УНІВЕРСАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ПІДМЕТРИК МЕТРИКИ ХЕМІНГА

©*2012 р. Богдана Олійник*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська 64/13, Київ 01601
e-mail: *bogd@ukma.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 23 лютого 2012 р.

Досліджується незліченна родина метричних просторів, які є індуктивними границями строгих підметрик скінченних метрик Хемінга. Встановлено, що кожен простір з цієї родини є однорідним і містить ізоморфну копію довільного скінченного простору, а в його групу ізометрій ізоморфно занурюються всі зліченні групи.

1 Вступ

У 30-их роках минулого століття Л. М. Блюменталем було введено поняття метричної трансформації (див. [1]). Трансформацією або перетворенням метричного простору (X, d_X) за допомогою шкали s називається простір $(X, s(d_X))$, в якому відстань d_X замінюється відстанню $s(d_X)$, де $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — монотонно зростаюча неперервна функція, $s(0) = 0$. В загальному випадку $s(d_X)$ є напівметрикою, тобто для неї може не виконуватись нерівність трикутника. Якщо $s(d_X)$ є метрикою, то трансформація називається метричною. Зокрема, коли похідна шкали s' не зростає, трансформація $s(d_X)$ є метричним перетворенням (див. [2]).

Техніка метричних трансформацій розвивалась у працях Л. Блюменталя, Дж. фон Ноймана, І. Шонберга ([3], [4], [5]). Найвідомішими з них є такі:

УДК: 519.11; MSC 2010: 20B25
Ключові слова і фрази: підметрика, метрика Хемінга, метрична трансформація

a) степеневі метричні трансформації $s(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$;

b) перетворення Шонберга $s(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$;

c) логарифмічна і дробово-лінійна трансформації $s(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $s(t) = \log(1+t)$.

Відповідно до роботи [6] метричні простори (X, d_X) і (Y, d_Y) називатимемо ізоморфними, якщо метричний простір X є ізометричним трансформації простору (Y, d_Y) за допомогою деякої шкали s, тобто існує така бієкція $g : X \to Y$, що для довільних $u, v \in X$ виконується рівність

$$d_X(u, v) = s(d_Y(g(u), g(v))).$$

Позначатимемо у цьому випадку простір (X, d_X) як $s(Y)$. Якщо простір (X, d_X) ізоморфний деякому підпростору простору (Y, d_Y), то говоритимемо, що (X, d_X) ізоморфно занурюється в (Y, d_Y). Ізоморфні метричні простори є топологічно еквівалентними, тобто як топологічні простори мають однакові властивості.

Означення підметрики метричного простору було введено в роботі [7] для скінченних просторів.

Означення 1. *Нехай (X, d_X) — довільний метричний простір. Будемо говорити, що метрика $\widetilde{d}_X$, визначена на множині X, є підметрикою метрики d_X, якщо виконуються такі умови:*

A) для довільних $x, y \in X$ має місце нерівність $\widetilde{d}_X(x, y) \le d_X(x, y)$;

B) для довільних $x, y, u, v \in X$ з рівності $d_X(x, y) = d_X(u, v)$ випливає рівність $\widetilde{d}_X(x, y) = \widetilde{d}_X(u, v)$.

Нагадаємо, що простором Хемінга H_m називається метричний простір, визначений на множині всіх булевих векторів довжини m, відстань між векторами якого визначається як кількість попарно різних координат в цих векторах. У праці [8] досліджено властивості цілочисельних підметрик метрики Хемінга, зокрема описано їх групи ізометрій.

Метою замітки є дослідження індуктивних границь строгих підметрик скінченних метрик Хемінга. Доведено, що індуктивні границі довільних строгих підметрик просторів Хемінга є однорідними метричними просторами, які універсальні щодо ізоморфних занурень для класу скінченних метричних просторів. Охарактеризовано групи ізометрій індуктивних границь строгих підметрик метрик Хемінга. З наведеного опису випливає, що група ізометрій кожного з них містить ізоморфну копію довільної зліченної групи.

2 Підметрики й метричні трансформації

Для довільної метрики d_X, визначеної на множині X, серед її підметрик природним чином виділяється підклас строгих підметрик.

Означення 2. *Підметрику $\widetilde{d}_X$ метрики d_X, визначеної на множині X, називатимемо строгою якщо для довільних $x, y, u, v \in X$ з нерівності $d_X(x, y) < d_X(u, v)$ випливає нерівність $\widetilde{d}_X(x, y) < \widetilde{d}_X(u, v)$.*

Наступне твердження пов'язує між собою поняття строгої підметрики і метричної трансформації.

Теорема 1. *Нехай $\widetilde{d}_X$ є підметрикою метрики d_X, що задана на скінченній множині X. Метричний простір $(X, \widetilde{d}_X)$ є метричною трансформацією простору (X, d_X) тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{d}_X$ є строгою підметрикою метрики d_X.*

Доведення. Якщо метричний простір $(X, \widetilde{d}_X)$ є метричною трансформацією простору (X, d_X), то існує така шкала s, що $\widetilde{d}_X = s(d_X)$. Оскільки функція s неперервна і монотонно зростаюча, то якщо для довільних $x, y, u, v \in X$ виконується нерівність $d_X(x, y) < d_X(u, v)$, то виконується нерівність $s(d_X(x, y)) < s(d_X(u, v))$, а отже, $\widetilde{d}_X(x, y) < \widetilde{d}_X(u, v)$.

Нехай тепер підметрика $\widetilde{d}_X$ зберігає строгі нерівності відстаней між точками. За визначенням підметрики $\widetilde{d}_X$ зберігає також рівності відстаней між точками. Оскільки множина X скінченна, то це означає, що скінченні множини значень метрики d_X і підметрики $\widetilde{d}_X$ складаються з однакової кількості елементів. Впорядкуємо за зростанням $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_s$ всі значення метрики d_X і $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s$ всі значення підметрики $\widetilde{d}_X$. Визначимо функцію $s(t)$ поклавши для $x, y \in X$

$$s(0) = 0, \quad s(d_X(x, y)) = \widetilde{d}_X(x, y).$$

На кожному з інтервалів $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$ продовжимо функцію $s(t)$ лінійно. Своїми значеннями $s(a_i) = b_i$, $s(a_{i+1}) = b_{i+1}$ на кінцях інтервалу вона визначається на ньому однозначно. Для $t > a_s$ покладемо $s(t) = (t - a_s) + b_s$. Функція $s(t)$ є кусково-лінійною функцією, яка визначена при $t \geq 0$, є неперервною, монотонно зростаючою і $s(0) = 0$. Отже, s є шкалою і простори $(X, s(d_X(x, y)))$ і $(X, \widetilde{d}_X)$ ізометричні, тобто простір $(X, \widetilde{d}_X)$ є метричною трансформацією простору $(X, \widetilde{d}_X)$. $\square$

3 Індуктивні границі підметрик метрик Хемінга

Спочатку нагадаємо деякі властивості просторів Хемінга, які ми будемо використовувати пізніше.

Лема 1. *[9] Для довільного n-точкового метричного простору (X, d_X) існує ізоморфне занурення цього простору у простір Хемінга H_m, де*

$$m = \frac{1}{2}\left(\tbinom{n}{2}^2 - \tbinom{n}{2} - 2\right)(n^2 - 2n + 7).$$

Зазначимо, що доведення цієї леми є конструктивним, тобто занурення X в H_m будується в явному вигляді.

Зліченним простором Хемінга H_∞ називається простір нескінченних майже нульових $(0,1)$-послідовностей (кожна така послідовність містить лише скінченну кількість елементів, які дорівнюють одиниці), а відстань між двома такими послідовностями $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ визначається за правилом:

$$d_{H_\infty}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|. \tag{1}$$

Зліченний простір Хемінга можна отримати як індуктивну границю послідовностей просторів Хемінга H_1, H_2, $\ldots$ з природними зануреннями $\varphi_i : H_i \to H_{i+1}$, що задаються таким чином:

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_i) = (x_1, \ldots, x_i, 0), \quad i \geq 1. \tag{2}$$

Нехай тепер $\widetilde{d}_{H_m}$ деяка строга підметрика метрики Хемінга d_{H_m}. Позначимо простір $(H_m, \widetilde{d}_{H_m})$ через $\widetilde{H}_m$. Тоді за теоремою 1 існує шкала s така, що виконується рівність:

$$s(d_{H_m}) = \widetilde{d}_{H_m}. \tag{3}$$

Нехай s — фіксована функція шкали.

Означення 3. *Послідовність строгих підметрик $\widetilde{d}_{H_i}$ метрик Хемінга d_{H_i}, $i \geq 1$ таких, що для кожної з них виконується рівність (3), тобто простори $\widetilde{H}_i$ і $s(H_i)$ ізоморфні, називатимемо s-послідовністю підметрик метрик Хемінга d_{H_i}, $i \geq 1$.*

Для s-послідовності $\widetilde{d}_{H_i}$, $i \geq 1$, розглянемо занурення $\varphi_i : \widetilde{H}_i \hookrightarrow \widetilde{H}_{i+1}$, визначені за правилом (2). Вони є ізометричними, а отже, можна розглянути індуктивну границю

$$\widetilde{H} = \varinjlim(\widetilde{H}_i, \varphi_i)$$

s-послідовності просторів $\widetilde{H}_i$.

Означення 4. *Нехай $\mathcal{K}$ — деякий клас метричних просторів. Метричний простір (X, d_X) називатимемо універсальним щодо класу $\mathcal{K}$, якщо довільний простір з цього класу ізоморфно занурюється в простір (X, d_X).*

Теорема 2. *Нехай $\widetilde{d}_{H_i}$, $i \geq 1$, є s-послідовністю строгих підметрик метрик Хемінга d_{H_i}. Тоді мають місце такі твердження*

1. *Простори $\widetilde{H}$ і $s(H_\infty)$ ізометричні.*
2. *Простір $\widetilde{H}$ є універсальним щодо класу всіх скінченних метричних просторів.*

Доведення. 1. Зауважимо, що простір $\widetilde{H}$, як і простір $s(H_\infty)$ визначений на множині нескінченних майже нульових $(0,1)$-послідовностей. Покажемо, що відстань між однаковими елементами множини в обох цих просторах однакова. Справді, нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ — дві такі послідовності. Оскільки вони майже нульові, то існує таке натуральне число l, що для всіх $j > l$ маємо $x_j = y_j = 0$. Це означає, з одного боку, що в просторі $s(H_\infty)$ відстань між послідовностями $\bar{x}$ і $\bar{y}$ дорівнює $d_{s(H_\infty)}(\bar{x}, \bar{y}) = s(\sum_{i=1}^{l} |x_i - y_i|)$. З іншого боку, за побудовою простору $\widetilde{H}$, послідовності $\bar{x}$ і $\bar{y}$ належать простору $\widetilde{H}_l$, а отже, відстань між ними дорівнює

$$\widetilde{d}_{H_l}((x_1,\dots,x_l),(y_1,\dots,y_l)) =$$

$$= s(d_{H_l}((x_1,\dots,x_l),(y_1,\dots,y_l))) = s(\sum_{i=1}^{l}|x_i - y_i|),$$

тобто відстань між $\bar{x}$ і $\bar{y}$ однакова в обох просторах.

2. Нехай (X, d_X) — деякий скінченний метричний простір. За лемою 1 для довільного n існує простір H_m, такий, що підпростір X ізоморфно занурюється в H_m. Оскільки простори $\widetilde{H}_m$ і H_m ізоморфні, то X ізоморфно занурюється в $\widetilde{H}_m$. А тому (X, d_X) буде ізоморфно занурюватись у граничний простір $\widetilde{H}$. Оскільки (X, d_X) ми вибирали довільно, то індуктивна границя строгих підметрик простору Хемінга $\widetilde{H}$ містить ізоморфну копію довільного скінченного метричного простору. □

Зауваження 1. *З пункту 1 цієї теореми випливає, що коли множина значень шкали s — обмежена, то для довільної s-послідовності $\widetilde{H}_i$, $i \geq 1$, індуктивна границя $\widetilde{H}$ є простором скінченного діаметра. Наприклад, метрична трансформація $\widetilde{H}_i$ просторів Хемінга H_i, заданих за допомогою шкали $s_0(t) = \frac{t}{t+1}$, визначає простір $\widetilde{H}$, що має діаметр 1.*

Лема 2. *Нехай метричні простори (X, d_X) і (Y, d_Y) ізоморфні. Тоді їх групи ізометрій $IsomX$ і $IsomY$ ізоморфні як групи підстановок.*

Носієм функції $h(x) \in H^M$ називається множина $supp(h)$ всіх елементів m із M, для яких $h(m) \neq 1$. Вінцевий добуток $G \wr H$ групи підстановок (G, M) з абстрактною групою H містить підгрупу

$$G\bar{\wr}H = \{[g, h(x)] : |supp(h)| < \infty\},$$

яка називається *обмеженим вінцевим добутком* групи підстановок (G, M) і групи H.

Теорема 3. *Для довільної s-послідовності строгих підметрик метрик Хемінга d_{H_i}, $i \geq 1$, індуктивна границя $\widetilde{H}$ є однорідним метричним простором. Група ізометрій цього простору ізоморфна обмеженому вінцевому добутку $S_\infty \bar{\wr} C_2$ симетричної групи нескінченного степеня з циклічною групою порядку 2, тобто містить ізоморфну копію кожної зліченної групи.*

Доведення. За пунктом 1 теореми 1 метричні простори $\widetilde{H}$ і H_{∞} ізоморфні. Відомо (див. [10]), що група ізометрій простору H_{∞} ізоморфна обмеженому вінцевому добутку $S_{\infty}\bar{\wr}C_2$. Оскільки ізоморфні простори мають ізоморфні групи ізометрій, а простори $\widetilde{H}$ і H_{∞} визначені на одній множині, то їх групи ізометрій рівні. А тому група ізометрій простору $\widetilde{H}$ також ізоморфна обмеженому вінцевому добутку $S_{\infty}\bar{\wr}C_2$. Крім того, простір H_{∞} є однорідним метричним простором, тобто його група ізометрій діє на ньому транзитивно. Отже, простір $\widetilde{H}$ є також однорідним.

Оскільки регулярне зображення зліченної групи є групою підстановок на зліченній множині, то група $Isom\widetilde{H}$ містить ізоморфну копію довільної зліченної групи. □

З теорем 1 і 2 безпосередньо випливає

Наслідок 1. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існує рівномірно дискретний зліченний метричний простір $H(\varepsilon)$, який має такі властивості:*

a) діаметр $H(\varepsilon)$ дорівнює ε;

b) довільний скінченний метричний простір ізоморфно занурюється в $H(\varepsilon)$;

c) довільна зліченна група ізоморфно занурюється в $Isom(H(\varepsilon))$.

[1] *Blumenthal L.M.* Remarks concerning the euclidean four-point property // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. — 1936. — N. 7. — P. 8–10.

[2] *Deza M.M., Deza E.* Encyclopedia of distances. — Berlin: Springer. — 2009. — 590 p.

[3] *Blumenthal L.M.* Some imbedding theorems and characterization problems of distance geometry // Bull. Am. Math. Soc. — 1943. — V. 49. — P. 321-338.

[4] *von Neumann J., Schoenberg I.J.* Fourier integrals and metric geometry // Trans. Amer. Math. Soc. — 1941. — V. 50. — P. 226–251.

[5] *Schoenberg I.J.* Metric spaces and completely monotone functions // Annals of Mathematics. — 1938. — V. 39. — N. 4. — P. 811–841.

[6] *Maehara H.* Metric transforms of finite spaces and connected graphs // Discrete Mathematics. — 1986. — V. 61. — P. 235–246.

[7] *Погорелов Б.А.* Подметрики метрики Хемминга и теорема А. А. Маркова // Труды по дискр. матем. — 2006. — Т. 9 — С. 190—219.

[8] *Погорелов Б.А., Пудовкина М.А.* Подметрики Хемминга и их группы изометрий // Труды по дискр. матем. — 2008. — Т. 11, № 2. — 147-–191.

[9] *Olijnyk B.* Isomorphic embeddings of finite metric spaces into Hamming spaces // Matematychni Studii. — 1997. — 8. — P. 176–179.

[10] *Олійник Б.В.* Універсальність зліченних просторів Хемінга щодо ізоморфних занурень // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. — 1996. — № 2. — С. 53–62.

UNIVERSAL PROPERTIES OF HAMMING SUBMETRICS

Bogdana Oliynyk

Taras Shevchenko National University,
64/13 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *bogd@ukma.kiev.ua*

It is investigated an uncountable set of metric spaces that are inductive limits of strict submetrics of finite Hamming metrics. It is established that each space is this set is homogeneous, contains an isomorphic copy of arbitrary finite space and all countable groups are isomorphically embeddable into its isometry group.