ЗРОСТАННЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНИХ СМУГАХ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З НЕМОНОТОННИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Ігор ОВЧАР[1], *Олег СКАСКІВ*[2]

[1] Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська 15, Івано-Франківськ 76000

e-mail: *iovchar@hotmail.com*

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів 79000

e-mail: *matstud@franko.lviv.ua*

Редакція отримала статтю 12 листопада 2011 р.

Для цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, де послідовність показників така, що $\{\lambda_n\colon n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, встановлено умови, за яких $\ln M(x, F, S) \sim \ln M(x, F)$ при $x \to +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d\ln x < +\infty$), де $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}$, $M(x, F, S) = \sup\{|F(x + iy)| : |y - t| \leq a\}$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

1 Вступ

Через D_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon \mathrm{Re}\ z < a\}$, $a \leq +\infty$, рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

УДК: 517.53; MSC 2010: 30B20

Ключові слова і фрази: ряд Діріхле, логарифмічна міра, смуга, немонотонні показники

де $\{\lambda_n\colon n\ge 0\}\subset[0,+\infty)$; $D\overset{def}{=}D_{+\infty}$ — клас цілих рядів Діріхле. Через $D^+(\lambda)$ та $D_0^+(\lambda)$ позначатимемо підкласи відповідно класів D та D_0, у які входять ряди Діріхле вигляду (1) з фіксованою послідовністю показників $\lambda=(\lambda_n)$ такою, що $\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\le n\uparrow+\infty)$.

Для $F\in D_a$, $a\le+\infty$, та $x<a$ позначатимемо $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n\ge 0\}$. Нехай $a_1(x)$ і $a_2(x)$ — додатні на $\mathbb{R}$ функції такі, що $a_1(x)\le a_2(x)$ для всіх x з $\mathbb{R}$, а $t_j(x)$, $j\in\{1,2\}$, — деякі довільні дійсні функції на $\mathbb{R}$. Крім того, визначимо $S_j(x,t_j,a_j)=\{z=x+iy:|y-t_j(x)|\le a_j(x)\}$, $S_j=\cup_{x\in\mathbb{R}}S_j(x,t_j,a_j)$, $M(x,F,S_j)=\sup\{|F(x+iy)|:|y-t_j(x)|\le a_j(x)\}$. Зауважимо, що при $t_j(x)\equiv const$, $a_j(x)\equiv const$, S_j — горизонтальна смуга.

У різних класах абсолютно збіжних рядів Діріхле відомо ([1]–[11]), що в достатніх умовах, за виконання яких справджуються ті чи інші асимптотичні співвідношення, послідовності (λ_n) і $(-\ln|a_n|)$ у випадку класу $D^+\overset{def}{=}\bigcup_{\lambda}D^+(\lambda)$ та послідовності (λ_n) і $(\ln|a_n|)$ у випадку класу $D_0^+\overset{def}{=}\bigcup_{\lambda}D_0^+(\lambda)$ з якісної точки зору є рівноправними. Так, в [2] подібний ефект встановлений у класі D_0^+ (в [1, 3] — в класі D^+) стосовно асимптотичного співвідношення Бореля $\ln M(x,F)=(1+o(1))\ln\mu(x,F)$, а в [5, 6, 7] в класах D_0^+ та D^+ стосовно співвідношення $M(x,F)=(1+o(1))\mu(x,F)$. При цьому від послідовності показників $\lambda=(\lambda_n)$ в [5, 6] у класі D вимагається лише, щоб виконувалась умова

$$(\forall\ n\ge 0)\colon\ \ \lambda_n<\sup\{\lambda_j\colon j\ge 0\}\overset{def}{=}\beta, \tag{2}$$

тобто, допускається як обмеженість послідовності показників, так і наявність у неї будь-якої кількості точок скупчення. А у випадку класу D_0 від послідовності показників $\lambda=(\lambda_n)$ вимагається лише, щоб виконувалась умова (2) з $\beta=+\infty$.

Через D^β позначимо клас цілих рядів Діріхле з класу D, показники яких задовольняють умову (2) з $\beta\le+\infty$.

Відзначимо також результати зі статей [8, 9], які мають безпосереднє відношення до даної статті. Основним результатом зі статті [8] є таке твердження.

Теорема A ([8, Теорема 1]). *Нехай $F \in D^{+}(\lambda)$, а $a_j(x) \equiv a_j = const$, $t_j(x) = t_j = const$ $(j \in \{1, 2\})$. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n} < +\infty \tag{3}$$

з $\mu_n = \lambda_n$ і $S_1 \subset S_2$, то асимптотичні співвідношення

$$\begin{aligned} &\ln M(x, f, S_2) \geq \ln M(x, f, S_1) \geq \ln\{M(x, f, S_2) + o(M(x, F))\} + \\ &+ o(\ln M(x, F)) \end{aligned} \tag{4}$$

виконуються при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега.

У статті [9] подібне твердження отримане в класі D_0^+ у випадку, коли виконується умова (3) з $\mu_n = \ln |a_n|$.

Мета цієї статті — отримати подібне твердження в класі $D^{+\infty}$. Випадок класу D^{β}, $\beta < +\infty$, у даній статті залишаємо поза розглядом.

Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій; L_1 — підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$ такі, що $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x))$ $(x \to +\infty)$; відзначимо, що (див. [3]) в клас L_1 входять ті і лише ті функції $\Phi \in L$, обернені функції $\varphi(t)$ до яких задовольняють умову Карамати $(\forall c > 0)\colon$ $\varphi(ct) = O(\varphi(t))$ $(t \to +\infty)$.

Наведемо спочатку наступну теорему з [3], яка містить оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу $D^{+\infty}$ через максимальний член ряду. Доведення цієї теореми в ідейному плані є близьким до доведення відповідної теореми з [2], встановленої для абсолютно збіжних рядів Діріхле з класу D_0^+.

Надалі, для $F \in D^{+\infty}$ позначатимемо $\Phi(x) \stackrel{def}{=} \ln \mu(x, F)$, $\Phi_1(x) \stackrel{def}{=} \Phi(x)/x$, а через φ та φ_1 позначатимемо, відповідно, обернені функції до функцій Φ та Φ_1.

Логарифмічною мірою вимірної множини $E \subset [1, +\infty)$ називаємо величину $\ln -meas(E) \stackrel{def}{=} \int_E d\ln x$.

Лема 1 ([3]). *Нехай функція $F \in D^{+\infty}$, така що $\Phi_1 \in L_1$, а $v(t)$ — невід'ємна на $[0, +\infty)$ і додатна при $t \to +\infty$ функція така, що $\int_0^{+\infty} v(t)dt < +\infty$. Якщо $\ln n = o(\ln |a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то існує функція*

$c_1(t) \uparrow +\infty \quad (t \to +\infty)$ *така, що для всіх* $n \geq 0$ *і для всіх* $x > 0$ $(x \notin E, \ln -meas(E) < +\infty)$ *виконується нерівність*

$$|a_n|e^{x\lambda_n} \leq \mu(x,F)\exp\left\{-x\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n - t)\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}v(4t)dt\right\}. \tag{5}$$

де $\mu_n = -\ln|a_n|$, *а* $\nu = \nu(x,F) = \max\{n\colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$ *— центральний індекс ряду (1).*

Крім наведеного щойно твердження, істотно використовуватимемо наступний результат П. Турана.

Лема 2. ([12, p.70]) *Нехай* $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$, $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$ *і* $g(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \exp\{it\beta_j\}$. *Тоді*

$$\max\{|g(t)|:\ \alpha \leq t \leq \delta\} \leq \left(2e\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\beta}\right)^n \max\{|g(t)|:\ \beta \leq t \leq \gamma\}.$$

2 Зростання у горизонтальних смугах

Доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 1. *Якщо для функції* $F \in D^{+\infty}$ *виконуються умови* $\Phi_1 \in L_1$, $\Phi_1(x) = \frac{1}{x}\ln\mu(x,F)$, *і (3) з* $\mu_n = -\ln|a_n|$, *то знайдеться зростаюча до* $+\infty$ *функція* $p(x)$, $x \to +\infty$, *така, що для будь-яких функцій* $t_j(x)$ *і* $a_j(x)$ $(j \in \{1,2\})$ *таких, що*

$$\ln\frac{a_2(x)}{a_1(x)} \leq p(x) \quad (x \geq x_0) \tag{6}$$

і $S_1 \subset S_2$, *співвідношення*

$$\begin{aligned}&\ln M(x,F,S_2) \geq \ln M(x,F,S_1) \geq \ln\big(M(x,F,S_2) + o(\mu(x,F))\big)+\\&+o(\ln\mu(x,F))\end{aligned} \tag{7}$$

виконуються при $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *скінченної логарифмічної міри, тобто,* $\ln -meas(E) < +\infty$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $0=\mu_0\le\mu_n=-\ln|a_n|\nearrow+\infty$ $(1\le n\to+\infty)$. Нехай $n_1(t)=\sum_{\mu_n\ge t}1$ — лічильна функція послідовності (μ_n). Доведемо, що з умови (3) випливає

$$n=o(\mu_n)\ \ (n\to+\infty),\qquad \int^{\infty}t^{-2}n_1(t)dt<+\infty.$$

Зауважимо, що для $0<x<t$

$$\sum_{x\le\mu_n\le t}\frac{1}{\mu_n}=\int_x^t\frac{dn_1(u)}{u}=\frac{n_1(u)}{u}\bigg|_x^t+\int_x^t\frac{n_1(u)}{u^2}du.$$

Позаяк з умови (3) за критерієм Коші, завдяки монотонності послідовності (μ_n) маємо, що $n=o(\mu_n)$ $(n\to+\infty)$, то умова (3) і умова

$$\int_{\mu_{n_0}}^{\infty}\frac{n_1(u)}{u^2}du<+\infty.$$

є рівносильними.

Далі двічі застосуємо лему 1. Спочатку, за лемою 1 з функцією $v(t)=16t^{-2}n_1(t)$, приймаючи в нерівності (5) $n=0$, для всіх $x>0$ зовні множини E скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$\ln\mu(x,F)\ge x\int_0^{\mu_\nu}\frac{c_1(t)n_1(4t)}{t\varphi(t)}dt.\tag{8}$$

Зауважимо тепер, що

$$0\le\ln\mu(x,F)=-\mu_\nu+x\lambda_\nu\quad(x\ge x_0),\ \nu=\nu(x-0,F),$$

звідки

$$\mu_\nu\le x\lambda_\nu\quad(x\ge x_0),\ \nu=\nu(x-0,F).\tag{9}$$

Оскільки $(\forall\ n\ge0)(\forall\ x\in\mathbb{R})$: $-\mu_n+x\lambda_n\le\ln\mu(x,F)=\Phi(x)$, то при $x=\varphi(\mu_n)$ звідси отримуємо, що $\lambda_n\le\frac{\mu_n+\Phi(x)}{x}=\frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)}$ $(n\ge0)$. Застосовуючи останню нерівність до (9) отримаємо, що

$$x\ge\frac{1}{2}\varphi(\mu_\nu)\quad(x\ge x_0),\ \nu=\nu(x-0,F).\tag{10}$$

Застосувавши тепер нерівність (10) до (8), для всіх $x>x_0$ зовні множини E скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$\ln\mu(x,F)\ge n_1(3\mu_\nu)c_2(\mu_\nu),\tag{11}$$

де $c_2(t) = \frac{1}{2}c_1\left(\frac{3}{4}t\right)\ln\frac{4}{3}$. Оскільки умови

$$\int^{\infty} \frac{n_1(t)}{t^2}dt < +\infty \quad \text{та} \quad \int^{\infty} \frac{N_1(t)}{t^2}dt < +\infty,$$

$$\text{де } N_1(t) = \int_{t_0}^{t} n_1(x)d\ln x + \ln\frac{t}{t_0}n_1(t_0),$$

є рівносильні, то, застосовуючи лему 1 з функцією $v(t) = 16t^{-2}N_1(t)$, при $x \to +\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри маємо

$$\frac{1}{\mu(x,F)}\Sigma_1(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\mu(x,F)}\sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} |a_n|e^{x\lambda_n} \leq$$

$$\leq \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} \exp\left\{-xc_3(\mu_\nu)\int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - t}{t^2}\cdot\frac{N_1(4t)}{\varphi(t)}dt\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} \frac{1}{\mu_n}\exp\left(\max\{\psi(y):\ y \geq 3\mu_\nu\}\right), \tag{12}$$

де $\psi(y) = -xc_3(\mu_\nu)\int_{\mu_\nu}^{y} \frac{y-t}{t^2}\cdot\frac{N_1(4t)}{\varphi(t)}dt + \ln y$, а c_3 — функція c_1 з леми 1, вибрана за функцією $v(t) = 16t^{-2}N_1(t)$.

Оскільки $\psi'(y) = -xc_3(\mu_\nu)\displaystyle\int_{\mu_\nu}^{y} \frac{N_1(4t)}{t^2\varphi(t)}dt + \frac{1}{y}$ спадає на $[3\mu_\nu, +\infty)$, то

$$\psi'(y) \leq \psi'(3\mu_\nu) = -xc_3(\mu_\nu)\int_{\mu_\nu}^{3\mu_\nu} \frac{N_1(4t)}{t^2\varphi(t)}dt + \frac{1}{3\mu_\nu} \leq$$

$$\leq -\frac{2}{9}c_3(\mu_\nu)\frac{N_1(4\mu_\nu)}{\mu_\nu} + \frac{1}{3\mu_\nu} < 0$$

для всіх досить великих ν. Тому $\psi(y)$ спадає на $[3\mu_\nu, +\infty)$ і, отже, при $\nu \to +\infty$

$$\max\{\psi(y):\ y \geq 3\mu_\nu\} = \psi(3\mu_\nu) \leq$$

$$\leq -xc_3(\mu_\nu)\frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)}N_1(4\mu_\nu)\int_{\mu_\nu}^{2\mu_\nu} \frac{3\mu_\nu - t}{t^3}dt + \ln(3\mu_\nu) \leq$$

$$\leq -\frac{1}{16}c_3(\mu_\nu)N_1(4\mu_\nu) + \ln 3\mu_\nu,$$

звідки, скориставшись тим, що завдяки опуклості відносно логарифма функції $N_1(t)$ виконується $N_1(t)/\ln t \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, для всіх досить великих ν отримуємо $\max\{\psi(y):\ y\geq 3\mu_\nu\}\leq -\frac{1}{17}c_3(\mu_\nu)N_1(4\mu_\nu)$. Отже, з (12) при $x\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри одержуємо

$$\frac{1}{\mu(x,F)}\Sigma_1(x)=o\left(\exp\left\{-\frac{1}{17}c_3(\mu_\nu)N_1(4\mu_\nu)\right\}\right). \tag{13}$$

При фіксованому $x>0$ застосовуємо лему 2 з $\alpha=t_2(x)-a_2(x)$, $\beta=t_1(x)-a_1(x)$, $\gamma=t_1(x)+a_1(x)$, $\delta=t_2(x)+a_2(x)$, $b_j=a_j\exp\{x\lambda_j\}$,

$$\max\left\{\left|\sum\nolimits_{\mu_n\leq 3\mu_\nu}a_n\mathrm{e}^{x\lambda_n}\mathrm{e}^{it\lambda_n}\right|\ :|t-t_2(x)|\leq a_2(x)\right\}\leq$$
$$\leq\left(2\mathrm{e}\frac{a_2(x)}{a_1(x)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)}\max\left\{\left|\sum\nolimits_{\mu_n\leq 3\mu_\nu}a_n\mathrm{e}^{x\lambda_n}\mathrm{e}^{it\lambda_n}\right|\ :|t-t_1(x)|\leq a_1(x)\right\}.$$

Звідси,

$$M(x,F,S_2)\leq\max\left\{\left|\sum\nolimits_{\mu_n\leq 3\mu_\nu}a_n\mathrm{e}^{x\lambda_n}\mathrm{e}^{it\lambda_n}\right|\ :|t-t_2(x)|\leq a_2(x)\right\}+\Sigma_1(x)\leq$$
$$\leq\left(2\mathrm{e}\frac{a_2(x)}{a_1(x)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)}M(x,F,S_1)+\left(1+\left(2\mathrm{e}\frac{a_2(x)}{a_1(x)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)}\right)\cdot\Sigma_1(x). \tag{14}$$

Оскільки,

$$N_1(4t)\geq\int_{3t}^{4t}n_1(x)d\ln x\geq n_1(3t)\ln\frac{4}{3},$$

то вибираючи $c_4(\mu_\nu)=\frac{1}{17}\ln\frac{4}{3}c_3(\mu_\nu)$, та $p(x)=\min\left\{c_2(\mu_\nu),\ \dfrac{c_4(\mu_\nu)}{2}\right\}$, послідовно, за допомогою (11), при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри, одержуємо

$$\left(2\mathrm{e}\frac{a_2(x)}{a_1(x)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)}\leq\exp\left\{\big(\ln(2e)+p(x)\big)n_1(3\mu_\nu)\right\}=$$
$$=\exp\left\{O(c_2(\mu_\nu)n_1(3\mu_\nu))\right\}=\exp\{o(\ln\mu(x,F))\}. \tag{15}$$

Подібно, за допомогою (13) при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри маємо

$$\left(1+\left(2\mathrm{e}\frac{a_2(x)}{a_1(x)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)}\right)\Sigma_1(x)\leq$$

$$\leq o\left(\mu(x,F)\exp\{-(c_4(\mu_\nu)-p(x)+O(1))n_1(3\mu_\nu)\}\right) =$$
$$= o\left(\mu(x,F)\exp\{-(1/2+o(1))c_4(\mu_\nu)n_1(3\mu_\nu)\}\right) = o(\mu(x,F)). \qquad (16)$$

Поєднуючи тепер (14)–(16), при $x \to +\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри одержуємо

$$\ln\Big(M(x,F,S_2)+o(\mu(x,F))\Big) \leq \ln M(x,F,S_1)+o(\ln\mu(x,F)).$$

Теорему 1 доведено. □

Зауваження 1. *Співвідношення* (7), *взагалі кажучи, є сильнішим за співвідношення* (4). *Проте, за теоремою* 2, *доведеною в* [3], *у випадку, коли додатково* $(\frac{\ln n}{\mu_n})$ *є майже монотонно спадна,* $\ln M(x,F) = (1+o(1))\ln\mu(x,F)$ *при* $x \to +\infty$ *зовні множини скінченної логарифмічної міри. Тому, в рамках теореми* 1 *за вказаної додаткової умови, ці співвідношення є рівносильними.*

Відзначимо деякі наслідки з теореми 1.

Наслідок 1. *Нехай* $F \in H$ *і виконуються умови* $\Phi_1 \in L_1$, $\Phi_1(x) = \frac{1}{x}\ln\mu(x,F)$, (3) *з* $\mu_n = -\ln|a_n|$ *і*

$$a_n = |a_n|e^{i\theta_n}, \quad |\theta_n-\theta| \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \ \ (n \geq n_0), \quad \theta \in [-\pi;\pi). \qquad (17)$$

Тоді для кожної смуги $S = \cup_{x\in\mathbb{R}}S(x,t,a)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$ *при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри, виконується співвідношення*

$$\ln M(x,F) = (1+o(1))\ln M(x,F,S). \qquad (18)$$

Доведення. Доведення наслідку 1 здійснюємо подібно до того, як це робилося в [8, с. 683] при доведенні наслідку 2.

Справді,

$$|F(x-i\theta)| = \Big|\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{i(\theta_n-\theta)+x\lambda_n}\Big| \geq \mathrm{Re}\,\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{i(\theta_n-\theta)+x\lambda_n}\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{x\lambda_n}\cdot\cos(\theta_n-\theta) \geq \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{x\lambda_n}\cdot\cos\gamma \geq M(x,F)\cos\gamma.$$

Вибираючи тепер у теоремі 1 $S_1 = S$, а смугу S_2 таку, що містить S_1 і горизонтальну пряму $\{x - i\theta\colon x \in \mathbb{R}\}$, отримуємо, що $M(x, F, S_2) \geq M(x, F)\cos\gamma$, і тому за теоремою 1 при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри отримуємо

$$\ln M(x,F) = \ln M(x,F,S) \geq \ln\big(M(x,F,S_2) + o(M(x,F))\big)+$$
$$+o(\ln M(x,F)) \geq \ln\big(M(x,F)\cos\gamma + o(M(x,F))\big) + o(\ln M(x,F)) =$$
$$= \ln M(x,F) + o(\ln M(x,F)).$$

□

Наслідок 2. *Нехай* $F \in H$ *і виконуються умови* $\Phi_1 \in L_1$, $\Phi_1(x) = \frac{1}{x}\ln\mu(x,F)$, (3) *з* $\mu_n = -\ln|a_n|$ *і* (17). *Тоді для функції* $p(x) > 0$ *такої , що при* $x \to +\infty$

$$\left(\max\left\{\int_{\frac{\ln\mu(x,F)}{2x}}^{+\infty} t^{-2}n_1(t)dt,\ \ \int_{\frac{\ln\mu(x,F)}{2x}}^{+\infty} t^{-2}N_1(t)dt\right\}\right)^{\frac{1}{2}} = o\left(\frac{1}{p(x)}\right) \qquad (19)$$

і для будь-яких функцій $a(x) > 0$ *і* $t(x)$ *таких, що виконується умова*

$$\ln\left(1 + \frac{|t(x)| + |\theta|}{a(x)}\right) \leq p(x) \quad (x \geq x_0), \qquad (20)$$

співвідношення (18) *виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри, де* $M(x,F,S) = \max\{|F(x+it)|:\ |t - t(x)| \leq a(x)\}$.

Доведення. Для того, щоб отримати твердження наслідку 2, зауважимо спочатку, що функція $c_1(t)$ з леми 1 у доведенні теореми 1 з [3] вибирається

$$c_1(t) = c_1(t,v) = (l(t))^{-1/2}, \quad l(t)=\int_x^{+\infty} v(x),dx$$

а у доведенні теореми 1 лема 1 застосовувалась з $v(t)=v_1(t)=16t^{-2}n_1(t)$ та $v(t) = v_2(t) = 16t^{-2}N_1(t)$.

Далі, у доведенні теореми 1

$$p(x) = \min\left\{c_2(\mu_\nu),\ \frac{c_4(\mu_\nu)}{2}\right\},$$

де $c_2(t) = d_1 \cdot c_1(t, v_1), c_4(t) = d_2 \cdot c_1(t, v_2)$, d_1, d_2 — додатні сталі, тобто

$$p(x) = \min\Big\{d_1 \cdot c_1(\mu_\nu, v_1),\ d_2 \cdot \frac{c_1(\mu_\nu, v_2)}{2}\Big\}.$$

Зауважимо тепер, що оскільки поза послідовністю точок стрибка центрального індекса $\nu(x, F)$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\ln\mu(x, F)\right) = x^{-2}\mu_{\nu(x)}$, то $\frac{1}{x}\ln\mu(x, F) - \frac{1}{x_0}\ln\mu(x_0, F) = \int_{x_0}^{x} t^{-2}\mu_{\nu(t,F)}dt$, а, тому,

$$\frac{1}{x}\ln\mu(x, F) \le (1 + o(1))\mu_{\nu(x,F)} \quad (x \to +\infty),$$

звідки $\frac{1}{2x}\ln\mu(x, F) \le \mu_{\nu(x,F)} \quad (x \to +\infty)$. Отже, якщо виконується умова (19) і виконується умова (6), то виконується твердження теореми 1.

Виберемо тепер, як і у доведенні наслідку 1, смуги

$$S_1(x, t, a) = \{z = x + iy : |y - t(x)| \le a(x)\},$$

$$S_2(x, t_2, a_2) = \{z = x + iy : |y - t(x)| \le |t(x)| + |\theta| + a(x)\}.$$

Тоді, очевидно, що $S_1 = S$, $S_1 \cup \{x - i\theta \colon x \in \mathbb{R}\} \subset S_2$. Залишається тепер зауважити, що з умови (19) випливає умова (6) теореми 1 і завершити доведення дослівним повтором міркувань з доведення наслідку 1. $\square$

Твердження. *Умова* (17) *є істотною для того, щоб виконувалось твердження наслідку 1.*

Справді, для цього досить скористатись ідеєю побудови відповідної функції $F \in D^+$ з [8, с. 684–686]. Власне, нехай $q \in (1, 2)$. Означимо послідовності

$$\lambda_n = q^{q^n}, \quad r_n = \lambda_n^{\lambda_n} \quad (n \ge 0)$$

і розглянемо ряд Діріхле $F_q \in D^+$ вигляду

$$F_q(z) = f_2(z) - f_1(z), \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{r_n}e^{z\lambda_n}, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{r_n}e^{z(\lambda_n + 1/r_n)}.$$

Варто відзначити, що всі подальші міркування є модифікацією відповідних міркувань з [8, с. 684–686], з деякими виправленнями і доповненнями.

Далі ми будемо використовувати такий факт ([13, с. 19]): якщо для ряду Діріхле вигляду (1) виконується умова

$$\varkappa_n(F) \stackrel{def}{=} \frac{\ln|a_{n-1}| - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \nearrow \quad (n \geq n_0),$$

то для $x \in [\varkappa_n(F), \varkappa_{n+1}(F)]$ $(n \geq n_0)$

$$\mu(x, F) = |a_n| e^{x\lambda_n}.$$

Оскільки, очевидно, що $\varkappa_n(f_j) \sim q^n \ln q = \ln \lambda_n$ $(n \to +\infty)$, а також $\varkappa_n(f_1) < \varkappa_n(f_2)$ $(n \geq 0)$, то $\varkappa_n(f_1) < \varkappa_n(f_2) < \varkappa_{n+1}(f_1)\varkappa_{n+1}(f_2)$ для всіх досить великих n. Отже, для всіх $x \in [\varkappa_n(f_2), \varkappa_{n+1}(f_1))$ маємо $\nu(x, f_1) = \nu(x, f_2) = n$ та

$$\mu(x, f_2) = \mu(x, f_1) \exp\{\frac{\lambda_n}{r_n}\}.$$

Нехай $t_n = (1 + \delta) \ln \lambda_n,\ \tau_n = q(1 - \delta) \ln \lambda_n$, $\delta \in (0, \frac{q-1}{q+1})$. Подібно, як і в [8, с. 685–686] доведемо, що для кожної смуги $S = S(a, 0)$ $(a > 0)$, при $x \to +\infty$, $x \in E \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [t_n, \tau_n]$, виконується співвідношення

$$\ln M(x, F_q, S) = o(\ln M(x, F_q)). \tag{21}$$

Оскільки $\frac{q(1-\delta)}{1+\delta} > 1$, то для логарифмічної міри множини E маємо

$$\int_E \frac{dx}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[t_n, \tau_n]} \frac{dx}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{\tau_n}{t_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{q(1-\delta)}{1+\delta} = +\infty,$$

а також, за побудовою отримуємо, що умова (3) з $\mu_{2n} = \mu_{2n+1} = \ln r_n$ $(n \geq 0)$ виконується.

Доведемо тепер, що $\frac{1}{t} \ln \mu(t, F_q) \in L_1$. Для цього, очевидно досить встановити, що для всіх досить великих $t \geq t_0$ функція $t^{-2} \ln \mu(t, F_q)$ — неспадна. Оскільки $\mu(t, f_1) < \mu(t, f_2)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то $\mu(t, F_q) = \mu(t, f_2)$. Тому, для всіх $t \in [\varkappa_n(f_2), \varkappa_{n+1}(f_2)]$ і для всіх досить великих n виконується

$$\mu(t, F_q) = \mu(t, f_2) = \frac{1}{r_n} \exp\{(\lambda_n + 1/r_n)t\}.$$

Отже, для того, щоб функція $t^{-2}\ln\mu(t,f_2)$ на проміжку $[\varkappa_n(f_2),\varkappa_{n+1}(f_2)]$ для всіх досить великих n була монотонно зростаючою, досить, щоб для всіх досить великих n виконувалась нерівність $\varkappa_{n+1}(f_2)<\dfrac{2\ln r_n}{\lambda_n+1/r_n}$. Але, $\varkappa_{n+1}(f_2)\sim\ln\lambda_{n+1}=q\ln\lambda_n$, $\dfrac{2\ln r_n}{\lambda_n+1/r_n}\sim 2\ln\lambda_n$ $(n\to+\infty)$. Залишається пригадати, що $q<2$.

Доведемо тепер співвідношення (21). Зауважимо спочатку, що для всіх $x\in[t_n,\tau_n]$ і для всіх досить великих n виконується

$$\lambda_n^{\delta\lambda_n}=\frac{1}{r_n}e^{t_n\lambda_n}\le\frac{1}{r_n}e^{x\lambda_n}=\mu(x,f_1)\le\frac{1}{r_n}e^{\tau_n\lambda_n}=\lambda_n^{(q(1-\delta)-1)\lambda_n} \tag{22}$$

Оскільки функція $(e^{\tau_n}/x)^x$ зростає на проміжку $[q,\tau_n-1]$, а $\lambda_{n-1}<\tau_{n-1}$, то для всіх $x\in[t_n,\tau_n]$

$$\psi_1(x)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{r_k}e^{x\lambda_k}\le\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{e^{\tau_n}}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k}\le n\Big(\frac{e^{\tau_n}}{\lambda_{n-1}}\Big)^{\lambda_{n-1}}, \tag{23}$$

$$\psi_2(x)\overset{def}{=}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tfrac{1}{r_k}e^{x\lambda_k}\le\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\tfrac{e^{\tau_n}}{\lambda_{n+1}}\right)^{\lambda_k}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}e^{-\delta q\lambda_n\lambda_k}=$$
$$=o(1)\ (n\to+\infty).$$

Звідси та з (23), застосовуючи ліву нерівність з (22) отримуємо

$$\begin{aligned}&M(x,\psi_1+\psi_2)=o(\mu(x,f_1)),\quad \ln M(x,\psi_1+\psi_2)=\\&=o(\ln\mu(x,f_1))\quad (x\to+\infty,\ x\in E).\end{aligned} \tag{24}$$

Подібно для всіх $x\in[t_n,\tau_n]$ отримуємо

$$\psi_3(x)\overset{def}{=}\sum_{k\not n}\frac{1}{r_k}e^{x(\lambda_k+1/r_k)}\le\sum_{k=0}^{n-1}e^{\tau_n/r_0}\Big(\frac{e^{\tau_n}}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k}+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{+\infty}e^{\tau_n/r_{n+1}}\Big(\frac{e^{\tau_n}}{\lambda_{n+1}}\Big)^{\lambda_k}\le ne^{\tau_n/r_0}\Big(\frac{e^{\tau_n}}{\lambda_{n-1}}\Big)^{\lambda_{n-1}}+e^{\tau_n/r_{n+1}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}e^{-\delta q\lambda_n\lambda_k},$$

звідки, за допомогою лівої нерівності з (22) знову отримуємо

$$M(x,\psi_3)=o(\mu(x,f_1)),\quad \ln M(x,\psi_3)=o(\ln\mu(x,f_1))\ (x\to+\infty,\ x\in E). \tag{25}$$

Зауважимо тепер, що для функції $\psi_4(z) \stackrel{def}{=} F_q(z) - \frac{1}{r_n} e^{z\lambda_n}(e^{z/r_n} - 1)$ з (24) і (25) випливає, що

$$M(x, \psi_4) = o(\mu(x, f_1)), \quad \ln M(x, \psi_4) = o(\ln \mu(x, f_1)) \ (x \to +\infty,\ x \in E). \tag{26}$$

Нехай $y = \pi r_n$. При $x \to +\infty$ $(x \in E)$ отримуємо

$$\begin{aligned} M(x, F_q) \geq |F_q(x+iy)| \geq \frac{1}{r_n} e^{x\lambda_n} |e^{(x+iy)/r_n} - 1| - M(x, \psi_4) = \\ = \mu(x, f_1)(1 + e^{x/r_n}) + o(\mu(x, f_1)) = (2 + o(1))\mu(x, f_1). \end{aligned} \tag{27}$$

Далі, для кожної смуги $S = S(a, 0)$ $(a > 0)$, для всіх досить великих n виконується $a/r_n < \pi/2$ і

$$\begin{aligned} M(x, F_q, S) \leq \mu(x, f_1) \max\{|e^{(x+iy)/r_n} - 1| \colon |y| \leq a\} + M(x, \psi_4) = \\ = \mu(x, f_1)|e^{(x+ia)/r_n} - 1| + M(x, \psi_4). \end{aligned} \tag{28}$$

Оскільки $|e^{(x+iy)} - 1| \leq 2e^x |\sin \frac{y}{2}| + |e^x - 1|$ $(x, y \in \mathbb{R})$, то для всіх $x \in [t_n, \tau_n]$ при $n \to +\infty$ за допомогою правої нерівності з (22) отримуємо

$$\begin{aligned} \mu(x, f_1)|e^{(x+ia)/r_n} - 1| \leq \mu(x, f_1)\Big(2e^{\tau_n/r_n} \sin \frac{a}{2r_n} + e^{\tau_n/r_n} - 1\Big) \leq \\ \leq \lambda_n^{q(1-\delta)-2}\Big(a(1 + o(1)) + (1 + o(1))q(1 - \delta)\ln \lambda_n\Big) \end{aligned}$$

Звідси і з нерівності (28) для всіх $x \in [t_n, \tau_n]$ при $n \to +\infty$ отримуємо

$$M(x, F_q, S) \leq M(x, \psi_4) + o(1),$$

що разом з (27), (26) при $x \to +\infty$ $(x \in E)$ дає

$$\frac{\ln M(x, F_q, S)}{\ln M(x, F_q)} \leq (1 + o(1)) \frac{\ln M(x, \psi_4)}{\ln \mu(x, f_1)} = o(1).$$

Отже, істотність умови (17) в наслідку 1 встановлена.

Те ж саме є також правильним стосовно твердження наслідку 2.

Зауваження 2. *Побудована вище функція $F_q \in D^+$ має потрібні асимптотичні властивості в горизонтальній смузі для довільного $q > 1$, але умову $\frac{1}{t} \ln \mu(t, F_q) \in L_1$ при $q \geq 2$, вона не задовольняє, як її не задовольняє побудована в [8] функція, яка, власне, отримується з нашої функції при $q = 2$.*

Зауваження 3. *Наскільки істотною у наведених вище теоремі і наслідках є умова $\frac{1}{t}\ln\mu(t,F_q)\in L_1$ авторам в даний час невідомо.*

[1] *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Матем. заметки. — 1985. — **37**, №1. — С. 41–47.

[2] *Скаскив О. Б.* О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №11. — С.1532–1541.

[3] *Овчар І., Скасків О.* Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. — 2010. – **72**. — С.232–242.

[4] *Шеремета М. Н.* Об одном свойстве целых рядов Дирихле с убывающими коэффициентами // Укр. мат. ж. — 1993. — **45**, №6. — С.843–853.

[5] *Скаскив О. Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей // Матем. заметки. — 1994. — **56**, №5. — С.117–128.

[6] *Скасків О. Б., Стасюк Я. З.* Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле // Матем. студії. — 2009. — **31**, №1. — С.37–46.

[7] *Скасків О. Б., Стасюк Я. З.* Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Карпатські мат. публ. — 2009. — **1**, №1. — С.100–106.

[8] *Шеремета М.Н.* Рост в полосе целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1981. — **45**, №3. — С.674–687.

[9] *Скаскив О. Б.* О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. ж. — 1993. — **45**, №5. — С.681–694.

[10] *Сало Т., Скасків О.* Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле // Матем. Вісник НТШ. — 2007. — **3**. — С.764–574.

[11] *Долинюк М.* Про правильне зростання суперпозиції ряду Діріхле і зростаючої функції // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. — 2009. — **70**. — С.45–51.

[12] *Turan P.* Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. — Budapest, 1953. — 195 p.

[13] *Шеремета М.Н.* Цілі ряди ДІріхле. — К.: ІСДО, 1993. — 168 с.

THE GROWTH IN THE HORIZONTAL STRIPS ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH NON-MONOTONOUS EXPONENTS

Ihor OVCHAR[1], *Oleh SKASKIV*[2]

[1] Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,
15 Karpatska Str., Ivano-Frankivsk 76000, Ukraine

e-mail: *iovchar@hotmail.com*

[2] Ivan Franko National University of L'viv,
1 Universytets'ka Str., L'viv 79000, Ukraine
e-mail: *matstud@franko.lviv.ua*

For a entire Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, where sequence of the exponents such that $\{\lambda_n\colon n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, conditions for $\ln M(x,F,S) \sim \ln M(x,F)$ as $x \to +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d\ln x < +\infty$), where $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}$, $M(x,F,S) = \sup\{|F(x+iy)| : \ |y-t| \leq a\},\ a > 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$, are establish.