = L_1$, $T = L_2$, отримаємо $(L_2P_A)^{-1}\Omega = (L_1P_B)^{-1}\Omega = M$. Оскільки $\varepsilon_i|\omega_i$ та $\delta_i|\omega_i$, $i = 1, 2$, а також врахувавши те, що $L_2^{-1} \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\omega_1)}}$ та $L_1^{-1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\omega_1)}}$ на підставі теореми 1 приходимо до висновку, що матриця M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай $F = P_F^{-1}\Upsilon Q_F^{-1}$, де $\Upsilon = \begin{Vmatrix} \tau_1 & \\ & \tau_2 \end{Vmatrix}$, $\tau_1|\tau_2$, — інше спільне праве кратне матриць A та B. Тобто $F = AA_2$, $F = BB_2$. Отже, $\varepsilon_i|\tau_i$ та $\delta_i|\tau_i$, $i = 1, 2$. Звідси випливає, що $[\varepsilon_2, \delta_2] = \omega_2|\tau_2$ та $[\varepsilon_1, \delta_1]|\tau_1$. Тобто $\tau_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]x$. Окрім того, $P_A = K_AP_F$, де $K_A \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\, \tau_1)}}$ та $P_B = K_BP_F$, де $K_B \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2,\, \tau_1)}}$. Тобто $P_F = K_A^{-1}P_A$ і $P_F = K_B^{-1}P_B$. Отже, $K_BK_A^{-1} = P_BP_A^{-1}$. Матриця $K_BK_A^{-1}$ має вигляд

$$K_BK_A^{-1} = \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \frac{\delta_2}{(\delta_2,\, \tau_1)}u_{21} & u_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\, \tau_1)}v_{21} & v_{22} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{(\varepsilon_2,\delta_2)}{((\varepsilon_2,\delta_2),\, \tau_1)}l_{21} & l_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{z}{(z,\, tx)}l_{21} & l_{22} \end{Vmatrix} = P_BP_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2\,,$$

де $z = (\varepsilon_2, \delta_2)$, $t = [\varepsilon_1,\ \delta_1]$. Таким чином, $s_{21} = \frac{z}{(z,\, tx)}l_{21}$. Провівши міркування аналогічні до тих, що були зроблені при доведенні теореми 2 показуємо, що $\omega_1|\tau_1$. Оскільки також $\omega_2|\tau_2$, то на підставі леми 6 матриця M є лівим дільником матриці F. Таким чином, M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B. Теорему доведено. □

Із теорем 2 та 3 випливає, що деякі властивості елементів кільця R успадковуються матрицями над R.

Наслідок 3.
$$\det[A, B]_r\ \det(A, B)_l = \det(AB).$$

Наслідок 4. *Якщо* $(A, B)_l = I$, *то* $\det[A, B]_r = \det(AB)$.

[1] *MacDuffee C.C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**. — P. 570–573.

[2] *Cahen E.* Théorie des Nombres, I. Paris: Hermann. — 1914.

[3] *Chatelet A.* Groupes Abéliens Finis. Paris: Gauthier-Villars. — 1924.

[4] *Stewart B.M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — **55**, №6. — P. 587–591.

[5] *Barnett S.* Regular greatest common divisor of two polynomial matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1972. — **72**. — P. 161–165.

[6] *Bitmead R.R., Kung S.Y., Anderson O., Kailath T.* Greatest common divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1978. — **23**, №6. — P. 1043–1047.

[7] *Barnett S.* Greatest common divisors from generalized Sylvester resultant matrices // Linear and Multilinear Algebra. — 1980. — **8**. — P. 271–279.

[8] *Gohberg I., Kaashoek M.A., Lerer L., Rodman L.* Common multiples and common divisors of matrix polynomials, I // Indiana University Math. J.. — 1981. — **30**, №3. — P. 321–356.

[9] *Yang C., Li B.* Right greatest common divisor of matrices over an Euclidean ring // Shandong Univ. Nat. Sci. — 2002. — **37**, №4. — P. 292–294.

[10] *Джалюк Н.С., Петричкович В.М.* Про спільні унітальні дільники многочленних матриць із заданою канонічною діагональною формою // Мат. методи та фіз.- мех. поля. — 2002. — **45**, №3. — С. 7–13.

[11] *Прокіп В.М.* Про спільні дільники матриць над факторіальними областями //Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — **48**, №4. — С. 43–50.

[12] *Зелиско В.Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех.поля. — 1980. — **12**. — С. 14–21.

[13] *Shchedryk V.P.* Factorization of matrices over elementary divisor rings // Algebra and Discrete Math. — 2009. — **2**. — P. 79–98.

[14] *Schedryk V.P.* Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B-domain // Algebra and Discrete Math. — 2005. — №2. — P. 46–57.

THE GREATEST COMMON LEFT DIVISOR AND THE LEAST COMMON RIGHT MULTIPLE OF SECOND ORDER MATRICES

Andriy ROMANIV, Volodymyr SHCHEDRYK

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

e-mail: *shchedrykv@ukr.net*

The properties of the greatest common left divisor (g.c.l.d.) and the least common right multiple (l.c.r.m.) of second order matrices over commutative principal ideal domain are investigated. In this regard, we describe Smith normal forms and transforming matrices of these matrices. The conditions of relatively left prime of matrices are received. It is proved that the product of determinants of g.c.l.d. and l.c.r.m. of two matrices is equal to product of the matrices determinants.