МОДЕЛЮВАННЯ СУБТРАКТИВНО-АДИТИВНОГО СПОСОБУ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФОРМИ ІНФОРМАЦІЇ

Любомир ПЕТРИШИН

AGH University of Science and Technology,
ul. Gramatyka 10, Cracow 30-067, Poland

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018, Україна

e-mail: *L.B.Petryshyn@gmail.com*

Редакція отримала статтю 4 травня 2012 р.

Проаналізовано властивості адитивних позиційних систем кодування, визначено недоліки їх застосування в прикладних задачах перетворення форми інформації. Охарактеризовано принцип субтрактивно-адитивного двійкового перетворення як спосіб зменшення кількості операцій зрівноваження. Наведено кількісні результати порівняльної оцінки ефективності запропонованого методу. Визначено перспективу застосування трійкових субтрактивно-адитивних способів зрівноваження.

1 Вступ

Функціонування довільної інформаційної системи ґрунтується на перетвореннях форми інформації та повідомлень. Системна функція перетворення форми інформації є одним з прикладних застосувань теорії кодування. Характер джерела та специфіка первинного перетворення інформації є вирішальними при формуванні коду первинного та

УДК: 519.6, 519.712.3, 519.72; MSC 2010: 94A15, 94A17, 94A29
Ключові слова і фрази: математична модель, система числення, субтрактивно-адитивний спосіб, оптимальне зрівноваження

наступних системних перетворень повідомлень. Вибір коду перетворення визначає ефективність перетворення та кількісні характеристики потоку даних, що є визначальним при здійсненні інформаційного обміну, а вибір системи числення – затрати обчислювальної потужності та часу цифрової обробки. Розрізняють дві основні групи методів позиційного та непозиційного кодування [1, 2]. Предметом представлених в матеріалі результатів досліджень, як показано нижче, є позиційні системи, зокрема, підклас субтрактивно-адитивних систем, тому аналіз непозиційних методів кодування опущено. Ефективність кодування інформації визначається кількісними характеристиками інформаційної оцінки потоку джерела, які залежать від вибору основи системи числення [1, 3]. Як показують результати аналізу [4, 5], в класі позиційних систем трійкове числення володіє максимальною щільністю запису чисел. Практика застосування трійкового кодування довела високу надійність та ефективність цифрових перетворень даних [6], проте її широке впровадження в системи обробки даних в 60-тих роках минулого століття стримувалось технологічними можливостями електронних засобів щодо реалізації операцій трійкової логіки та арифметики. Сучасна мікроелектронна технологія дозволяє будувати тристабільні логічні елементи із четвертим станом високого опору [7], що спонукало продовження досліджень в напрямку розробки та впровадження трійкових комп'ютерів, зокрема нових принципів кодування та логічно-арифметичної обробки, які полягали на симетруванні класичного методу представлення трійкових кодів [5]. Отримані позитивні властивості в порівнянні з класичними позиційними системами числення зумовили актуальність досліджень в напрямку розробки та застосування нових методів представлення чисел в трійковому кодуванні. Результати аналізу можливостей розрядного впорядкування в позиційних системах дозволили розробити та обґрунтувати ефективність застосування способу субтрактивно-адитивного представлення чисел в симетричному трійковому численні. Проаналізуємо основи такого представлення даних, його властивості, переваги та недоліки в порівнянні з відомими системами числень.

2 Натуральна форма позиційного запису чисел

Позиційна нотація ґрунтується на відомій теоремі про однозначність запису довільного числа, яку доводять методом математичної індукції [8]:

Теорема 1. *Для довільних натуральних чисел k та q існують такі єдині $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ та $r \in \{0, 1, 2, \ldots q-1\}$, що $k = m \times q + r$.*

Для випадку позиційного числення число q є основою системи числення, добуток $m \times q$ можна подати у вигляді $m \times q^1$, а число r може бути представлене як $r \times q^0$, внаслідок чого теорема 1 трансформується до наступної:

Теорема 2. *Для довільних натуральних чисел k та q існують такі єдині $m \in \{\ldots 2, 1, 0\}$ та $r \in \{q-1, \ldots 2, 1, 0\}$, що $k = m \times q^1 + r \times q^0$.*

Проте, за умови $m \geq q$ здійснюється перехід через модуль $q^2 = q \times q$, із формуванням залишку $m \times q^1 + r \times q^0$. При цьому проявляється обмеження на значення числа $m \in \{q-1, \ldots 2, 1, 0\}$ аналогічно значенням числа $r \in \{q-1, \ldots 2, 1, 0\}$. Це дозволяє замінити число m на числовий ряд $r_i \in \{q-1, \ldots 2, 1, 0\}$ розрядних коефіцієнтів, в яких індекс i вказує порядковий номер позиції розряду із значенням ваги q^i. Внаслідок цього теорему про однозначність запису можна записати так:

Теорема 3. *Для довільних натуральних чисел k та q існують такі єдині $r_i \in \{q-1, \ldots 2, 1, 0\}$, що $k = r_{n-1} \times q^{n-1} + \ldots + r_1 \times q^1 + r_0 \times q^0$, де $n \in \{\ldots, 2, 1\}$.*

Змінимо формулювання теореми на таке:

Теорема 4. *Для довільних натуральних чисел k та $q \in \{\ldots, 2, 1\}$, існують такі єдині $n \in \{\ldots, 2, 1\}$ та $r_i \in \{q-1, \ldots 2, 1, 0\}$, що*

$$k = r_{n-1} \times q^{n-1} + r_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + r_i \times q^i + \ldots + r_1 \times q^1 + r_0 \times q^0.$$

Отримано формулу натурального адитивного запису довільного числа k в позиційних системах із основою числення q та розрядністю кодового слова n як суми добутків $r_i \times q^i$ (рис. 1).

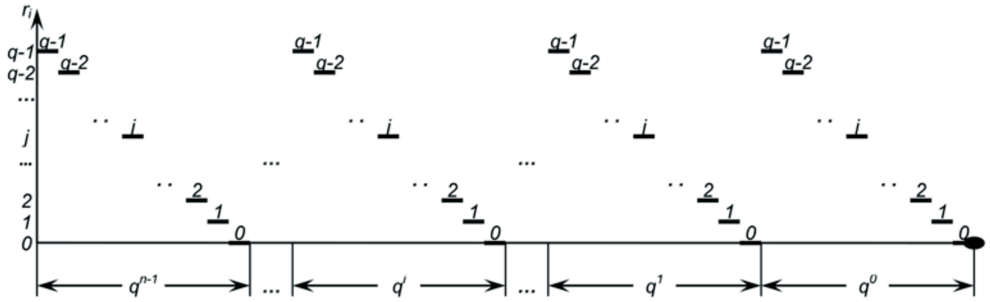

Рис. 1. Спосіб адитивного формування вагової суми добутків $r_i \times q^i$ числа k

На рис. 2 зображено процес формування значень чисел k у вигляді вагової суми $\sum r_i \times q^i$.

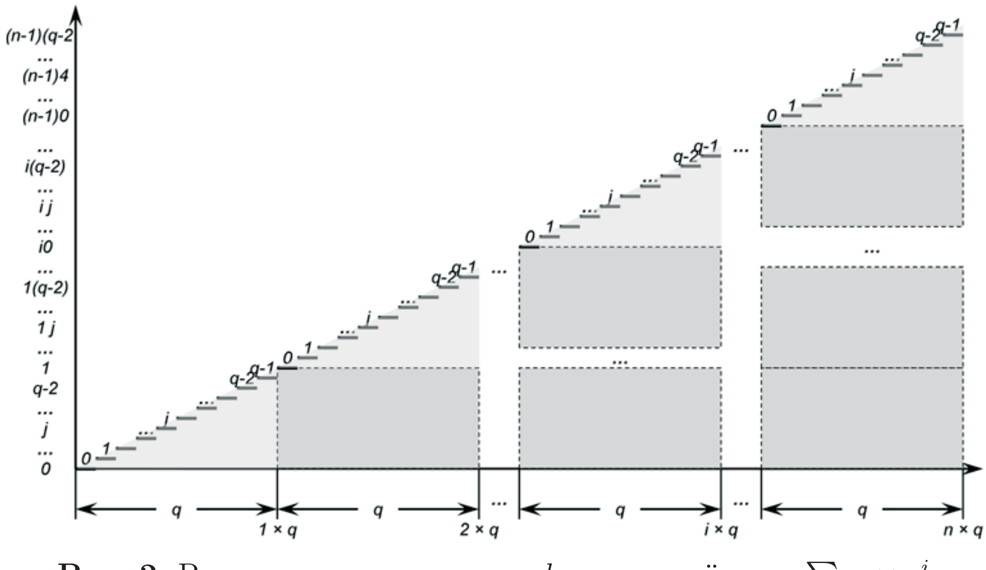

Рис. 2. Розгортка значень чисел k як вагової суми $\sum r_i \times q^i$.

Способи кодування повідомлень в таких позиційних системах первинного перетворення, як унітарна та розрядно-позиційна, передбачають формування повнорозрядних k-бітових слів даних, які володіють максимальною надлишковістю, характеризують методи паралельного перетворення повідомлень, не стосуються аналізованої теми і є матеріалом окремих досліджень [9]–[11], тому детальний опис їх властивостей опустимо. Проаналізуємо, як здійснюється адитивне та субтрактивно-адитивне перетворення в найбільш поширений в практиці цифрових обчислень позиційний двійковий код, а також перехід до субтрактивно-адитивного трійкового числення.

3 Основи двійкового субтрактивно-адитивного числення

На рис. 3 зображено повний набір двійкових ваг, сума компонент яких по вертикалі дозволяє адитивно представити довільне число k. Як можна зауважити, зображення має фрактальний характер подвоєння складності структурної організації розрядних складових при переході від молодших до старших розрядів двійкової вагової мережі q^i і збільшенні значення числа k.

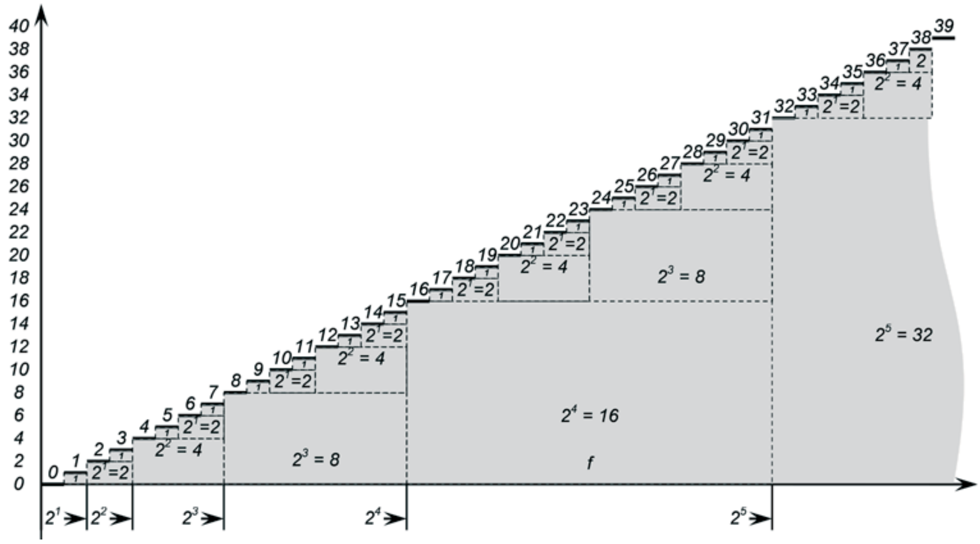

Рис. 3. Розгортка значень чисел k як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$

У практиці математичного моделювання процесів перетворення та кодування повідомлень застосовується метод моделювання процесів зрівноваження невідомого вантажу за допомогою системи мір на звичайній шальковій вазі чи терезах, як найбільш наочний. Такий метод моделювання застосовано в подальшому викладі отриманих результатів здійсненого аналізу. Процедура класичного адитивного перетворення довільного значення числа k в двійковий код на прикладі зважування полягає у виконанні ітераційних процедур зрівноваження вантажу невідомої маси, кількісно вираженої числом k за допомогою набору мір, значення мас яких становлять степеневий ряд основи числення – двійки.

Проаналізуємо алгоритми адитивного оптимізованого зважування на прикладі двійкового числення, які зводяться до двох способів перетворення повідомлень. Згідно з першим, двійкові міри докладаються від найменшого із значень маси 2^0 до найбільшого 2^{n-1} за

$$t'_n = 1 + 2 + \ldots + n$$

ітераційних кроків. Згідно з другим, — від старшого 2^{n-1} до молодших значень мас за $t''_n = 2(n-1)$ ітераційних кроків із наступним ітераційним зрівноваженням, як результатом визначення одиничних та нульових значень розрядів 2^i двійкового коду перетворення. Складність перетворення в адитивних системах полягає у визначенні ваги старшого значущого розряду, для якого $r_i = 1$ в форматі n-розрядного коду. На початку не відомо значення чи розрядність числа k, що передбачає можливість здійснення багатьох надлишкових операцій зважування, тому слід перед початком процесу перетворення визначити k чи задати діапазон його можливих значень $(2^{n-1}, \ldots, 0)$. В подальших прикладах та графічних моделях приймемо значення розрядності двійкового коду $n = 6$ для діапазону $k \in \{63, \ldots, 2, 1, 0\}$. Згідно з першим алгоритмом, здійснюється докладання мір в зростаючому порядку їх значень за чергою, розпочинаючи з молодшого розрядного значення маси 2^0, 2^1, ... до моменту зрівноваження чи переваження сторони тягарців, або ж до максимально можливого значення старшого розряду 2^{n-1}. Можливим також є випадок зрівноваження на першому ж ітераційному кроці для значення $k = 32$, імовірність попадання якого становить $p = 1/2^n$. Більшу імовірність мають кодові комбінації із довільним складом одиниць та нулів в кодовому слові, для яких необхідно здійснювати ітераційне знімання-докладання мір до моменту зрівноваження. Проаналізуємо граничний випадок із значенням двійкового коду 101010_2 для $k = 42_{10}$, який потребує максимально можливої кількості операцій зважування. Доклавши всі міри, отримуємо максимальне значення $k = 63_{10}\,(111111_2)$ і, оскільки $k = 42 < 63_{10}$, то здійснюємо подальші ітераційні операції по зрівноважуванню шляхом чергового знімання-докладання мір діапазону в черговості $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, як це показано на рис. 4. З метою уникнення повторень проаналізованих комбінацій дзеркально відображених кодів, зрівноваження продовжується в тому самому порядку від молодших значень 2^0 до старших 2^5. Максимальною щодо кількості кроків зрівноваження є послідовність ітераційних змін станів всіх шести мір від 2^0 до 2^5 для значення $k = 42_{10}(101010_2)$ на 21-му $(1 + 2 + \ldots + n)$ ітераційному кроці.

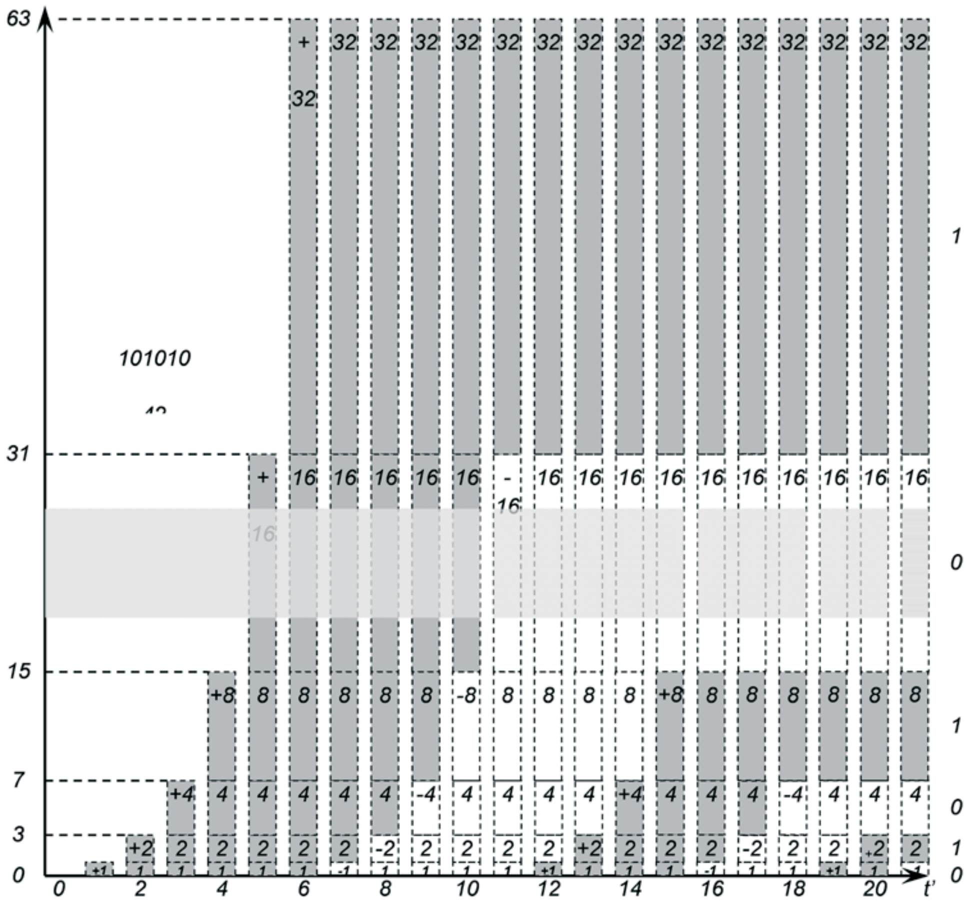

Рис. 4. Перебіг процесу визначення числа k як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$ в порядку зрівноваження від молодших значень 2^0 до старших 2^{n-1}.

Як показує практика перетворення форми інформації, більш ефективним є алгоритм ітераційного зрівноважування шляхом докладання двійкових ваг в порядку від старших значень 2^{n-1} до молодших 2^0, який знайшов широке застосування в практиці аналого-цифрового перетворення повідомлень. Рис. 5 демонструє граничний випадок із максимально можливою для цього алгоритму кількістю ітераційних кроків зрівноваження $2 \times (n-1) = 2 \times (6-1) = 10, (n=6)$ для значення числа $k = 1_{10}(000001_2)$. Перебіг ітераційного процесу додавання $(+)$ чи віднімання $(-)$ значень розрядних двійкових мір зображено на рис. 5 а), а отримані значущі коефіцієнти та відповідні їм значення міри показано на рис. 5 б).

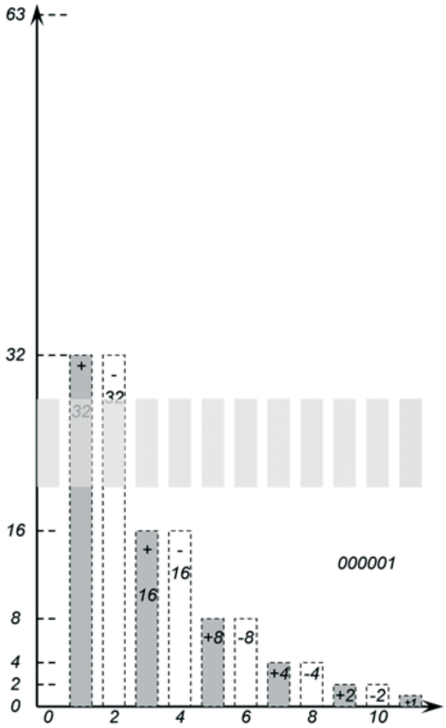

Рис. 5 а) Перебіг максимально тривалого процесу перетворення значення числа k як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$ в порядку зрівноваження від старших значень 2^{n-1} до молодших 2^0.

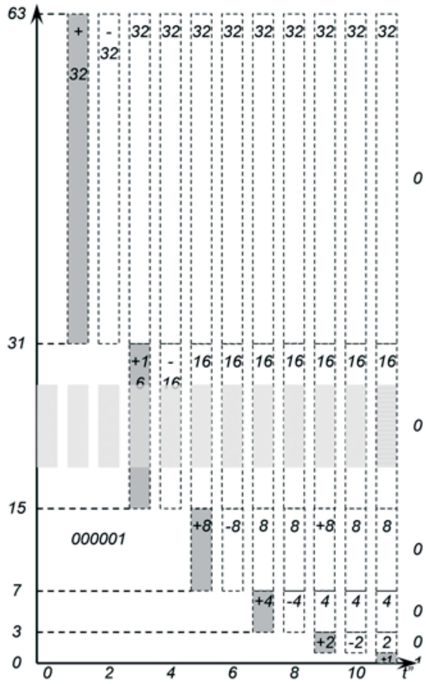

Рис. 5 б) Формування значень розрядних коефіцієнтів 000001 двійкових ваг.

На рис. 6 наведено приклад ітераційного перетворення за $n = 6$ кроків значення $k = 63_{10} = 111111_2$, як одного з випадків формування суми ваг всіма одиничними розрядними бітами.

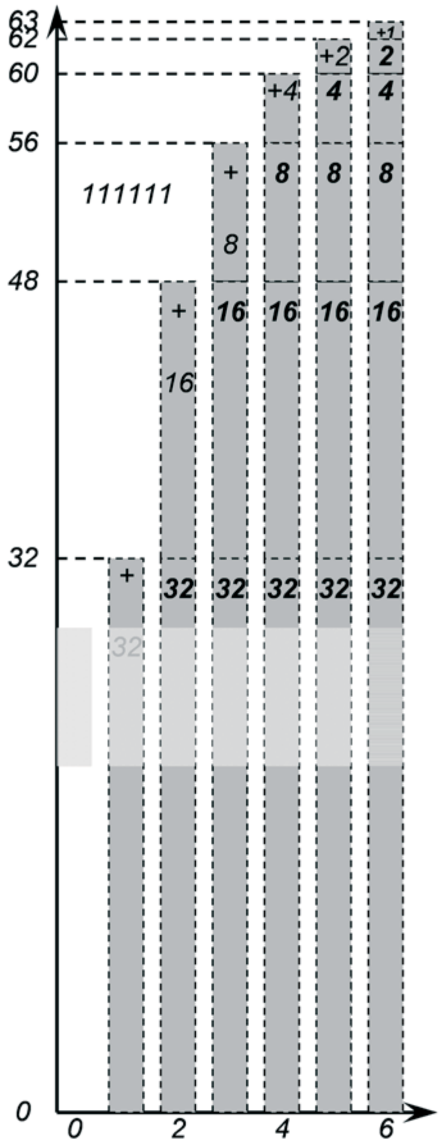

Рис. 6 а) Перебіг процесу перетворення значення числа $k = 63$ як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$ із порядком зрівноваження від старших значень 2^{n-1} до молодших 2^0.

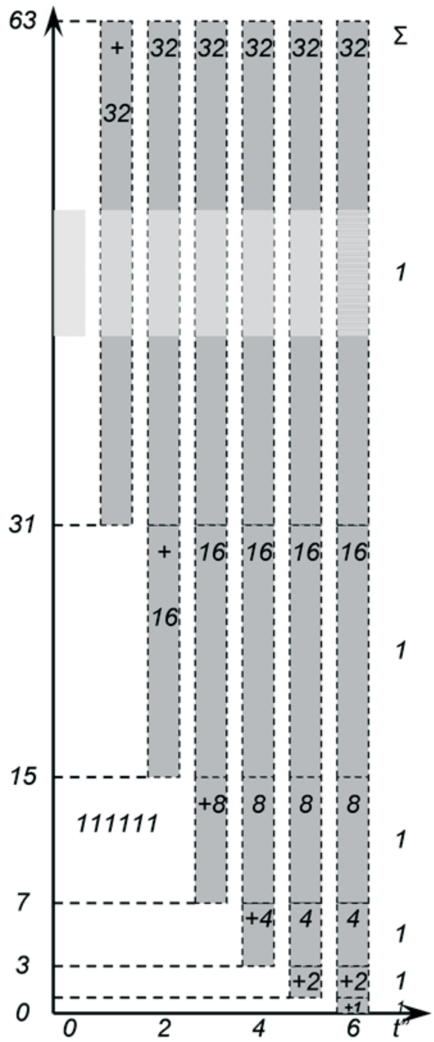

Рис. 6 б) Формування значень розрядних коефіцієнтів 111111 двійкових ваг.

На рис. 7 наведено приклад перетворення чисел із набором одиниць та нулів, як найбільш імовірних двійкових кодів перетворення.

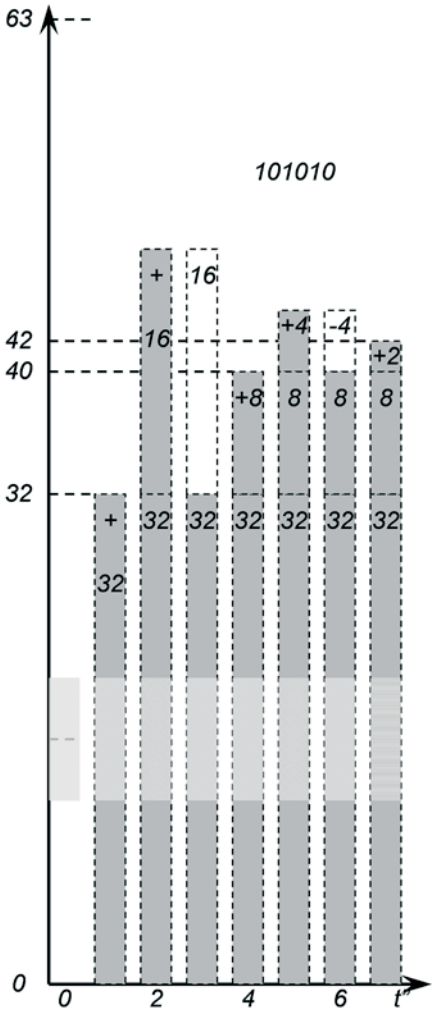

Рис. 7 а) Перебіг процесу визначення числа $k = 42$ як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$ в порядку зрівноваження від старших значень 2^{n-1} до молодших 2^0.

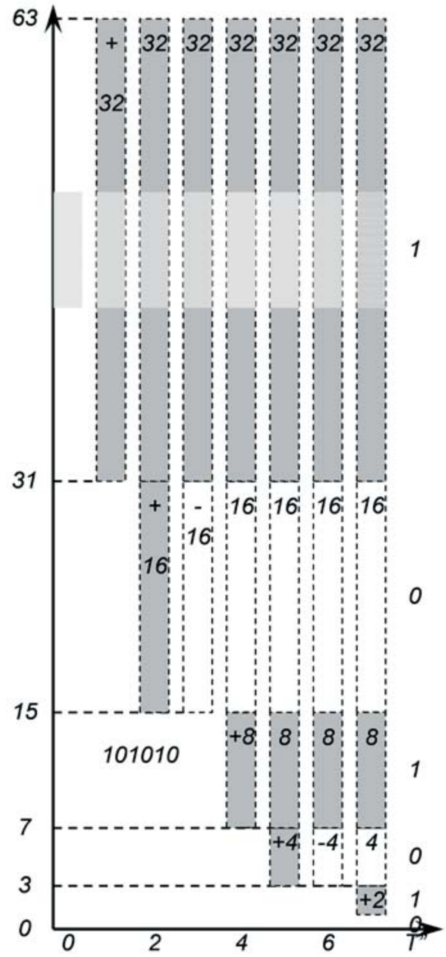

Рис. 7 б) Формування значень розрядних коефіцієнтів 101010 двійкових ваг.

На відміну від попереднього, останній метод на кожному ітераційному кроці дозволяє виконання двох операцій додавання чи віднімання, внаслідок чого досягається краща збіжність при визначенні старшого значущого розряду двійкового коду перетворення. Для повного набору 2^n двійкових кодів кількість ітерацій перетворення t''_n знаходиться в межах від 1 до $2 \times (n - 1)$. Ефективність методу визначається відношенням кількостей процедур перетворення для обох методів

$$ef = t'_n/t''_n = (1+2+\ldots+n)/2(n-1)$$

і дозволяє визначити, що другий алгоритм є швидшим у 2–8 і більше разів в залежності від розрядності коду перетворення (табл. 1). В класі адитивних методів перетворення проаналізований алгоритм є оптимальним.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів ефективності ef застосування адитивних алгоритмів зрівноваження

n	2	4	6	8	12	16	24	32
t'_n	3	10	21	38	78	136	300	528
t''_n	2	6	10	14	22	30	46	66
ef	1,5	1,67	2,1	2,7	3,5	4,5	6,5	8

4 Основи двійкового субтрактивно-адитивного числення

Виникає природне запитання: чи можна ще зменшити кількість ітераційних кроків процесу зрівноваження, зменшивши кількість операцій додавання-віднімання значень розрядних ваг 2^i? Відповідь на це питання полягає у зміні дисципліни зважування і здійсненні субтрактивно-адитивного визначення кожного із значень ваг 2^i, принципова відмінність якого ґрунтується на можливості розміщення мір не тільки по стороні, протилежній до розташування вантажу невідомої маси, еквівалентної числу k (адитивне зрівноваження), але і по стороні самого вантажу, здійснюючи (субтрактивне) віднімання суми таких значень 2^i по стороні вантажу від суми значень 2^i зрівноваження, сформованих адитивно по протилежній стороні вантажу. Запропонований метод передбачає здійснення тільки операцій чергового докладання розрядних двійкових значень мір 2^i від старшого 2^{n-1} до молодшого 2^0 по обох сторонах ваги без необхідності їх знімання, що дозволяє зменшити кількість таких операцій щонайменше в два рази, звести їх кількість до n і, відповідно, підвищити щонайменше в два рази швидкодію зрівноваження в порівнянні з адитивними методами. Аналіз та виклад узагальнимо за аналогією з попереднім матеріалом для прикладу $n = 5$. Оскільки здійснюється принцип субтрактивно-адитивного зрівноваження, простір числових значень перетворення розбивається на дві області додатних та від'ємних значень. Природним є на першому ітераційному кроці здійснити зважування вантажу невідомої маси шляхом встановлення міри максимально можливого двійкового значення $q^{n-1} = 2^{n-1}$ на шальку по протилежній стороні до сторони встановлення вантажу. Наступні ітераційні кроки зважування здійснюються шляхом докладання (без жодного знімання) почергово мір із вагами кожного наступного молодшого двійкового розряду по стороні протилежній до тієї, що переважила, як це зображено на трьох прикладах (рис. 8).

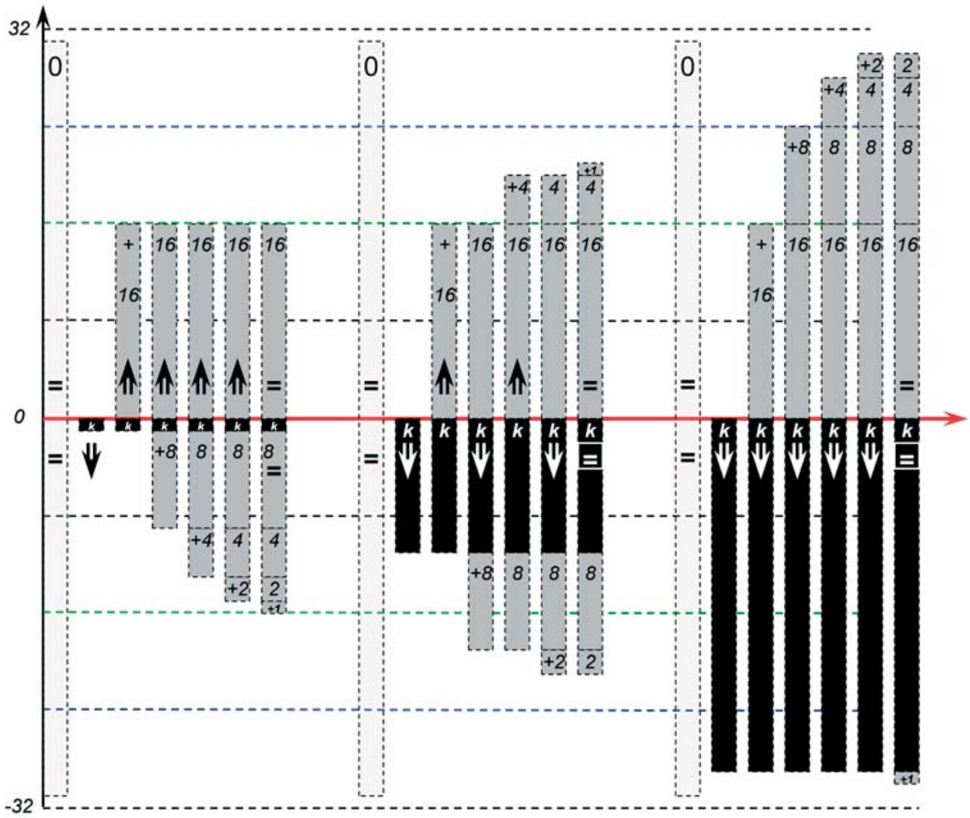

Рис. 8. Перебіг процесу зрівноваження числа k як двійкової субтрактивно-адитивної вагової суми $\sum r_i \times 2^i$, $r_i \in \{0, \pm 1\}$, із початком зрівноваження від старших значень 2^{n-1} до молодших 2^0.

Початкове зрівноваження здійснюється мірою із значенням маси, еквівалентної значенню старшого розряду 2^{n-1} двійкового коду перетворення. Надалі ця міра залишається на шальці по стороні, протилежній до розміщення невідомого вантажу до закінчення процесу зрівноваження. Сам процес зрівноваження полягає у докладанні по стороні вантажу такого набору мір, сума значень яких є доповненням до різниці 2^{n-k}. На рис. 9 нижче на осі абсцис зображено значення мір старшого порядку двійкового коду, що розташовуються по протилежній стороні вантажу, та вище осі, над числовими значеннями k, — сумарні значення мір, які зрівноважують вантаж то стороні вантажу.

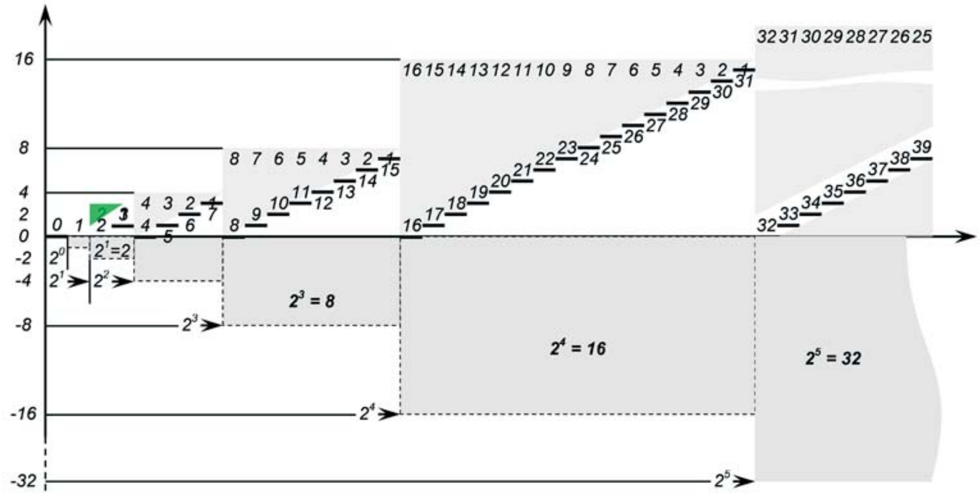

Рис. 9. Субтрактивно-адитивне зрівноваження значень чисел k як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$.

Кінцеві стани субтрактивно-адитивного тільки по одному старшому значенню міри $q = 2^{n-1}$ зрівноваження вантажу, числовий еквівалент маси якого виділений чорним кольором, із значеннями $k_i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ зображено на рис. 10. Така специфіка, як перший крок переходу до повного субтрактивно-адитивного перетворення, передбачає субтрактивне зрівноваження тільки однієї міри маси $q = 2^{n-1}$, проте наочно показує принцип субтрактивно-адитивного перетворення. На рис. 10 весь діапазон можливих значень кодів перетворення розділено на дві частини: нижню, що відповідає стороні розташування вантажу невідомої маси, та верхню частину, що відповідає протилежній стороні зрівноваження вантажу.

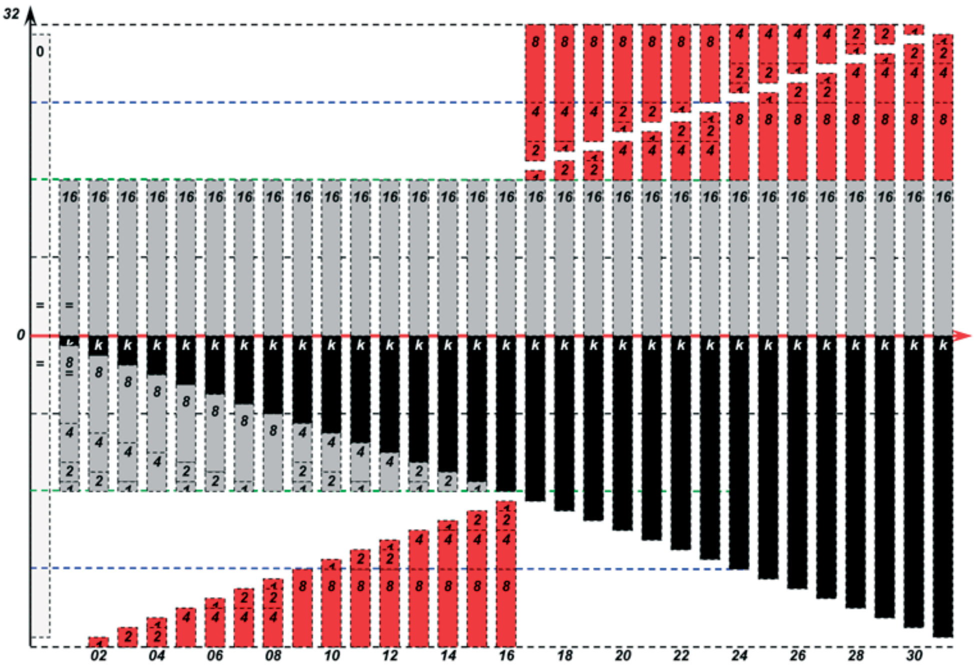

Рис. 10. Субтрактивно-адитивне перетворення значення числа k із субтрактивним зрівноваженням однієї міри $q = 2^{n-1} = 16$ як двійкової вагової суми $\sum r_i \times 2^i$, $r_i \in \{0, \pm 1\}$, мірами в порядку від старших значень 2^{n-1} до молодших 2^0.

Істотність процесу перетворення полягає в ітераційному зрівноваженні за умови фіксування розташування по протилежній стороні значення ваги тільки однієї міри. По стороні вантажу, в процесі збільшення його маси до еквіваленту $q = 2^{n-1}$ здійснюється адитивне доповнення маси k сумою мір $\sum 2^i = 2^{n-1} - k$. Для значень $k > 2^{n-1}$ здійснюється адитивне додавання двійкових значень мір на шальку протилежної сторони розташування вантажу до моменту зрівноваження

$$k = 2^{n-1} + \sum 2^i.$$

Нижче зображено кодові комбінації такого зрівноваження для $k_i \in \{0, 1, \ldots, 2^5 - 1\} = \{0, 1, \ldots, 31\}$.

k={(0=00000$_2$)=00000}=(00+(0+0+0+0))−(0+0+0+0)=00−00; R∈{16,8,4,2,1}=15

k={(1=00001$_2$)=1$\underline{1111}$}=(16+(0+0+0+0))−(8+4+2+1)=16−15; R∈{0,0,0,0}=00

k={(2=00010$_2$)=1$\underline{111}$0}=(16+(0+0+0+0))−(8+4+2+0)=16−14; R∈0,0,0,1=01

$k=\{(3=00011_2)=1\underline{11}0\underline{1}\}=(16+(0+0+0+0))-(8+4+0+1)=16-13;\ R\in\{0,0,2,0\}=02$

$k=\{(4=00100_2)=1\underline{11}00\}=(16+(0+0+0+0))-(8+4+0+0)=16-12;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$k=\{(5=00101_2)=1\underline{1}0\underline{11}\}=(16+(0+0+0+0))-(8+0+2+1)=16-11;\ R\in\{0,4,0,0\}=04$

$k=\{(6=00110_2)=1\underline{1}0\underline{1}0\}=(16+(0+0+0+0))-(8+0+2+0)=16-10;\ R\in\{0,4,0,1\}=05$

$k=\{(7=00111_2)=1\underline{1}00\underline{1}\}=(16+(0+0+0+0))-(8+0+0+1)=16-09;\ R\in\{0,4,2,0\}=06$

$k=\{(8=01000_2)=1\underline{1}000\}=(16+(0+0+0+0))-(8+0+0+0)=16-08;\ R\in\{0,4,2,1\}=07$

$k=\{(9=01001_2)=10\underline{111}\}=(16+(0+0+0+0))-(0+4+2+1)=16-07;\ R\in\{8,0,0,0\}=08$

$k=\{(10=01010_2)=10\underline{11}0\}=(16+(0+0+0+0))-(0+4+2+0)=16-06;\ R\in\{8,0,0,1\}=09$

$k=\{(11=01011_2)=10\underline{1}0\underline{1}\}=(16+(0+0+0+0))-(0+4+0+1)=16-05;\ R\in\{8,0,2,0\}=10$

$k=\{(12=01100_2)=10\underline{1}00\}=(16+(0+0+0+0))-(0+4+0+0)=16-04;\ R\in\{8,0,2,1\}=11$

$k=\{(13=01101_2)=100\underline{11}\}=(16+(0+0+0+0))-(0+0+2+1)=16-03;\ R\in\{8,4,0,0\}=12$

$k=\{(14=01110_2)=100\underline{1}0\}=(16+(0+0+0+0))-(0+0+2+0)=16-02;\ R\in\{8,4,0,1\}=13$

$k=\{(15=01111_2)=1000\underline{1}\}=(16+(0+0+0+0))-(0+0+0+1)=16-01;\ R\in\{8,4,2,0\}=14$

$k=\{(16=10000_2)=10000\}=(16+(0+0+0+0))-(0+0+0+0)=16-00;\ R\in\{8,4,2,1\}=15$

$k=\{(17=10001_2)=10001\}=(16+(0+0+0+1))-(0+0+0+0)=16+01;\ R\in\{8,4,2,0\}=14$

$k=\{(18=10010_2)=10010\}=(16+(0+0+2+0))-(0+0+0+0)=16+02;\ R\in\{8,4,0,1\}=13$

$k=\{(19=10011_2)=10011\}=(16+(0+0+2+1))-(0+0+0+0)=16+03;\ R\in\{8,4,0,0\}=12$

$k=\{(20=10100_2)=10100\}=(16+(0+4+0+0))-(0+0+0+0)=16+04;\ R\in\{8,0,2,1\}=11$

$k=\{(21=10101_2)=10101\}=(16+(0+4+0+1))-(0+0+0+0)=16+05;\ R\in\{8,0,2,0\}=10$

$k=\{(22=10110_2)=10110\}=(16+(0+4+2+0))-(0+0+0+0)=16+06;\ R\in\{8,0,0,1\}=09$

$k=\{(23=10111_2)=10111\}=(16+(0+4+2+1))-(0+0+0+0)=16+07;\ R\in\{8,0,0,0\}=08$

$k=\{(24=11000_2)=11000\}=(16+(8+0+0+0))-(0+0+0+0)=16+08;\ R\in\{0,4,2,1\}=07$

$k=\{(25=11001_2)=11001\}=(16+(8+0+0+1))-(0+0+0+0)=16+09;\ R\in\{0,4,2,0\}=06$

$k=\{(26=11010_2)=11010\}=(16+(8+0+2+0))-(0+0+0+0)=16+10;\ R\in\{0,4,0,1\}=05$

$k=\{(27=11011_2)=11011\}=(16+(8+0+2+1))-(0+0+0+0)=16+11;\ R\in\{0,4,0,0\}=04$

$k=\{(28=11100_2)=11100\}=(16+(8+4+0+0))-(0+0+0+0)=16+12;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$k=\{(29=11101_2)=11101\}=(16+(8+4+0+1))-(0+0+0+0)=16+13;\ R\in\{0,0,2,0\}=02$

$k=\{(30=11110_2)=11110\}=(16+(8+4+2+0))-(0+0+0+0)=16+14;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(31=11111_2)=11111\}=(16+(8+4+2+1))-(0+0+0+0)=16+15;\ R\in\{0,0,0,0\}=00.$

Адитивно-субтрактивний принцип формування суми зрівноваження дозволяє виконання, окрім операції додавання, також і операції віднімання мір розрядних значень ваг в процесі зрівноваження маси вантажу k_i. Це передбачає необхідність застосування, окрім знаку нуля та знаку одиниці, додатково знаку -1, який на прикладі позначений ознакою інвертування $\underline{1}$, чим обґрунтовано необхідність та здійснено перехід до застосування квазітрійкового методу кодування за допомогою трьох кодових символів $0, 1, \underline{1}$, те ж саме, що і $(0, +1, -1)$, хоча в основі кодування залишається принцип формування суми двійкових мір. По лівій частині прикладу для кожного із чисел в десятковому записі наведено двійковий еквівалент, а також код першого ступеня адитивно-субтрактивного зрівноваження. Такий приклад наведено із метою показати, що квазітрійковий код формується завжди із одиничним значенням старшого $n-1$ значущого розряду 2^{n-1}, а решта $(2^{n-2}, \ldots, 2^i, \ldots 2^0)$ розрядів є адитивно-субтрактивною сумою значень ваг двійкових мір, для яких $r_i = 1$ записано зі знаками мінус, якщо $k_i < 2^{n-1}$, як це показано для $k_i \in \{0, 1, \ldots, 16\}$ на прикладі нижче, або із знаками плюс (в звичайному двійковому записі) для $k_i > 2^{n-1}$, як це показано вище.

$$k{=}\{(1{=}00001_2){=}1\underline{1111}\}{=}10000{-}01111{=}16{-}15$$
$$k{=}\{(2{=}00010_2){=}1\underline{111}0\}{=}10000{-}01110{=}16{-}14$$
$$k{=}\{(3{=}00011_2){=}1\underline{11}0\underline{1}\}{=}10000{-}01101{=}16{-}13$$
$$k{=}\{(4{=}00100_2){=}1\underline{11}00\}{=}10000{-}01100{=}16{-}12$$
$$k{=}\{(5{=}00101_2){=}1\underline{1}0\underline{11}\}{=}10000{-}01011{=}16{-}11$$
$$k{=}\{(6{=}00110_2){=}1\underline{1}0\underline{1}0\}{=}10000{-}01010{=}16{-}10$$
$$k{=}\{(7{=}00111_2){=}1\underline{1}00\underline{1}\}{=}10000{-}01001{=}16{-}09$$
$$k{=}\{(8{=}01000_2){=}1\underline{1}000\}{=}10000{-}01000{=}16{-}08$$
$$k{=}\{(9{=}01001_2){=}10\underline{111}\}{=}10000{-}00111{=}16{-}07$$
$$k{=}\{(10{=}01010_2){=}10\underline{11}0\}{=}10000{-}00110{=}16{-}06$$
$$k{=}\{(11{=}01011_2){=}10\underline{1}0\underline{1}\}{=}10000{-}00101{=}16{-}05$$
$$k{=}\{(12{=}01100_2){=}10\underline{1}00\}{=}10000{-}00100{=}16{-}04$$
$$k{=}\{(13{=}01101_2){=}100\underline{11}\}{=}10000{-}00011{=}16{-}03$$
$$k{=}\{(14{=}01110_2){=}100\underline{1}0\}{=}10000{-}00010{=}16{-}02$$
$$k{=}\{(15{=}01111_2){=}1000\underline{1}\}{=}10000{-}00001{=}16{-}01$$
$$k{=}\{(16{=}10000_2){=}10000\}{=}10000{-}00000{=}16{-}00$$

Слід звернути увагу, що при застосуванні субтрактивно-адитивного методу за умови фіксування по протилежній вантажу стороні тільки однієї міри розряду 2^{n-1}, для інших $(2^{n-2}, \ldots, 2^i, \ldots 2^0)$ розрядів поки що зберігся принцип формування адитивного додавання із недоліком, зумовленим необхідністю докладання та віднімання мір, що залишились $(2^{n-2}, \ldots, 2^i, \ldots 2^0)$, із ефектом подвоєння результуючого часу перетворення. Щоб уникнути вказаного недоліку, необхідно ліквідувати операції перестановок мір розрядних ваг, щоб залишились тільки операції додавання. Запропоновано алгоритм, який передбачає, аналогічно до першого кроку попередньо проаналізованого алгоритму, здійснення тільки однієї операції додавання всіх без пропусків мір розрядних ваг, строго в черговості зменшення їх двійкових ваг внаслідок ітераційного зрівноваження попередніх станів нерівноваги шляхом докладання міри чергового молодшого значення на шальку ваги по стороні, яка була переважена на попередньому ітераційному кроці зрівноваження, до отримання рівноваги мас обох сторін. Кінцеві стани рівноваги субтрактивно-адитивного зрівноваження для $k_i \in \{0, 1, \ldots, 2^5 - 1\} = \{0, 1, \ldots, 31\}$ наведено на рис. 11.

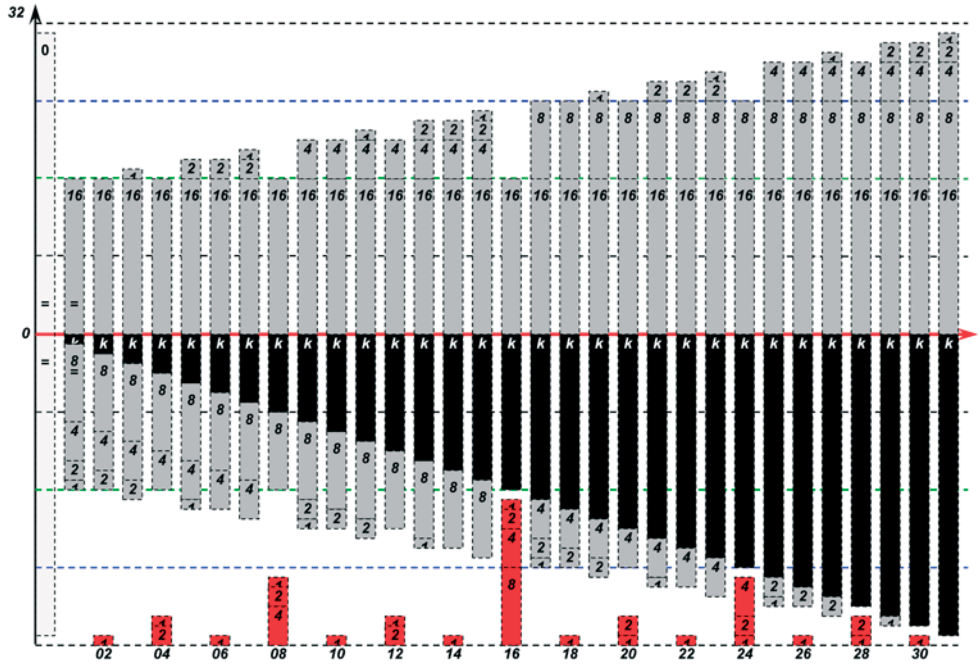

Рис. 11. Результати субтрактивно-адитивного перетворення значень чисел діапазону $k_i \in \{0, 1, \ldots, 2^5 - 1\} = \{0, 1, \ldots, 31\}$.

Необхідно вказати, що для парних значень, які становлять половину всіх кодів (при $n = 5$ для $k_i = 16, 8, 24, 4, 12, 20, 28, 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30$) процес перетворення закінчується швидше, ніж за n кроків, що зумовлено відсутністю одиниць в молодших розрядах двійкового коду результату перетворення. При чому існує однозначна відповідність для обох методів нульових значень молодших двійкових розрядів. В нижче наведеному прикладі нульові розряди, які не є істотними в процесі зважування, затемнено.

$k{=}\{(00{=}00000_2){=}00000\}{=}(00{+}(0{+}0{+}0{+}0)){-}(0{+}0{+}0{+}0){=}00{-}00;\ R{\in}\{16{,}8{,}4{,}2{,}1\}{=}15$

$k{=}\{(01{=}00001_2){=}1\underline{1111}\}{=}(16{+}(0{+}0{+}0{+}0)){-}(8{+}4{+}2{+}1){=}16{-}15;\ R{\in}\{0{,}0{,}0{,}0\}{=}00$

$k{=}\{(02{=}00010_2){=}1\underline{111}0\}{=}(16{+}(0{+}0{+}0{+}0)){-}(8{+}4{+}2{+}0){=}16{-}14;\ R{\in}\{0{,}0{,}0{,}1\}{=}01$

$k=\{(03=00011_2)=1\underline{111}1\}=(16+(0+0+0+1))-(8+4+2+0)=17-14;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(04=00100_2)=1\underline{11}00\}=(16+(0+0+0+0))-(8+4+0+0)=16-12;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$k=\{(05=00101_2)=1\underline{11}1\underline{1}\}=(16+(0+0+2+0))-(8+4+0+1)=18-13;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(06=00110_2)=1\underline{11}10\}=(16+(0+0+2+0))-(8+4+0+0)=18-12;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(07=00111_2)=1\underline{11}11\}=(16+(0+0+2+1))-(8+4+0+0)=19-12;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(08=01000_2)=1\underline{1}000\}=(16+(0+0+0+0))-(8+0+0+0)=16-08;\ R\in\{0,4,2,1\}=07$

$k=\{(09=01001_2)=1\underline{1}1\underline{11}\}=(16+(0+4+0+0))-(8+0+2+1)=20-11;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(10=01010_2)=1\underline{1}1\underline{1}0\}=(16+(0+4+0+0))-(8+0+2+0)=20-10;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(11=01011_2)=1\underline{1}1\underline{1}1\}=(16+(0+4+0+1))-(8+0+2+0)=21-10;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(12=01100_2)=11\underline{1}00\}=(16+(0+4+0+0))-(8+0+0+0)=20-08;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$k=\{(13=01101_2)=1\underline{1}11\underline{1}\}=(16+(0+4+2+0))-(8+0+0+1)=22-09;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(14=01110_2)=1\underline{1}110\}=(16+(0+4+2+0))-(8+0+0+0)=22-08;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(15=01111_2)=1\underline{1}111\}=(16+(0+4+2+1))-(8+0+0+0)=23-08;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(16=10000_2)=10000\}=(16+(0+0+0+0))-(0+0+0+0)=16-00;\ R\in\{8,4,2,1\}=15$

$k=\{(17=10001_2)=11\underline{111}\}=(16+(8+0+0+0))-(0+4+2+1)=24-07;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(18=10010_2)=11\underline{11}0\}=(16+(8+0+0+0))-(0+4+2+0)=24-06;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(19=10011_2)=11\underline{11}1\}=(16+(8+0+0+1))-(0+4+2+0)=25-06;\ R\in\{0,0,0,0\}=01$

$k=\{(20=10100_2)=11\underline{1}00\}=(16+(8+0+0+0))-(0+4+0+0)=24-04;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$k=\{(21=10101_2)=11\underline{1}1\underline{1}\}=(16+(8+0+2+0))-(0+4+0+1)=26-05;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(22=10110_2)=11\underline{1}10\}=(16+(8+0+2+0))-(0+4+0+0)=26-04;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(23=10111_2)=11\underline{1}11\}=(16+(8+0+2+1))-(0+4+0+0)=27-04;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(24=11000_2)=11000\}=(16+(8+0+0+0))-(0+0+0+0)=24-00;\ R\in\{0,4,2,1\}=07$

$k=\{(25=11001_2)=111\underline{11}\}=(16+(8+4+0+0))-(0+0+2+1)=28-03;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(26=11010_2)=111\underline{1}0\}=(16+(8+4+0+0))-(0+0+2+0)=28-02;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(27=11011_2)=111\underline{1}1\}=(16+(8+4+0+1))-(0+0+2+0)=29-02;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(28=11100_2)=11100\}=(16+(8+4+0+0))-(0+0+0+0)=28-00;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$k=\{(29=11101_2)=1111\underline{1}\}=(16+(8+4+2+0))-(0+0+0+1)=30-01;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(30=11110_2)=11110\}=(16+(8+4+2+0))-(0+0+0+0)=30-00;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$k=\{(31=11111_2)=11111\}=(16+(8+4+2+1))-(0+0+0+0)=31-00;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$k=\{(32=100000_2)=100000\}=(32+0+0+0+0+0)-(0+0+0+0)=32-00;\ R\in\{16,8,4,2,1\}=00$

Кожне непарне число може бути представлено однозначно тільки парними числами k_i із трійковими $(-1, 0, +1)$ значеннями двійкових розрядів у вигляді $k_i = \ldots \pm r_3 \times 2^3 \pm r_2 \times 2^2 \pm 1 \times 2^1 \pm 1 \times 2^0$, в яких в позиції $\pm 1 \times 2^1$ значення коефіцієнта r_1 ніколи не рівне нулю (у нижче наведеному прикладі такі триплети затемнено). Парні числа кратності 4, такі як $k_i = \ldots \pm r_3 \times 2^3 \pm r_2 \times 2^2 \pm 0 \times 2^1 \pm 0 \times 2^0$, тобто в яких в позиції $r_1 \times 2^1$ значення коефіцієнта r_1 рівне нулю, непарних чисел не утворюють (у прикладі не затемнені). Тобто, якщо $r_1 = 0$, то $r_0 = 0$.

$\{(00=00000_2)=00000\}=(00+0+0+0+0)=\ 00000\ ;\ R\in\{16,8,4,2,1\}=15$

$\{(01=00001_2)=1\underline{1111}\}=(16-8-4-2-1)=1\underline{111}\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(02=00010_2)=1\underline{111}0\}=(16-8-4-2+0)=1\underline{111}0;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(03=00011_2)=1\underline{111}1\}=(16-8-4-2+1)=1\underline{111}\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(04=00100_2)=1\underline{11}00\}=(16-8-4+0+0)=1\underline{11}00;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$\{(05=00101_2)=1\underline{11}1\underline{1}\}=(16-8-4+2-1)=1\underline{11}1\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(06=00110_2)=1\underline{11}10\}=(16-8-4+2+0)=1\underline{11}10;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(07=00111_2)=1\underline{11}11\}=(16-8-4+2+1)=1\underline{11}1\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(08=01000_2)=1\underline{1}000\}=(16-8+0+0+0)=1\underline{1}000;\ R\in\{0,4,2,1\}=07$

$\{(09=01001_2)=1\underline{1}1\underline{11}\}=(16-8+4-2-1)=1\underline{1}1\underline{1}\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(10=01010_2)=1\underline{1}1\underline{1}0\}=(16-8+4-2+0)=1\underline{1}1\underline{1}0;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(11=01011_2)=1\underline{1}1\underline{1}1\}=(16-8+4-2+1)=1\underline{1}1\underline{1}\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(12=01100_2)=11\underline{1}00\}=(16-8+4+0+0)=1\underline{1}100;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$\{(13=01101_2)=1\underline{1}11\underline{1}\}=(16-8+4+2-1)=1\underline{1}11\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(14=01110_2)=1\underline{1}110\}=(16-8+4+2+0)=1\underline{1}110;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(15=01111_2)=1\underline{1}111\}=(16-8+4+2+1)=1\underline{1}11\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(16=10000_2)=10000\}=(16+0+0+0+0)=10000;\ R\in\{8,4,2,1\}=15$

$\{(17=10001_2)=11\underline{111}\}=(16+8-4-2-1)=11\underline{11}\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(18=10010_2)=11\underline{11}0\}=(16+8-4-2+0)=11\underline{11}0;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(19=10011_2)=11\underline{11}1\}=(16+8-4-2+1)=11\underline{11}\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=01$

$\{(20=10100_2)=11\underline{1}00\}=(16+8-4+0+0)=11\underline{1}00;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$\{(21=10101_2)=11\underline{1}1\underline{1}\}=(16+8-4+2-1)=11\underline{1}1\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(22=10110_2)=11\underline{1}10\}=(16+8-4+2+0)=11\underline{1}10;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(23=10111_2)=11\underline{1}11\}=(16+8-4+2+1)=11\underline{1}1\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(24=11000_2)=11000\}=(16+8+0+0+0)=11000;\ R\in\{0,4,2,1\}=07$

$\{(25=11001_2)=111\underline{11}\}=(16+8+4-2-1)=111\underline{1}\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(26=11010_2)=111\underline{1}0\}=(16+8+4-2+0)=111\underline{1}0;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(27=11011_2)=111\underline{1}1\}=(16+8+4-2+1)=111\underline{1}\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(28=11100_2)=11100\}=(16+8+4+0+0)=11100;\ R\in\{0,0,2,1\}=03$

$\{(29=11101_2)=1111\underline{1}\}=(16+8+4+2-1)=1111\ \underline{1};\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(30=11110_2)=11110\}=(16+8+4+2+0)=11110;\ R\in\{0,0,0,1\}=01$

$\{(31=11111_2)=11111\}=(16+8+4+2+1)=1111\ 1;\ R\in\{0,0,0,0\}=00$

$\{(32=100000_2)=100000\}=(32+0+0+0+0+0)=10000;\ R\in\{16,8,4,2,1\}=31.$

Наведена система кодування має двійкову мережу ваг розрядів та квазітрійковий метод представлення розрядних бітів. Це створює можливість субтрактивно-адитивного зрівноваження за найменшу можливу кількість ітераційних кроків t_{SA}, рівну розрядності двійкового коду перетворення $t_{SA} = n$. Здійснюється тільки докладання двійкових мір від найстаршого значення 2^{n-1} до молодших без необхідності їх знімання з терезів. Така можливість доведена тим, що в форматі двійкових кодів розряди, розпочинаючи від старшого 2^{n-1}, вміщують тільки значення одиниць без перемежовування нулями (усі непарні числа), а молодші розряди $\ldots 2^1, 2^0$ для парних чисел, якщо і рівні нулю, то обов'язково від наймолодшого до довільного старшого без перемежовування значеннями одиниць. Такі числа у попередньому прикладі не затемнено. Є чітка границя розділення в форматі слова для парних чисел послідовності молодших розрядів, коефіцієнти яких рівні нулю, та старших розрядів, коефіцієнти яких рівні ± 1.

А чи існує можливість подальшої модифікації запропонованого способу зрівноваження? В останньому прикладі бачимо, що непарні значення числа, як було визначено вище, утворено тільки парними числами із наступним представленням суми

$$k_i = \ldots \pm r_3 \times 2^3 \pm r_2 \times 2^2 \pm 1 \times 2^1 \pm 1 \times 2^0.$$

Проте два суміжні кодові стани $k_i = \pm 1$ для парних чисел кратності 4 із представленням суми

$$k_i = \ldots \pm r_3 \times 2^3 \pm r_2 \times 2^2 \pm 0 \times 2^1 \pm 0 \times 2^0$$

в кодовому наборі не використовуються, що є причиною редундантності запропонованого способу перетворення і визначає перспективу наступних досліджень в напрямку трійкових субтрактивно-адитивних систем числення.

Висновки

В групі позиційних систем представлення чисел натурального ряду із нулем досягнуто підвищення швидкодії перетворення числових значень в цифровий код внаслідок уникнення необхідності виконання таких надлишкових операцій зрівноваження, як знімання та перекладання мір розрядних двійкових ваг. Виконання тільки однієї процедури ітераційного докладання всіх без винятку мір розрядних ваг в порядку від найстаршої 2^{n-1} до молодших за можливості їх розташування по обох сторонах ваги дозволяє реалізувати субтрактивно-адитивний спосіб зрівноваження та зменшити до мінімально можливої кількість ітераційних кроків, визначену розрядністю двійкового коду перетворення n.

Таблиця 2

Ефективність застосування субтрактивно-адитивного способу зрівноваження

n	2	4	6	8	12	16	24	32
$t'_n = 1 + 2 + \ldots + n$	3	10	21	38	78	136	300	528
$t''_n = 2(n-1)$	2	6	10	14	22	30	46	66
$t_{SA} = n$	2	4	6	8	12	16	24	32
$ef'' = t'_n/t''_n$	1,5	1,67	2,1	2,7	3,5	4,5	6,5	8
$ef = t'_n/t_{SA}$	1,5	2,5	3,5	4,75	6,5	8,5	12,5	16,5

Складність запропонованого методу перетворення кількісного значення k_i як результату обчислення суми $k_i = \sum r_i 2^i$ для адитивного методу полягає в тому, що здійснюється заміна тільки одного знаку додавання на знак віднімання, внаслідок чого результат обчислюється як

$$X_i = \sum r_i 2^i - \sum \underline{r_i} 2^{\underline{i}},$$

де $\sum \underline{r_i} 2^{\underline{i}}$ — сума мір, розташованих по стороні розташування вантажу, $\sum r_i 2^i$ — сума мір двійкових розрядів, розташованих по стороні протилежній до сторони розташування вантажу.

[1] *Knuth D.* The Art of Computer Programming. Volume 2, 3rd Ed. — Addison Wesley. — P. 194–213.

[2] *Фомин С.В.* Системы счисления. — 5-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 48 с.

[3] *Burks A. W., Goldstine H. H., Neumann J.* Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument // Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. — 1946.; Reprinted in Bell and Newell. — 1971. – P. 92–119.

[4] *Hayes B.* Third base // American Scientist — 2001. — **6**, №89. — P. 490–494,

[5] *Shannon C.E.* A symmetrical notation for numbers // Amer. Math. Monthly. — 1950. — **57**, №2. — P. 90–93.

[6] *Brousentsov N.P., Maslov S.P., Alvarez R.J., Zhogolev E.A.* Development of ternary computers at Moscow State University // http://www.computer-museum.ru/english/setun.htm. Retrieved 20 Jan 2010.

[7] *Кушнеров А.* Троичная цифровая техника. Ретроспектива и современность. – Израиль: Университет им. Бен-Гуриона Беэр-Шева, 2005. // http://314159.ru/kushnerov/kushnerov1.pdf

[8] *Шафаревич И.Р.* Избранные главы алгебры // Математическое образование — 2000. — С. 18–19.

[9] *Петришин Л.Б., Борисенко А.А.* К определению свойств унитарной системы счисления // Електроніка та системи управління — 2008. — **17**, №3. — С. 64–69.

[10] *Борисенко А.А.* Дискретная математика. — Суми: Університетська книга, 2008. — 255 с.

[11] *Петришин Л.Б.* Теоретичні основи перетворення форми та цифрової обробки інформації в базисі Галуа. — Київ: ІЗіМН МОУ, 1997. — 237 с.

[12] *Гашков С.Б.* Системы счисления и их применение. — М.: МЦНМО, 2004. — 52 с.

[13] *Leonardo da Pisa* (Fibonacci) Liber Abaci (Book of Calculation), 1202.

[14] *Sigler L.E.* Fibonacci's Liber Abaci, VIII. — Springer-Verlag, 2002. — 636 p.

[15] *Pachioli L.* Summa de Arithmetica, Geomeytria, Proprtioni et Proportionalita, 1494.

[16] *Bachet de Meziriac* Problesmes plaisans et delectables qui se font par les nombres. — Paris, 1612. Lyon, 1624. Paris 1874 and 1879.

[17] *Ozaman J.* Recreations mathematiques et physiques. — Paris, 1694.

[18] *Schubert H.* Mathematische Mussestunden - Математические развлечения и игры. — Одесса: Типография Л.Шутака, 1911. — 19 с.

[19] *Gardner M.* 6-th Book of Mathematical Diversions from Scientific American. — The University of Chicago Press, 1984. — 262 p.

MODELLING OF SUBTRACTIVE–ADDITIVE METHODS OF INFORMATION FORM TRANSFORMATION

Lubomyr PETRYSHYN

AGH University of Science and Technology,
10 Gramatyka Str., Cracow 30-067, Poland

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *L.B.Petryshyn@gmail.com*

The properties of the additive positional coding system are analyzed, it is identified the deficiencies of their use in applied problems of converting data form. It is characterized the principle of subtractive–additive binary conversion as a way of reducing the number of compensation operations. It is presented the results of quantitative comparative evaluation of the effectiveness proposed method. It is defined the perspective of applying of subtractive-additive methods of compensation.