РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Марія МАГОЛА[1], *Петро ФІЛЕВИЧ*[2]

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060

e-mail: *marichka_stanko@ukr.net*

[2] Львівський національний університет ветеринарної медицини
та біотехнологій ім. С.З. Гжицького,
вул. Пекарська 50, Львів 79010

e-mail: *filevych@mail.ru*

Редакція отримала статтю 12 травня 2012 р.

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $f(z) = \sum c_n z^n$ — аналітична в крузі $|z| < \mathcal{R}$ функція, для якої $\sum |c_n|^2 r^{2n} \to +\infty$, $r \to \mathcal{R}$, $T_f(r)$ — характеристика Неванлінни f, $N_f(r, a)$ — усереднена лічильна функція a-точок f, а $(\omega_n(\omega))$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0, 1]$ випадкових величин. Доведено, що для довільної зростаючої до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функції h існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (r_n) така, що для випадкової аналітичної функції $f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i \omega_n(\omega)} c_n z^n$ майже напевно для кожного $a \in \mathbb{C}$ маємо $T_{f_\omega}(r_n) \le N_{f_\omega}(r_n, a) + h(T_{f_\omega}(r_n))$, $n \ge n_0(\omega, a)$.

УДК: 517.53; MSC 2010: 30B20, 30D20, 30D35
Ключові слова і фрази: аналітична функція, випадкова аналітична функція, розподіл значень, лічильна функція, усереднена лічильна функція, характеристика Неванлінни

1 Вступ

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множина невід'ємних цілих чисел, $\mathcal{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ для всіх $r \in (0, +\infty]$, $\ln^+ x = \ln \max\{x, 1\}$ для кожного $x \in [0, +\infty)$, а L — клас додатних, неспадних, необмежених на $[0, +\infty)$ функцій.

Як звично, якщо $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ і $E \subset \mathbb{R}$ — вимірна множина, то для $\mathcal{R} = +\infty$ ($\mathcal{R} < +\infty$) логарифмічною мірою цієї множини на $[0, \mathcal{R})$ називаємо інтеграл

$$\int_{E\cap[1,+\infty)} \frac{dr}{r} \quad \left(\int_{E\cap[0,\mathcal{R})} \frac{dr}{\mathcal{R}-r}\right),$$

Верхньою і нижньою щільностями множини E на $[0, \mathcal{R})$ називаємо відповідно границі

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \int_{E\cap[1,r)} \frac{dt}{r}, \ \underline{\lim_{r\to+\infty}} \int_{E\cap[1,r)} \frac{dt}{r}$$

$$\left(\overline{\lim_{r\to\mathcal{R}}} \int_{E\cap[0,r)} \frac{(\mathcal{R}-r)dt}{(\mathcal{R}-t)^2}, \ \underline{\lim_{r\to\mathcal{R}}} \int_{E\cap[0,r)} \frac{(\mathcal{R}-r)dt}{(\mathcal{R}-t)^2}\right).$$

Скажемо, що множина E має щільність d на $[0, \mathcal{R})$, якщо її верхня і нижня щільності на $[0, \mathcal{R})$ дорівнюють d. Легко довести, що кожна множина E скінченної логарифмічної міри на $[0, \mathcal{R})$ є щільності 0 на $[0, \mathcal{R})$.

Усі мероморфні (зокрема, аналітичні) в крузі функції, які розглядаються в даній роботі, вважаємо відмінними від тотожно сталих.

Будемо використовувати стандартні позначення теорії розподілу значень мероморфних функцій [1, 2]. Зокрема, якщо $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — мероморфна в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція і $r \in (0, \mathcal{R})$, то нехай $n_f(r)$ — лічильна функція полюсів функції f (тобто кількість полюсів f з урахуванням їх кратностей в $\overline{\mathcal{D}(r)}$); усереднену лічильну функцію полюсів, функцію відхилення f від ∞, характеристику Неванлінни і максимум модуля визначаємо відповідно за рівностями

$$N_f(r) = \int_0^r (n_f(t) - n_f(0))\frac{dt}{t} + n_f(0)\ln r,$$

$$m_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$T_f(r) = N_f(r) + m_f(r), \quad M_f(r) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Для довільного $a \in \mathbb{C}$ приймемо $n_f(r,a) := n_{\frac{1}{f-a}}(r)$, $N_f(r,a) := N_{\frac{1}{f-a}}(r)$, $m_f(r,a) := m_{\frac{1}{f-a}}(r)$, $T_f(r,a) := T_{\frac{1}{f-a}}(r)$. Крім того, для $r_0 \in (0,\mathcal{R})$, всіх $r \in [r_0,\mathcal{R})$ і кожного $K > 0$ покладемо

$$\overline{N}_f(r, r_0, K) = \sup_{|a|\le K} (N_f(r,a) - N_f(r_0,a)),$$

$$\underline{N}_f(r, r_0, K) = \inf_{|a|\le K} (N_f(r,a) - N_f(r_0,a)).$$

Нагадаємо також, що порядком мероморфної в $\mathcal{D}(+\infty) = \mathbb{C}$ функції f називається величина

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln T_f(r)}{\ln r}.$$

Нехай $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, f — мероморфна в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція і $r \in (0,\mathcal{R})$. Тоді, згідно з першою основною теоремою розподілу значень мероморфних функцій (див., наприклад, [2], с. 27–28),

$$|T_f(r,a) - T_f(r) + \ln|c_f(a)|| \le \ln^+ |a| + \ln 2 \tag{1}$$

де $c_f(a)$ – перший ненульовий коефіцієнт у розвиненні Лорана функції $f(z) - a$ в околі точки $z = 0$. Якщо характеристика Неванлінни $T_f(r)$ є необмеженою на $(0,\mathcal{R})$, то для кожного $a \in \mathbb{C}$ через $\delta_f(a)$ і $\Delta_f(a)$ позначимо відповідно неванліннів і валіронів дефект цієї функції в точці a, тобто

$$\delta_f(a) = \varliminf_{r\to\mathcal{R}} \frac{m_f(r,a)}{T_f(r)} = 1 - \varlimsup_{r\to\mathcal{R}} \frac{N_f(r,a)}{T_f(r)},$$

$$\Delta_f(a) = \varlimsup_{r\to\mathcal{R}} \frac{m_f(r,a)}{T_f(r)} = 1 - \varliminf_{r\to\mathcal{R}} \frac{N_f(r,a)}{T_f(r)}.$$

З огляду на (1), маємо

$$N_f(r,a) \le T_f(r) + \ln^+|a| + \ln 2 - \ln|c_f(a)|. \tag{2}$$

З (2) випливає, що $0 \le \delta_f(a) \le \Delta_f(a) \le 1$. Як звично (див., наприклад, [2], с. 147), число $a \in \mathbb{C}$ називаємо неванлінновим (валіроновим) винятковим значенням функції f, якщо $\delta_f(a) > 0$ ($\Delta_f(a) > 0$).

Добре відомо ([2], с. 158, 151), що для мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f множина її неванліннових виняткових значень є не більш як зліченною, а плоска лебегова міра множини валіронових виняткових значень дорівнює нулю. З іншого боку, правильні наступні теореми Н. У. Аракеляна [3] та Д. Дрейсіна і Д. Ф. Шіа [4] відповідно.

Теорема A. *Нехай $M \subset \mathbb{C}$ — довільна зліченна множина, а $\rho > \frac{1}{2}$ — довільне число. Тоді існує ціла функція f порядку $\rho_f = \rho$ така, що M є підмножиною множини неванліннових виняткових значень f.*

Теорема B. *Нехай $l \in L$ — довільна функція. Тоді існує ціла функція f така, що $T_f(r) = o(l(r)\ln^2 r)$, $r \to +\infty$, і множина валіронових виняткових значень функції f є потужності континуум.*

Зауважимо, що обмеження на зростання цілої функції в теоремах A і B є істотними: ціла функція f порядку $\rho_f \le \frac{1}{2}$ не має неванліннових виняткових значень [2, с. 269], а ціла функція f, для якої $T_f(r) = O(\ln^2 r)$, $r \to +\infty$, не має валіронових виняткових значень [2, с. 568].

Як виявляється, "більшість" аналітичних в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функцій з необмеженою на $(0,\mathcal{R})$ характеристикою Неванлінни $T_f(r)$ володіють такою ж властивістю, як і цілі функції порядку $\rho_f \le \frac{1}{2}$, тобто вони не мають неванліннових виняткових значень. Такий висновок можна зробити з результатів, отриманих в роботах [5]–[8] для випадкових аналітичних функцій. Перш ніж сформулювати ці результати, введемо додатково деякі позначення і означення.

Нехай $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $r \in (0,\mathcal{R})$. Для кожної аналітичної в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3}$$

покладемо

$$S_f(r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді, як випливає з наведеної нижче леми 2,

$$T_f(r) \le \frac{1}{2e} + \ln^+ S_f(r). \tag{4}$$

Правильна також нерівність $T_f(r) \le \max\left\{\frac{1}{2}, \ln S_f(r)\right\}$; див. [9].

Через $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ позначимо клас аналітичних в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функцій вигляду (3), що задовольняють умову $S_f(r) \to +\infty$ при $r \to \mathcal{R}$. Зауважимо, що клас $\mathcal{H}(+\infty)$ збігається з класом цілих функцій (відмінних від тотожно сталих).

Розглянемо деякий ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ і припустимо, що на ньому існує послідовність Штейнгауза $(\omega_n(\omega))$, тобто послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0,1]$ випадкових величин. Приклади таких ймовірнісних просторів і відповідних послідовностей Штейнгауза наведено в [10]. Надалі ймовірнісний простір і послідовність Штейнгауза вважаємо заданими і фіксованими. Крім того, кожну з випадкових величин $\omega_n(\omega)$ вважаємо визначеною для всіх $\omega \in \Omega$.

Поряд з аналітичною функцією (3) розглянемо випадкову аналітичну функцію

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i \omega_n(\omega)} c_n z^n. \tag{5}$$

А. К. Оффорд [5] довів таку теорему.

Теорема С. *Нехай K і δ — додатні числа, а $f \in \mathcal{H}(1)$ — аналітична функція вигляду* (3). *Тоді для випадкової аналітичної функції* (5) *майже напевно (м. н.) виконуються співвідношення*

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\overline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right)}{\ln S_f(r)} = 1, \quad \varlimsup_{r\to 1} \frac{\underline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right)}{\ln S_f(r)} = 1,$$

$$\varliminf_{r\to 1} \frac{\overline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right) - \underline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right)}{\ln^\delta S_f(r)} = 0.$$

Дві наступні теореми у випадку $\mathcal{R} = +\infty$ доведено в [6], а у випадку довільного $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ — в [7].

Теорема D. *Нехай $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*. Тоді для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. виконуються нерівності*

$$\ln S_f(r) \le \min\{N_{f_\omega}(r,0), T_{f_\omega}(r)\} + C_1 \ln\ln S_f(r), \quad r_0(\omega) \le r < \mathcal{R};$$
$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,0) + C_1 \ln N_{f_\omega}(r,0), \quad r_0(\omega) \le r < \mathcal{R},$$

де $C_1 > 0$ — абсолютна стала.

Теорема E. *Нехай $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*, $h \in L$, а (r_k) — додатна зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність. Тоді існує підпослідовність (r_{k_p}) така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. правильні нерівності*

$$\ln S_f(r_{k_p}) \le \min\{N_{f_\omega}(r_{k_p},0), T_{f_\omega}(r_{k_p})\} + h(\ln S_f(r_{k_p})), \quad p \ge p_0(\omega);$$
$$\ln S_f(r_{k_p}) \le N_{f_\omega}(r_{k_p},0) + h(N_{f_\omega}(r_{k_p},0)), \quad p \ge p_0(\omega).$$

Зауважимо, що з теореми D, а також з нерівностей (2) і (4), застосованих до функції f_ω, м. н. випливає рівність $\Delta_{f_\omega}(0) = 0$, тобто м. н. 0 не є валіроновим винятковим значенням для функції f_ω. Крім того, оскільки функцію $h \in L$ в теоремі E можна вибрати зростаючою як завгодно повільно, то з цієї теореми можемо зробити наступний висновок: для "більшості" аналітичних функцій $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ зростання характеристики $N_f(r,0)$ на деякій зростаючій до $\mathcal{R}$ послідовності значень r є близьким до зростання характеристики $\ln S_f(r)$.

Наступну теорему і наслідок з неї отримано в [8].

Теорема F. *Нехай $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*. Тоді існує функція $h \in L$ така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + C_2 \ln\ln S_f(R) + \ln\frac{R}{R-r} + h(|a|),$$
$$r_0(\omega) \le r < R < \mathcal{R},$$

де $C_2 > 0$ — абсолютна стала.

Наслідок A. *Нехай f — ціла функція вигляду* (3)*. Тоді існують функція $h \in L$ і множина E скінченної логарифмічної міри на $[0,+\infty)$*

такі, що для випадкової цілої функції (5) *м. н. для кожного* $a \in \mathbb{C}$ *виконується нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + C_3 \ln\ln S_f(r) + h(|a|), \quad r \ge r_0(\omega),\ r \notin E,$$

де $C_3 > 0$ *— абсолютна стала.*

З теореми C і наслідку A випливає, що якщо $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду (3), то для випадкової аналітичної функції (5) м. н. $\delta_{f_\omega}(a) = 0$ для кожного $a \in \mathbb{C}$, тобто м. н. функція f_ω не має неванліннових виняткових значень.

У даній роботі отримаємо точніші і гнучкіші результати, ніж наведені вище результати робіт [5]–[8]. Крім того, встановимо умови на зростання аналітичної функції $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ вигляду (3), за яких випадкова аналітична функція (5) м. н. не має валіронових виняткових значень.

2 Загальна теорема

Нехай f — мероморфна в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Покладемо $f^*(z) = zf'(z)$ для кожного $z \in \mathbb{C}$, а для довільних $r \in (0, \mathcal{R})$ та $a \in \mathbb{C}$ приймемо

$$\mathcal{E}_f(r,a) = \{\theta \in [0, 2\pi] : |f(re^{i\theta}) - a| \le 1\}.$$

Для вимірної множини $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ через $\mu(\mathcal{E})$ позначатимемо її лінійну міру Лебега.

Нехай $x_1, \ldots, x_n \in [0, +\infty)$. Далі без додаткових пояснень використовуємо добре відомі нерівності (див., наприклад, [2, с. 25])

$$\ln^+\left|\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu\right| \le \sum_{\nu=1}^{n} \ln^+|x_\nu|, \quad \ln^+\left|\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right| \le \sum_{\nu=1}^{n} \ln^+|x_\nu| + \ln n.$$

Основною в нашій роботі є наступна загальна теорема, яка буде використовуватись при доведенні практично всіх результатів, отриманих нижче для випадкових аналітичних функцій.

Теорема 1. *Нехай* $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ *— аналітична функція вигляду* (3), $r_0 \in (0, \mathcal{R})$ *— довільне фіксоване число таке, що* $S_f(r_0) > \max\{e, \sqrt{1 + |c_0|^2}\}$, *і*

$$l_f(r) = \min\left\{\ln\frac{R}{R-r} + \ln\ln S_f(R) : R \in [r, \mathcal{R})\right\}, \quad r_0 \le r < \mathcal{R}. \tag{6}$$

Тоді існують функції $h_1, h_2 \in L$ такі, що для випадкової аналітичної функції (5) *для кожного $\omega \in \Omega$ і всіх $a \in \mathbb{C}$ правильні нерівності*

$$\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r,a)) \le \frac{2\pi}{\ln \sqrt{S_f^2(r) - |c_0|^2}}(\ln S_f(r) - T_{f_\omega}(r) + h_1(|a|)),\ r_0 \le r < \mathcal{R}; \tag{7}$$

$$T_{f_\omega}(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + m_{f_\omega^*}(r,0) + \frac{\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r,a))}{2\pi} l_f(r) + h_2(|a|),\ r_0 \le r < \mathcal{R}. \tag{8}$$

З наведених далі міркувань буде випливати, що функції $h_1, h_2 \in L$, існування яких стверджується теоремою 1, можуть бути вибрані наступним чином:

$$h_1(x) = 2\ln^+ x + \ln^+ |c_0| + \frac{5}{2}\ln 2, \tag{9}$$

$$h_2(x) = 3\ln^+ x + 14 + \ln^+ m + \ln^+ |c_m| + \ln^+ |c_0| + m\ln^+ \frac{1}{r_0}, \tag{10}$$

де $m = n_{f-c_0}(0,0) = \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \ne 0\}$.

Теорема 1 є, фактично, безпосереднім наслідком з двох наступних теорем.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — аналітична в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція вигляду* (3)*, $r \in (0, \mathcal{R})$ і $a \in \mathbb{C}$. Тоді, якщо $S_f(r) > \sqrt{1 + |c_0|^2}$, то*

$$\mu(\mathcal{E}_f(r,a)) \le$$

$$\le \frac{2\pi}{\ln \sqrt{S_f^2(r) - |c_0|^2}} \left(\ln S_f(r) - T_f(r) + \ln^+ |c_0 - a| + \ln^+ |a| + \frac{3}{2}\ln 2 \right). \tag{11}$$

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція вигляду* (3)*, $a \in \mathbb{C}$ і $0 < r < R < \mathcal{R}$. Тоді*

$$T_f(r) \le N_f(r,a) + m_{f^*}(r,0) + \frac{\mu(\mathcal{E}_f(r,a))}{2\pi}\left(\ln \frac{R}{R-r} + \ln^+ T_f(R) \right) +$$

$$+12 + \ln^+ n_f(0,a) + 2\ln^+ |a| + \ln^+ |c_f(a)| + n_f(0,a)\ln^+ \frac{1}{R}.$$

Перш ніж доводити теореми 2, 3 і 1, встановимо ряд допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{F} \subset [0, 2\pi]$ — вимірна за Лебегом множина, u — невід'ємна, інтегровна на $[0, 2\pi]$ функція. Тоді*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}} \ln^+ u(\theta)d\theta \le \frac{1}{e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi}\ln^+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)d\theta\right). \tag{12}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{E} = \{\theta \in \mathcal{F} : u(\theta) > 1\}$. Якщо $\mu(\mathcal{E}) = 0$, то нерівність (12) тривіальна. Якщо ж $\mu(\mathcal{E}) > 0$, то, використовуючи (див., наприклад, [11, с. 58]) нерівність Йєнсена

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} \ln u(\theta)d\theta \le \ln\left(\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} u(\theta)d\theta\right),$$

отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}} \ln^+ u(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln u(\theta)d\theta \le \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} u(\theta)d\theta\right) \le$$
$$\le \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_0^{2\pi} u(\theta)d\theta\right) = \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\ln\frac{2\pi}{\mu(\mathcal{E})} + \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)d\theta\right).$$

Залишилось врахувати, що найбільше значення функції $y(x) = x\ln\frac{1}{x}$ на інтервалі $(0, +\infty)$ дорівнює $\frac{1}{e}$. □

Лема 2. *Нехай $\mathcal{F} \subset [0, 2\pi]$ — вимірна множина, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$ і f — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція вигляду* (3)*. Тоді*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}} \ln^+ |f(re^{i\theta})|d\theta \le \frac{1}{2e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi}\ln^+ S_f(r). \tag{13}$$

Щоб отримати лему 2, досить застосувати лему 1 до функції $u(\theta) = |f(re^{i\theta})|^2$ і врахувати рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = S_f^2(r).$$

Зауважимо, що якщо $\mathcal{F} = [0, 2\pi] \setminus \mathcal{E}_f(r, 0)$, то нерівність (13) збігається з нерівністю

$$T_f(r) \le \frac{1}{2e} + \frac{2\pi - \mu(\mathcal{E}_f(r, 0))}{2\pi}\ln^+ S_f(r), \tag{14}$$

з якої випливає нерівність (4), а також правильність наступної леми.

Лема 3. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — аналітична в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція і $r \in (0, \mathcal{R})$. Тоді, якщо $S_f(r) > 1$, то*

$$\mu(\mathcal{E}_f(r, 0)) \le \frac{2\pi}{\ln S_f(r)} \left(\ln S_f(r) - T_f(r) + \frac{1}{2e} \right). \tag{15}$$

Наступне твердження довели Д. Бенбоуренан та Р. Корхонен [12].

Лема А. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а g — мероморфна в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція така, що $g(0) = 1$. Тоді для довільних $\alpha, \beta \in (0, 1)$ правильна нерівність*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})} \right|^\alpha d\theta \le C(\alpha, \beta) \left(\frac{R}{R - r} T_g(R) \right)^\alpha, \quad 0 < r < R < \mathcal{R},$$

де

$$C(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{1 - \beta} \right)^\alpha + \frac{4 + \left(2^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + 2^{\frac{2+\alpha}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha}}{\beta^\alpha} \sec \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Лема 4. *Нехай $\mathcal{F} \subset [0, 2\pi]$ — вимірна множина, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а g — мероморфна в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція така, що $g(0) = 1$. Тоді*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}} \ln^+ \left| \frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})} \right| d\theta < 8 + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi} \ln^+ \left(\frac{R}{R - r} T_g(R) \right), \quad 0 < r < R < \mathcal{R}.$$

Доведення. Легко перевірити, що для сталої $C(\alpha, \beta)$ з леми А маємо $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 10 + 4\sqrt{10} < 23$. Тому, використовуючи лему 1 і лему А з $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}} \ln^+ \left| \frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})} \right|^{\frac{1}{2}} d\theta \le \frac{1}{e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi} \ln^+ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})} \right|^{\frac{1}{2}} d\theta \right) \le$$

$$\le \frac{1}{e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi} \ln^+ \left(23 \left(\frac{R}{R - r} T_g(R) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \le$$

$$\le \frac{1}{e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi} \left(\ln 23 + \ln^+ \left(\frac{R}{R - r} T_g(R) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \le$$

$$\le \frac{1}{e} + \ln 23 + \frac{\mu(\mathcal{F})}{4\pi} \ln^+ \left(\frac{R}{R - r} T_g(R) \right) < 4 + \frac{\mu(\mathcal{F})}{4\pi} \ln^+ \left(\frac{R}{R - r} T_g(R) \right),$$

звідки легко виводимо потрібну нерівність. Лему 4 доведено. □

Доведення теореми 2. Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — аналітична в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція вигляду (3), $r \in (0, \mathcal{R})$ і $a \in \mathbb{C}$. Припустимо, що $S_f(r) > \sqrt{1 + |c_0|^2}$, і доведемо нерівність (11).

Оскільки $S_{f-a}^2(r) = |c_0 - a|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = S_f^2(r) + |c_0 - a|^2 - |c_0|^2$, то

$$S_f^2(r) - |c_0|^2 \le S_{f-a}^2(r) \le S_f^2(r) + |c_0 - a|^2. \tag{16}$$

Скориставшись правою з нерівностей (16), маємо

$$\ln S_{f-a}(r) \le \frac{1}{2}\ln(S_f^2(r) + |c_0 - a|^2) \le \ln S_f(r) + \ln^+ |c_0 - a| + \frac{1}{2}\ln 2. \tag{17}$$

Крім того,

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta}) - a + a| d\theta \le T_{f-a}(r) + \ln^+ |a| + \ln 2. \tag{18}$$

Тому, використовуючи нерівність (15) з функцією $f - a$ замість f, ліву з нерівностей (16), а також (17) та (18), отримуємо

$$\mu(\mathcal{E}_f(r, a)) \le \frac{2\pi}{\ln S_{f-a}(r)}\left(\ln S_{f-a}(r) - T_{f-a}(r) + \frac{1}{2e}\right) \le$$
$$\le \frac{2\pi}{\ln\sqrt{S_f^2(r) - |c_0|^2}}\left(\ln S_f(r) - T_f(r) + \ln^+ |c_0 - a| + \ln^+ |a| + \frac{3}{2}\ln 2\right).$$

Теорему 2 доведено. □

Доведення теореми 3. Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція вигляду (3), $a \in \mathbb{C}$ і $0 < r < R < \mathcal{R}$. Покладемо

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{c_f(a) z^{n_f(0,a)}}.$$

Тоді, як легко перевірити, $g(0) = 1$ і

$$\frac{f^*(z)}{f(z) - a} = \frac{g^*(z)}{g(z)} + n_f(0, a), \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{R}).$$

Використовуючи лему 4 і позначення $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f(r,a)$, маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln^+ \left|\frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})}\right| d\theta \le 8 + \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi} \ln^+ \left(\frac{R}{R-r} T_g(R)\right) \le 8+$$
$$+\frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi} \ln^+ \left(\frac{R}{R-r}\left(T_f(R) + \ln^+|a| + \ln 2 + \ln^+ \frac{1}{|c_f(a)R^{n_f(0,a)}|}\right)\right) \le$$
$$\le 8+\frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\Big(\ln\frac{R}{R-r}+\ln^+T_f(R)+\ln^+\ln^+|a|+\ln^+\ln^+\frac{1}{|c_f(a)R^{n_f(0,a)}|}+\ln 4\Big)\le$$
$$\le 8 + \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{R-r} + \ln^+ T_f(R)\right) + \ln^+|a| + \ln^+\frac{1}{|c_f(a)R^{n_f(0,a)}|} + \ln 4 \le$$
$$\le 10+\ln^+|a| + \ln^+\frac{1}{|c_f(a)|} + n_f(0,a)\ln^+\frac{1}{R} + \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{R-r} + \ln^+ T_f(R)\right).$$

Звідси отримуємо таку оцінку

$$m_f(r,a) - m_{f^*}(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f^*(re^{i\theta})|}d\theta \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}}\ln\frac{1}{|f^*(re^{i\theta})|}d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln\left|\frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})} + n_f(0,a)\right| d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln^+\left|\frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})} + n_f(0,a)\right| d\theta \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln^+\left|\frac{g^*(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})}\right| d\theta + \ln^+ n_f(0,a) + \ln 2 \le$$
$$\le 11 + \ln^+ n_f(0,a) + \ln^+|a| + \ln^+\frac{1}{|c_f(a)|} + n_f(0,a)\ln^+\frac{1}{R}+$$
$$+\frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{R-r} + \ln^+ T_f(R)\right).$$

Враховуючи нерівність (1) і отриману оцінку, маємо

$$T_f(r) \le T_f(r,a) + \ln|c_f(a)| + \ln^+|a| + \ln 2 =$$
$$= N_f(r,a) + m_f(r,a) + \ln|c_f(a)| + \ln^+|a| + \ln 2 \le$$
$$\le N_f(r,a) + m_{f^*}(r,0) + \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{R-r} + \ln^+ T_f(R)\right) +$$
$$+12 + \ln^+ n_f(0,a) + 2\ln^+|a| + \ln^+|c_f(a)| + n_f(0,a)\ln^+\frac{1}{R}.$$

Теорему 3 доведено. □

Доведення теореми 1. Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду (3), $r_0 \in (0, \mathcal{R})$ — довільне фіксоване число таке, що $S_f(r_0) > \max\{e, \sqrt{1+|c_0|^2}\}$, $m = \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$, а $h_1, h_2 \in L$ — функції, визначені за рівностями (9), (10). Зафіксуємо довільні $\omega \in \Omega$ та $a \in \mathbb{C}$ і доведемо, що для випадкової аналітичної функції (5) правильні нерівності (7) та (8).

Оскільки $\ln^+ |e^{2\pi i\omega_0(\omega)}c_0 - a| + \ln^+ |a| + \frac{3}{2}\ln 2 \le \ln^+ |c_0| + \ln^+ |a| + \ln 2 + \ln^+ |a| + \frac{3}{2}\ln 2 = h_1(|a|)$, то нерівність (7) випливає з нерівності (11), застосованої до функції f_ω замість f.

Нехай $r_0 \le r < R < \mathcal{R}$. Щоб довести нерівність (8), зауважимо, що $n_{f_\omega}(0, a) \le m$, $|c_{f_\omega}(a)| \le \max\{|c_m|, |c_0| + |a|\}$. Тому, використовуючи теорему 3 і нерівність (4) з функцією f_ω замість f, отримуємо

$$T_{f_\omega}(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + m_{f^*_\omega}(r,0) + \frac{\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r,a))}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{R-r} + \ln\ln S_f(R) + \ln 2\right) +$$
$$+12 + \ln^+ m + 2\ln^+|a| + \ln^+|c_m| + \ln^+(|c_0| + |a|) + m\ln^+\frac{1}{r_0} \le$$
$$\le N_{f_\omega}(r,a) + m_{f^*_\omega}(r,0) + \frac{\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r,a))}{2\pi}\left(\ln\frac{R}{R-r} + \ln\ln S_f(R)\right) +$$
$$+\ln 2 + 12 + \ln^+ m + 2\ln^+|a| + \ln^+|c_m| + \ln^+|c_0| + \ln^+|a| + \ln 2 + m\ln^+\frac{1}{r_0},$$

звідки й випливає (8). Теорему 1 доведено. □

3 Зростання усередненої лічильної функції зовні малої множини

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ і $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду (3). Надалі вважатимемо, що $r_0 \in (0, \mathcal{R})$ — деяке фіксоване число таке, що $S_f(r_0) > \max\{e, \sqrt{1+|c_0|^2}\}$, l_f — функція, визначена за (6), а $h_1, h_2 \in L$ — функції, визначені за (9), (10).

У цій частині нашої роботи встановимо оцінки знизу для усередненої лічильної функції $N_{f_\omega}(r, a)$, які виконуються м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ зовні малих виняткових множин. Зокрема, покажемо, що оцінку виняткової множини E в наслідку A можна істотно уточнити, а також доведемо твердження типу наслідку A для функцій з класу $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ за певних умов на їх зростання у випадку скінченного $\mathcal{R}$. Ці результати випливатимуть з наступної теореми і отриманих далі тверджень про оцінки виняткових множин у деяких співвідношеннях для дійсних функцій.

Теорема 4. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ і $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду (3). Тоді для випадкової аналітичної функції (5) м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і $r \in [r_0(\omega), \mathcal{R})$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r, a) + C_4 \ln\ln S_{f^*}(r) + \frac{C_4 \ln\ln S_f(r) + 4\ln^+|a|}{\ln S_f(r)} l_f(r) + 3\ln^+|a|,$$

де $C_4 > 0$ — абсолютна стала.

Доведення. Застосовуючи нерівності (1) та (4) до функції f^*_ω замість f, а також теорему D до функції f^* замість f, м. н. для всіх $r \in [r_1(\omega), \mathcal{R})$ маємо

$$m_{f^*_\omega}(r, 0) = T_{f^*_\omega}(r, 0) - N_{f^*_\omega}(r, 0) \le T_{f^*_\omega}(r) - \ln|c_{f^*}(0)| + \ln 2 - N_{f^*_\omega}(r, 0) \le$$
$$\le \frac{1}{2e} + \ln S_{f^*}(r) - \ln|c_{f^*}(0)| + \ln 2 - \ln S_{f^*}(r) + C_1 \ln\ln S_{f^*}(r) \le$$
$$\le 2C_1 \ln\ln S_{f^*}(r).$$

Далі за теоремами 1 і D, згідно з (9), м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ отримуємо

$$\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r, a)) \le \frac{4\pi(2C_1 \ln\ln S_f(r) + 2\ln^+|a|)}{\ln S_f(r)}, \quad r_2(\omega) \le r < \mathcal{R}.$$

Використовуючи теоремами D та 1, а також (10) і встановлені вище оцінки для $m_{f^*_\omega}(r, 0)$ та $\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r, a))$, м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і кожного $r \in [r_0(\omega), \mathcal{R})$ маємо

$$\ln S_f(r) \le T_{f_\omega}(r) + C_1 \ln\ln S_f(r) \le$$
$$\le N_{f_\omega}(r, a) + m_{f^*_\omega}(r, 0) + \frac{\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r, a))}{2\pi} l_f(r) + 3\ln^+|a| + 2C_1 \ln\ln S_f(r) \le$$
$$\le N_{f_\omega}(r, a) + 4C_1 \ln\ln S_{f^*}(r) + \frac{2(2C_1 \ln\ln S_f(r) + 2\ln^+|a|)}{\ln S_f(r)} l_f(r) + 3\ln^+|a|.$$

Залишилось прийняти $C_4 = 4C_1$. Теорему 4 доведено. $\square$

Лема 5. *Нехай* $-\infty < x_0 < a \le +\infty$, *а функції* $h(x)$, $u(x)$ *та* $\varphi(u)$ *такі, що:*

1) h *— додатна на* $[x_0, a)$, *інтегровна на* $[x_0, b]$ *для кожного* $b \in (x_0, a)$*;*

2) u *— неспадна на* $[x_0, a)$*;*

3) φ *— додатна, неспадна на* $[u(x_0), u(a))$.

Тоді, якщо D *— множина точок* $x \in [x_0, a)$ *таких, що існує* $u'(x)$, *і* $b \in (x_0, a]$, *то для множини* $E(b) = \{x \in [x_0, b) \cap D : u'(x) \ge h(x)\varphi(u(x))\}$, *правильна оцінка*

$$\int_{E(b)} h(x)dx \le \int_{u(x_0)}^{u(b)} \frac{du}{\varphi(u)}.$$

Доведення. Маємо

$$\int_{E(b)} h(x)dx \le \int_{E(b)} \frac{u'(x)}{\varphi(u(x))}dx \le \int_{x_0}^{b} \frac{u'(x)}{\varphi(u(x))}dx \le \int_{u(x_0)}^{u(b)} \frac{du}{\varphi(u)},$$

що й вимагалось. □

Лема 6. *Нехай* $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ *— аналітична функція вигляду* (3), h *— додатна на* $[r_0, \mathcal{R})$, *інтегровна на* $[r_0, R]$ *для кожного* $R \in (r_0, \mathcal{R})$ *функція, а функція* $\psi \in L$ *така, що* $\int_0^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty$. *Тоді*

$$S_{f^*}^2(r) < h(r)\psi\left(h(r)\left(\psi\left(S_f^2(r)\right)\right)\right)$$

для всіх $r \in [r_0, \mathcal{R})$ *зовні деякої вимірної множини* E *такої, що* $\int_E \frac{h(r)}{r}dr < +\infty$.

Доведення. Для кожного $r \in [0, \mathcal{R})$ нехай

$$u(r) = S_f^2(r), \quad v(r) = ru'(r) = 2\sum_{n=0}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n}, \quad w(r) = rv'(r) = 4S_{f^*}^2(r). \tag{19}$$

Розглянемо множини

$$E_1 = \left\{r \in [r_0, \mathcal{R}) : u'(r) \ge \frac{h(r)}{r}\psi(u(r))\right\},$$

$$E_2 = \left\{r \in [r_0, \mathcal{R}) : v'(r) \ge \frac{4h(r)}{r}\psi(v(r))\right\}$$

і покладемо $E = E_1 \cup E_2$. За лемою 5 маємо $\int_{E_1} \frac{h(r)}{r} dr < +\infty$, $\int_{E_2} \frac{h(r)}{r} dr < +\infty$, а тому й $\int_E \frac{h(r)}{r} dr < +\infty$. Крім того, для всіх $r \in [r_0, \mathcal{R})$ зовні множини E отримуємо $S^2_{f^*}(r) = \frac{1}{4} w(r) = \frac{1}{4} r v'(r) < h(r)\psi(v(r)) = h(r)\psi(ru'(r)) \le h(r)\psi\left(h(r)\left(\psi(u(r))\right)\right)$. □

Тепер нам буде потрібна така класична теорема Бореля-Неванлінни (див., наприклад, [2], с. 120).

Теорема G. *Нехай $u(x)$ — неперервна, неспадна, необмежена на $[x_0, +\infty)$ функція, $u_0 = u(x_0)$, а $\varphi(u)$ — неперервна, додатна, неспадна, необмежена на $[u_0, +\infty)$ функція, для якої $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty$. Тоді для всіх $x \ge x_0$ зовні множини E скінченної міри виконується нерівність*

$$u\left(x + \frac{1}{\varphi(u(x))}\right) < u(x) + 1. \tag{20}$$

Використовуючи теорему Бореля–Неванлінни, доведемо наступну більш загальну теорему.

Теорема 5. *Нехай $-\infty < x_0 < a \le +\infty$, а функції $H(x)$, $u(x)$ та $\varphi(u)$ такі, що:*

1) H — неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $[x_0, a)$;

2) u — неспадна, необмежена на $[x_0, a)$;

3) φ — додатна, неспадна, необмежена на $[u_0, +\infty)$ і $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty$, де $u_0 = u(x_0)$.

Тоді для множини

$$E = \left\{ x \in [x_0, a) : u\left(H^{-1}\left(H(x) + \frac{1}{\varphi(u(x))}\right)\right) \ge u(x) + 1 \right\}$$

правильна оцінка $\int_E dH(x) < +\infty$.

Доведення. Насамперед доведемо, що умови неперервності функцій $u(x)$ та $\varphi(u)$ в теоремі G зайві.

Нехай, отже, $u(x)$ — неспадна, необмежена на $[x_0, +\infty)$ функція, $u_0 = u(x_0)$, а $\varphi(u)$ — додатна, неспадна, необмежена на $[u_0, +\infty)$ функція, для якої $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty$.

Покладемо $v(x) = [2u(x)]$, $x \ge x_0$. Функція $v(x)$ є неспадною на $[x_0, +\infty)$ і приймає лише цілі значення. З огляду на це, дана функція є неперервною на $[x_0,+\infty)$ за винятком деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності точок розриву першого роду. Враховуючи цей факт, легко обґрунтувати існування неперервної, неспадної на $[x_0,+\infty)$ функції $w(x)$ і множини F_1 скінченної міри таких, що для всіх $x \ge x_0$ правильна нерівність $v(x) \le w(x)$, а для всіх $x \ge x_0$ таких, що $x \notin F_1$, маємо рівність $v(x) = w(x)$. Далі покладемо $\alpha(u) = [\varphi(u)]$, $u \ge u_0$, і нехай

$$\beta(u) = \begin{cases} \alpha(u-1) - \frac{1}{2}\alpha(u_0), & \text{якщо} \quad u \ge u_0 + 1; \\ \frac{1}{2}\alpha(u_0), & \text{якщо} \quad u_0 \le u < u_0 + 1. \end{cases}$$

Легко довести (геометрично це очевидно) існування неперервної, неспадної на $[u_0,+\infty)$ функції ψ такої, що $\beta(u) \le \psi(u) \le \alpha(u)$ для кожного $u \ge u_0$. Зрозуміло, що для цієї функції буде виконуватись умова $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty$ і, як наслідок, умова

$$\int_{2u_0}^{+\infty} \frac{du}{\psi\left(\frac{1}{2}u\right)} < +\infty.$$

Отже, згідно з теоремою G, для всіх $x \ge x_1 > x_0$ зовні деякої множини F_2 скінченної міри маємо $w\left(x + \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}w(x)\right)}\right) < w(x) + 1$.

Покладемо $F = F_1 \cup F_2 \cup [x_0, x_1]$. Тоді множина F також має скінченну міру і для всіх $x \ge x_0$ зовні цієї множини

$$2u\left(x + \frac{1}{\varphi\left(u(x)\right)}\right) - 1 \le 2u\left(x + \frac{1}{\psi\left(u(x)\right)}\right) - 1 \le v\left(x + \frac{1}{\psi\left(u(x)\right)}\right) \le$$

$$\le w\left(x + \frac{1}{\psi\left(u(x)\right)}\right) \le w\left(x + \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}w(x)\right)}\right) < w(x) + 1 = v(x) + 1 \le 2u(x) + 1,$$

звідки й випливає (20).

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 5. Розглянемо відображення $y = H(x)$, $x \in [x_0, a)$, і нехай $y_0 = H(x_0)$. При такому відображенні образом множини E буде множина

$$F = \left\{ y \ge y_0 : u\left(H^{-1}\left(y + \frac{1}{\varphi(u(H^{-1}(y)))}\right)\right) \ge u(H^{-1}(y)) + 1 \right\},$$

яка за теоремою G, з урахуванням сказаного вище, має скінченну міру (теорему G застосовуємо до функції $u(H^{-1}(y))$ замість $u(x)$). Тоді $\int_E dH(x) = \int_F dy < +\infty$. Теорему 5 доведено. $\square$

Лема 7. *Нехай f — трансцендентна ціла функція вигляду* (3). *Тоді існує функція $\alpha \in L$ така, що для множини $F = \{r \geq r_0 : l_f(r) \geq \ln S_f(r)\}$ маємо $\int_F r^{\alpha(r)} dr < +\infty$.*

Доведення. Спочатку зафіксуємо довільне $k \in \mathbb{N}$ і доведемо, що $c_k := \int_F r^k dr < +\infty$.

Нехай $m = k + 1$. Для всіх $r \geq r_0$ покладемо $R(r) = r + \frac{r}{\sqrt{S_f(r)}-1}$, $\varrho(r) = \left(r^m + \frac{1}{\ln^2 S_f(r)}\right)^{\frac{1}{m}}$. З огляду на те, що для трансцендентної цілої функції f виконується співвідношення

$$\ln r = o(\ln S_f(r)), \quad r \to +\infty, \tag{21}$$

визначеною є величина $r_1 = \min\{r \geq r_0 : mr^m \ln^2 S_f(r) \leq \sqrt{S_f(r)} - 1\}$. Тоді для всіх $r \geq r_1$ матимемо

$$\varrho(r) = r\left(1 + \frac{1}{r^m \ln^2 S_f(r)}\right)^{\frac{1}{m}} \geq r\left(1 + \frac{1}{mr^m \ln^2 S_f(r)}\right) \geq$$

$$\geq r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{S_f(r)} - 1}\right) = R(r).$$

Скориставшись теоремою 5 з $H(r) = r^m$, $u(r) = \ln S_f(r)$ і $\varphi(u) = u^2$, бачимо, що для множини $F_1 = \{r \geq r_1 : \ln S_f(\varrho(r)) \geq \ln S_f(r) + 1\}$ правильна оцінка $\int_{F_1} r^k dr < +\infty$.

Нехай тепер $r \geq r_1$ — довільне число таке, що $r \notin F_1$. Тоді

$l_f(r) \leq \ln \frac{R(r)}{R(r)-r} + \ln\ln S_f(\varrho(r)) < \frac{1}{2} \ln S_f(r) + \ln(\ln S_f(r) + 1) \leq \ln S_f(r)$,

тобто $r \notin F$. Отже, $F \subset F_1 \cup [r_0, r_1]$, а тому $c_k := \int_F r^k dr < +\infty$.

Далі розглянемо довільну зростаючу до $+\infty$ послідовність (s_k) таку, що $s_1 \geq r_0$ і $s_k \geq 2^k c_{k+1}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що існує функція $\alpha \in L$ така, що $\alpha(r) \leq k$ для всіх $r \in [s_k, s_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\int_F r^{\alpha(r)} dr = \int_{F \cap [r_0, s_1)} r^{\alpha(r)} dr + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F \cap [s_k, s_{k+1})} r^{\alpha(r)} dr \leq$$

$$\leq \int_{r_0}^{s_1} r^{\alpha(r)} dr + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F \cap [s_k, s_{k+1})} r^k dr \leq$$

$$\leq \int_{r_0}^{s_1} r^{\alpha(r)} dr + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k} \int_{E \cap [s_k, s_{k+1})} r^{k+1} dr \leq \int_{r_0}^{s_1} r^{\alpha(r)} dr + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{s_k} < +\infty.$$

$\square$

Лема 8. *Нехай* $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, f *— аналітична в* $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ *функція вигляду* (3) *і* $p > 1$. *Тоді для множини*

$$F = \left\{ r \in [r_0, \mathcal{R}) : l_f(r) \geq p \ln \frac{1}{\mathcal{R} - r} + 4 \ln \ln S_f(r) \right\}$$

справджується оцінка $\int_F \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$.

Доведення. Нехай $m = p - 1$. Для всіх $r \in [r_0, \mathcal{R})$ покладемо

$$H(r) = \frac{1}{(\mathcal{R} - r)^m}, \; y(r) = \frac{(\mathcal{R} - r)^m}{\ln^2 S_f(r)}, \; R(r) = H^{-1}\left(H(r) + \frac{1}{\ln^2 S_f(r)} \right).$$

Провівши елементарні перетворення і врахувавши, що $y(r) \to 0$, $r \to \mathcal{R}$, отримуємо

$$R(r) - r = (\mathcal{R} - r) \frac{(1 + y(r))^{\frac{1}{m}} - 1}{(1 + y(r))^{\frac{1}{m}}} \sim (\mathcal{R} - r) \frac{y(r)}{m} = \frac{(\mathcal{R} - r)^p}{m \ln^2 S_f(r)}, \quad r \to \mathcal{R}. \tag{22}$$

Згідно з теоремою 5, застосованою до функцій $H(r)$, $u(r) = \ln S_f(r)$ і $\varphi(u) = u^2$, для множини $F_1 = \{r \in [r_0, \mathcal{R}) : \ln S_f(R(r)) \geq \ln S_f(r) + 1\}$ маємо $\int_{F_1} \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$.

Якщо r є достатньо близьким до $\mathcal{R}$ (скажімо, $r \in [r_1, \mathcal{R})$, де $r_0 \leq r_1 < \mathcal{R}$) і $r \notin F_1$, то, скориставшись (22), матимемо

$$l_f(r) \leq \ln \frac{R(r)}{R(r) - r} + \ln \ln S_f(R(r)) < \ln \mathcal{R} + \ln \frac{m \ln^2 S_f(r)}{(\mathcal{R} - r)^p} +$$
$$+ \ln(\ln S_f(r) + 1) \leq p \ln \frac{1}{\mathcal{R} - r} + 4 \ln \ln S_f(r),$$

тобто $r \notin F$. Отже, $F \subset F_1 \cup [r_0, r_1]$, а тому $\int_F \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$. Лему 8 доведено. $\square$

Лема 9. *Нехай* $\delta > 0$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, *а* f *— аналітична в* $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ *функція вигляду* (3) *така, що*

$$\varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln S_f(r)}{\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}} > \delta. \tag{23}$$

Тоді множина

$$X = \left\{ r \in [r_0, \mathcal{R}) : \ln \frac{1}{\mathcal{R} - r} \geq \frac{1}{\delta} \ln S_f(r) \right\}$$

має нижню логарифмічну щільність 0 *на* $[0, \mathcal{R})$.

Доведення. Досить довести, що множина $X' = [0, \mathcal{R}) \setminus X$ має верхню логарифмічну щільність 1 на $[0, \mathcal{R})$. Нема що доводити, якщо

$$\varliminf_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln S_f(r)}{\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}} > \delta, \tag{24}$$

оскільки в цьому випадку існує $r_1 \in [r_0, \mathcal{R})$ таке, що $[r_1, \mathcal{R}) \subset X'$, а логарифмічна щільність півінтервалу $[r_1, \mathcal{R})$ на $[0, \mathcal{R})$ дорівнює 1.

Припустимо, що умова (24) не виконується. Тоді, згідно з (23), для деяких $b > a > \delta$ графік неперервної на $[r_0, \mathcal{R})$ функції $y(r) = \frac{\ln S_f(r)}{\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}}$ перетинає кожну з прямих $y = a$ і $y = b$ безліч разів. Враховуючи цей факт, легко обґрунтувати існування зростаючих до $\mathcal{R}$ послідовностей (s_n) та (t_n) таких, що $r_0 < s_n < t_n < s_{n+1}$, $y(s_n) = b$, $y(t_n) = a$, $y([s_n, t_n]) \subset [a, b]$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що $\cup_{n=0}^{\infty} [s_n, t_n] \subset X'$. Крім того,

$$\ln \frac{1}{\mathcal{R} - t_n} = \frac{\ln S_f(t_n)}{a} > \frac{\ln S_f(s_n)}{a} = \frac{b}{a} \ln \frac{1}{\mathcal{R} - s_n},$$

звідки отримуємо $\mathcal{R} - t_n < (\mathcal{R} - s_n)^{\frac{b}{a}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже,

$$\varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \int_{X' \cap (0,r)} \frac{(\mathcal{R} - r)dt}{(\mathcal{R} - t)^2} \geq \varlimsup_{n \to \infty} \int_{X' \cap (s_n, t_n)} \frac{(\mathcal{R} - t_n)dt}{(\mathcal{R} - t)^2} = \varlimsup_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\mathcal{R} - t_n}{\mathcal{R} - s_n}\right) = 1,$$

тобто верхня щільність множини X' на $[0, \mathcal{R})$ дорівнює 1. □

Застосуємо отримані твердження для встановлення оцінок знизу для усередненої лічильної функції $N_{f_\omega}(r, a)$, які виконуються м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ зовні малих виняткових множин. Розглянемо спочатку випадок цілих функцій.

Нехай, отже, $f \in \mathcal{H}(+\infty)$. Якщо функція f є многочленом степеня $n \in \mathbb{N}$, то елементарні міркування показують, що $\ln S_f(r) = n \ln r + \ln |c_n| + o(1)$, а також $T_{f_\omega}(r) = n \ln r + \ln |c_n| + o(1)$ рівномірно за $\omega \in \Omega$ при $r \to +\infty$. Крім того, $m_{f_\omega^*}(r, 0) = 0$ для всіх $r \geq r_1$ і $\omega \in \Omega$. Тому, враховуючи теорему 1, для всіх $\omega \in \Omega$, $a \in \mathbb{C}$ і $r \geq r_2$ послідовно отримуємо

$$l_f(r) = \ln \frac{2r}{2r - r} + \ln \ln S_f(2r) \leq 2 \ln \ln S_f(r);$$

$$\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r,a)) \le \frac{4\pi(1+h_1(|a|))}{\ln S_f(r)};$$

$$\ln S_f(r) \le T_{f_\omega}(r) + \frac{1}{2} \le N_{f_\omega}(r,a) + \frac{\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(r,a))}{2\pi} l_f(r) + h_2(|a|) + \frac{1}{2} \le$$

$$\le N_{f_\omega}(r,a) + \frac{1}{2} + h_1(|a|) + h_2(|a|) + \frac{1}{2} = N_{f_\omega}(r,a) + 1 + h_1(|a|) + h_2(|a|).$$

Отже, згідно з (9) і (10), для всіх $\omega \in \Omega$ і $a \in \mathbb{C}$ маємо

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + C_f + 5\ln^+|a|, \quad r \ge r_3, \tag{25}$$

де C_f — стала, залежна лише від многочлена f. З огляду на нерівність (25), наступна теорема потребуватиме доведення лише для трансцендентних цілих функцій.

Теорема 6. *Нехай f — ціла функція вигляду* (3). *Тоді існують функція $\alpha \in L$ і вимірна множина $E \subset [0,+\infty)$ такі, що $\int_E r^{\alpha(r)}dr < +\infty$ і для випадкової цілої функції* (5) *м. н. для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + C_5 \ln\ln S_f(r) + 7\ln^+|a|, \quad r \ge r_0(\omega),\ r \notin E,$$

де $C_5 > 0$ — абсолютна стала.

Доведення. Нехай f — трансцендентна ціла функція вигляду (3). За лемою 7 існують функція $\alpha \in L$ і вимірна множина $F \subset [r_0,+\infty)$ такі, що $\int_F r^{\alpha(r)}dr < +\infty$ і

$$l_f(r) < \ln S_f(r), \quad r \ge r_0,\ r \notin F. \tag{26}$$

При цьому, з огляду на співвідношення (21), можемо вважати, що $r^{\alpha(r)+1} \le S_f(r)$ для всіх $r \ge r_0$.

З леми 6, застосованої до функцій $h(r) = r^{\alpha(r)+1}$ і

$$\psi(u) = \begin{cases} u^2, & \text{якщо} \quad u \ge 1; \\ 1, & \text{якщо} \quad 0 \le u \le 1, \end{cases} \tag{27}$$

випливає існування вимірної множини $G \subset [r_0,+\infty)$ такої, що справджуються нерівності $\int_G r^{\alpha(r)}dr < +\infty$ і

$$S^2_{f^*}(r) < h^3(r)S_f^8(r) \le S_f^{11}(r), \quad r \ge r_0,\ r \notin G. \tag{28}$$

Покладемо $E = F \cup G \cup [0, r_0]$. Зрозуміло, що $\int_E r^{\alpha(r)} dr < +\infty$. Використовуючи теорему 4, а також співвідношення (26) і (28), для випадкової цілої функції (5) м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і $r \in [r_0(\omega), +\infty) \setminus E$ отримуємо $\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r, a) + C_4 \ln\ln S_f^6(r) + C_4 \ln\ln S_f(r) + 4\ln^+ |a| + 3\ln^+ |a| \le N_{f_\omega}(r, a) + 3C_4 \ln\ln S_f(r) + 7\ln^+ |a|$. Залишилось прийняти $C_5 = 3C_4$. □

Теорема 7. *Нехай* $\delta > 0$, $p > 1$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, *а* $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ *— аналітична функція вигляду* (3), *для якої виконується умова* (24). *Тоді існує вимірна множина* $E \subset [0, \mathcal{R})$ *така, що* $\int_E \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$ *і для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх* $a \in \mathbb{C}$ *виконується нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r, a) + C_6 \left(2 + \frac{p}{\delta}\right) \ln\ln S_f(r) + \left(3 + \frac{4p}{\delta}\right) \ln^+ |a|,$$

$$r_0(\omega) \le r < \mathcal{R}, \ r \notin E,$$

де $C_6 > 0$ *— абсолютна стала.*

Доведення. Насамперед з умови (24) випливає існування чисел $r_1 \in [r_0, \mathcal{R})$ і $\delta_1 > \delta$ таких, що

$$\ln \frac{1}{\mathcal{R} - r} \le \frac{1}{\delta_1} \ln S_f(r), \quad r \in [r_1, \mathcal{R}). \tag{29}$$

Згідно з лемою 8, існує вимірна множина $F \subset [r_0, \mathcal{R})$ така, що $\int_F \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$ і

$$l_f(r) < p \ln \frac{1}{\mathcal{R} - r} + 4 \ln\ln S_f(r), \quad r \in [r_0, \mathcal{R}), \ r \notin F. \tag{30}$$

Використовуючи (30) і (29), для деякого $r_2 \in [r_1, \mathcal{R})$ отримуємо

$$l_f(r) < \frac{p}{\delta} \ln S_f(r), \quad r \in [r_2, \mathcal{R}), \ r \notin F. \tag{31}$$

З леми 6, застосованої до функції $h(r) = \frac{r}{(\mathcal{R}-r)^p}$ і функції $\psi(u)$, визначеної за (27), випливає існування вимірної множини $G \subset [r_0, \mathcal{R})$ такої, що $\int_G \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$ і

$$S_{f^*}^2(r) < h^3(r) S_f^8(r) = \frac{r^3}{(\mathcal{R} - r)^{3p}} S_f^8(r), \quad r \in [r_0, \mathcal{R}), \ r \notin G. \tag{32}$$

Звідси, з огляду на (29), для деякого $r_3 \in [r_2, \mathcal{R})$ маємо

$$\ln\ln S_{f^*}(r) < 2\ln\ln S_f(r), \quad r \in [r_3, \mathcal{R}), \ r \notin G. \tag{33}$$

Покладемо $E = F \cup G \cup [0, r_3]$. Зрозуміло, що для множини E виконується оцінка $\int_E \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$. З теореми 4, а також із співвідношень (33) і (31), для випадкової аналітичної функції (5) м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і $r \in [r_0(\omega), \mathcal{R}) \setminus E$ отримаємо $\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + 2C_4 \ln\ln S_f(r) + (C_4 \ln\ln S_f(r) + 4\ln^+|a|)\frac{p}{\delta} + 3\ln^+|a| \le N_{f_\omega}(r,a) + C_4\left(2 + \frac{p}{\delta}\right)\ln\ln S_f(r) + \left(3 + \frac{4p}{\delta}\right)\ln^+|a|$. Залишилось прийняти $C_6 = C_4$. □

Теорема 8. *Нехай $\delta > 0$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3), *для якої виконується умова* (23). *Тоді існує множина $E \subset [0, \mathcal{R})$ нижньої логарифмічної щільності 0 на $[0, \mathcal{R})$ така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,a) + C_7\left(2 + \frac{1}{\delta}\right)\ln\ln S_f(r) + \left(3 + \frac{4}{\delta}\right)\ln^+|a|,$$

$r_0(\omega) \le r < \mathcal{R}$, $r \notin E$, *де $C_7 > 0$ — абсолютна стала.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що число δ в умові (23) можна замінити деяким числом $\delta_1 > \delta$. Тоді за лемою 9 існує множина $X \subset [r_0, \mathcal{R})$ нижньої логарифмічної щільності 0 на $[0, \mathcal{R})$ така, що

$$\ln\frac{1}{\mathcal{R} - r} < \frac{1}{\delta_1}\ln S_f(r), \quad r \in [r_0, \mathcal{R}), \ r \notin X. \tag{34}$$

Нехай $p \in \left(1, \frac{\delta_1}{\delta}\right)$ — фіксоване число. Згідно з лемою 8, існує вимірна множина $F \subset [r_0, \mathcal{R})$ така, що $\int_F \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$ і виконується (30). Використовуючи (30) і (34), для деякого $r_1 \in [r_0, \mathcal{R})$ отримуємо

$$l_f(r) < \frac{1}{\delta}\ln S_f(r), \quad r \in [r_1, \mathcal{R}), \ r \notin F \cup X. \tag{35}$$

З леми 6, застосованої до функції $h(r) = \frac{r}{(\mathcal{R}-r)^p}$ і функції $\psi(u)$, визначеної за (27), випливає існування вимірної множини $G \subset [r_0, \mathcal{R})$ такої, що $\int_G \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$ і виконується (32). Скориставшись (32) і (34), для деякого $r_2 \in [r_1, \mathcal{R})$ маємо

$$\ln\ln S_{f^*}(r) < 2\ln\ln S_f(r), \quad r \in [r_3, \mathcal{R}), \ r \notin G \cup X. \tag{36}$$

Покладемо $E = F \cup G \cup X \cup [0, r_2]$. Оскільки множини F і G мають, очевидно, скінченну логарифмічну міру на $[0, \mathcal{R})$, то їхні логарифмічні щільності дорівнюють 0 на $[0, \mathcal{R})$. Отже, E є множиною нижньої логарифмічної щільності 0 на $[0, \mathcal{R})$. Використовуючи теорему 4, а також співвідношення (36) і (35), для випадкової аналітичної функції (5) м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і $r \in [r_0(\omega), \mathcal{R}) \setminus E$ отримуємо $\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r, a) + 2C_4 \ln\ln S_f(r) + (C_4 \ln\ln S_f(r) + 4\ln^+|a|)\frac{1}{\delta} + 3\ln^+|a| \le N_{f_\omega}(r, a) + C_4\left(2 + \frac{1}{\delta}\right)\ln\ln S_f(r) + \left(3 + \frac{4}{\delta}\right)\ln^+|a|$. Залишилось прийняти $C_7 = C_4$. □

4 Зростання усередненої лічильної функції на послідовності

Співвідношення, отримані в теоремах 6–8, можна уточнити, якщо вимагати виконання цих співвідношень не зовні малої виняткової множини, а лише на деякій зростаючій до $\mathcal{R}$ послідовності значень r. Такий висновок можна зробити з отриманих нижче теорем 10–12, вибираючи в них функцію l зростаючою дуже повільно. Теореми 10–12 отримаємо з теореми 9, використовуючи доведені вище леми 7–9.

Теорема 9. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*, $h \in L$, а (x_n) — зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність. Тоді існує підпослідовність (x_{k_p}) така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і $p \ge p_0(\omega)$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(x_{k_p}) \le N_{f_\omega}(x_{k_p}, a) + h(\ln S_f(x_{k_p})) + \\ + \frac{h(\ln S_f(x_{k_p})) + 4\ln^+|a|}{\ln S_f(x_{k_p})} l_f(x_{k_p}) + 3\ln^+|a|.$$

Доведення. Нехай $\alpha, \beta \in L$ — довільні функції, для яких

$$\alpha(\ln S_{f^*}(r)) = o(h(\ln S_f(r)), \quad r \to \mathcal{R}; \qquad \beta(x) = o(h(x)), \quad x \to +\infty.$$

Тоді за теоремою Е існують підпослідовність (s_k) послідовності (x_n), а також підпослідовність (t_m) послідовності (s_k) такі, що м. н.

$$\ln S_{f^*}(s_k) \le N_{f^*_\omega}(s_k, 0) + \alpha(\ln S_{f^*}(s_k)), \quad k \ge k_0(\omega); \tag{37}$$

$$\ln S_f(t_m) \le T_{f_\omega}(t_m) + \beta(\ln S_f(t_m)), \quad m \ge m_0(\omega). \tag{38}$$

Застосовуючи нерівності (1) та (4) до функції f^*_ω замість f, а також (37), м. н. для всіх $m \geq m_1(\omega)$ маємо

$$m_{f^*_\omega}(t_m, 0) = T_{f^*_\omega}(t_m, 0) - N_{f^*_\omega}(t_m, 0) \leq T_{f^*_\omega}(t_m) - \ln|c_{f^*}(0)| + \ln 2 -$$
$$-N_{f^*_\omega}(t_m, 0) \leq \frac{1}{2e} + \ln S_{f^*}(t_m) - \ln|c_{f^*}(0)| + \ln 2 - N_{f^*_\omega}(t_m, 0) \leq$$
$$\leq 2\alpha(\ln S_{f^*}(t_m)).$$

Крім того, за теоремою 1, згідно з (38) і (9), м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ отримуємо $\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(t_m, a)) \leq \frac{4\pi(2\beta(\ln S_f(t_m))+2\ln^+|a|)}{\ln S_f(t_m)}$, $m \geq m_2(\omega)$.

Використовуючи (38) і теорему 1 ще раз, а також (10) і встановлені вище оцінки для $m_{f^*_\omega}(t_m, 0)$ та $\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(t_m, a))$, м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ і кожного $m \geq m_3(\omega)$ маємо

$$\ln S_f(t_m) \leq T_{f_\omega}(t_m) + \beta(\ln S_f(t_m))N_{f_\omega}(t_m, a) + \leq$$
$$\leq +m_{f^*_\omega}(t_m, 0) + \frac{\mu(\mathcal{E}_{f_\omega}(t_m, a))}{2\pi} l_f(t_m) + 3\ln^+|a| + \beta(\ln S_f(t_m)) \leq$$
$$\leq N_{f_\omega}(t_m, a) + h(\ln S_f(t_m)) + \frac{h(\ln S_f(t_m)) + 4\ln^+|a|}{\ln S_f(t_m)} l_f(t_m) + 3\ln^+|a|.$$

Оскільки (t_m) — підпослідовність послідовності (x_n), то теорему 9 доведено. □

Теорема 10. *Нехай $l \in L$, $E \subset [0, +\infty)$ — вимірна множина така, що $\int_E r^m dr = +\infty$ для деякого $m \in \mathbb{N}_0$, а f — ціла функція вигляду* (3). *Тоді існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (s_p) елементів множини E така, що для випадкової цілої функції* (5) *м. н. для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(s_p) \leq N_{f_\omega}(s_p, a) + l(\ln S_f(s_p)) + 7\ln^+|a|, \quad p \geq p_0(\omega).$$

Доведення. Теорема очевидна, якщо функція f є многочленом, оскільки в цьому випадку для довільних $\omega \in \Omega$ і $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність (25).

Нехай f — трансцендентна ціла функція. Згідно з лемою 7 існує множина $F \subset [r_0, +\infty)$ така, що $\int_F r^m dr < +\infty$ і виконується (26). Покладемо $G = E \setminus F$. Тоді $\int_G r^m dr = +\infty$, а тому множина G є необмеженою. Розглянемо довільну зростаючу до $+\infty$ послідовність

(x_n) елементів множини G. З (26) отримуємо, що $l_f(x_n) < \ln S_f(x_n)$, $n \geq n_0$, і нам залишилось застосувати теорему 9 з функцією $h(x) = \frac{1}{2}l(x)$. $\square$

Теорема 11. *Нехай $l \in L$, $\delta > 0$, $p > 1$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, $E \subset [0, \mathcal{R})$ — вимірна множина така, що $\int_E \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} = +\infty$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*, для якої виконується умова* (24)*. Тоді існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (s_p) елементів множини E така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(s_p) \leq N_{f_\omega}(s_p, a) + l(\ln S_f(s_p)) + \left(3 + \frac{4p}{\delta}\right) \ln^+ |a|, \quad p \geq p_0(\omega).$$

Доведення. З умови (24) і леми 8 (див. доведення теореми 7) випливає існування вимірної множина $F \subset [r_0, \mathcal{R})$ такої, що $\int_F \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} < +\infty$ і виконується (31). Покладемо $G = E \setminus F$. Тоді $\int_G \frac{dr}{(\mathcal{R}-r)^p} = +\infty$, а тому $\sup G = \mathcal{R}$. Розглянемо довільну зростаючу до $\mathcal{R}$ послідовність (x_n) елементів множини G. З (31) отримуємо, що $l_f(x_n) < \frac{p}{\delta} \ln S_f(x_n)$, $n \geq n_0$, і нам залишилось застосувати теорему 9 з функцією $h(x) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{p}{2\delta}\right\} l(x)$. $\square$

Теорема 12. *Нехай $l \in L$, $\delta > 0$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, $E \subset [0, \mathcal{R})$ — множина додатної нижньої логарифмічної щільності на $[0, \mathcal{R})$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*, для якої виконується умова* (23)*. Тоді існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (s_p) елементів множини E така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(s_p) \leq N_{f_\omega}(s_p, a) + l(\ln S_f(s_p)) + \left(3 + \frac{4}{\delta}\right) \ln^+ |a|, \quad p \geq p_0(\omega).$$

Доведення. З умови (23) і леми 9 (див. доведення теореми 8) випливає існування множин X і F таких, що $X \cup F$ є множиною нижньої логарифмічної щільності 0 на $[0, \mathcal{R})$ і виконується (35). Покладемо $G = E \setminus (X \cup F)$. Тоді, очевидно, $\sup G = \mathcal{R}$. Розглянемо довільну зростаючу до $\mathcal{R}$ послідовність (x_n) елементів множини G. З (35) отримуємо, що $l_f(x_n) < \frac{1}{\delta} \ln S_f(x_n)$, $n \geq n_0$, і нам залишилось застосувати теорему 9 з функцією $h(x) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\delta}\right\} l(x)$. $\square$

З теореми 10 у випадку $\mathcal{R} = +\infty$, а також з теореми 12 у випадку $0 < \mathcal{R} < +\infty$ (за умови (23)) випливає, що якщо $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, то м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ зростання функції $N_{f_\omega}(r, a)$ на деякій зростаючій до $\mathcal{R}$ послідовності (s_p) значень r є близьким до зростання функції $\ln S_f(r)$. Вказані теореми містять також певну інформацію щодо можливого вибору такої послідовності (s_p). Наприклад, у теоремі 12 послідовність (s_p) можна вибрати з довільної множини $E \subset [0, \mathcal{R})$ додатної нижньої логарифмічної щільності на $[0, \mathcal{R})$. Більше того, як показує аналіз доведення теореми 12, в якості послідовності (s_p) можна вибрати підпослідовність довільної зростаючої до $\mathcal{R}$ послідовності (x_n), члени якої не є елементами множин X і F, кожна з яких явно виражається за f. Виявляється, що якщо відмовитися від додаткової інформації щодо послідовності (s_p), то твердження, близьке до теореми 12, можна довести і для функцій $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, для яких умова (23) не виконується. Цей факт випливає з теореми 13, яка у випадку $\mathcal{R} = +\infty$ та у випадку $0 < \mathcal{R} < +\infty$ (за умови (23)) є безпосереднім наслідком з теорем 10 та 12 відповідно (досить застосувати ці теореми з функцією $l(x) = \frac{1}{2}h(x)$).

Теорема 13. *Нехай $h \in L$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*. Тоді існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (s_p) така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\ln S_f(s_p) \leq N_{f_\omega}(s_p, a) + h(\ln S_f(s_p)), \quad p \geq p_0(\omega, a).$$

У тій частині, в якій теорема 13 ще не доведена, вона є наслідком з наведеної далі теореми 14.

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, а f — аналітична в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Для довільних $a \in \mathbb{C}$ і $K > 0$ будемо використовувати позначення $\widehat{N}_f(r, a) = N_f(r, a) + \ln |c_f(a)|$, $\mathcal{N}_f(r, K) = \inf_{|a| \leq K} \widehat{N}_f(r, a)$. Зауважимо, що, згідно з формулою Йєнсена (див., наприклад, [2, с. 27]),

$$\widehat{N}_f(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta}) - a| d\theta. \tag{39}$$

Теорема 14. *Нехай $l \in L$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналітична функція вигляду* (3)*. Тоді існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (s_p) така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $K > 0$ виконується нерівність $\ln S_f(s_p) \leq \mathcal{N}_{f_\omega}(r, K) + l(\ln S_f(s_p))$, $p \geq p_0(\omega, K)$.*

Звівши леми 5.4, 6.3 і 7.3 роботи А. К. Оффорда [5] в одне твердження і використавши при цьому міркування з доведення леми 8.1 цієї ж роботи, отримаємо наступну лему, яку використаємо в доведенні теореми 14.

Лема B. *Нехай* $f \in \mathcal{H}(1)$ *— аналітична функція вигляду* (3). *Тоді існують функція* $\alpha \in L$ *і зростаюча до* 1 *додатна послідовність* (x_n) *такі, що для випадкової аналітичної функції* (5), *кожної* $A \in \mathcal{A}$ *такої, що* $P(A) \le \frac{1}{e}$, *і всіх* $n \in \mathbb{N}_0$ *правильна нерівність*

$$\int_A \Big(\inf_{|a| \le \alpha(x_n)} \widehat{N}_{f_\omega}(x_n, a) + 1 \Big) dP \ge P(A) \ln S_f(x_n) + CP(A) \ln P(A) - \frac{C_f}{\sqrt[8]{S_f(x_n)}},$$

де $C > 0$ *— абсолютна стала, а* $C_f > 0$ *— стала, залежна лише від функції* f.

Доведення теореми 14. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\mathcal{R} = 1$. Нехай, отже, $f \in \mathcal{H}(1)$ — аналітична функція вигляду (3), а $\alpha \in L$ і (x_n) — відповідно функція і зростаюча до 1 додатна послідовність, існування яких стверджується лемою B. Можемо вважати, що $S_f(x_0) > 1$ і $l(\ln S_f(x_0)) > 1$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$y_n = l(\ln S_f(x_n)) - 1, \quad Y_{\omega,n} = \inf_{|a| \le \alpha(x_n)} \widehat{N}_{f_\omega}(x_n, a).$$

Зауважимо, що $y_n \to +\infty$, $n \to \infty$.

Розглянемо подію A_n, яка полягає в тому, що $Y_{\omega,n} + 1 \le \ln S_f(x_n) - y_n$. Для $j \in \{0, 1, 2\}$ нехай B_j — подія, яка полягає в тому, що $\omega_0(\omega) \in \big[\frac{j}{3}, \frac{j+1}{3}\big)$, а $A_{n,j} = A_n \cap B_j$. Оскільки величина $\omega_0(\omega)$ є рівномірно розподіленою на $[0, 1]$, то $P(B_j) = \frac{1}{3}$ і $P(A_{n,j}) \le \frac{1}{3}$. Використовуючи означення події A_n і лему B, маємо

$$P(A_{n,j})(\ln S_f(x_n) - y_n) \ge \int_{A_{n,j}} (Y_{\omega,n} + 1)\, dP \ge$$
$$\ge P(A_{n,j}) \ln S_f(x_n) + CP(A_{n,j}) \ln P(A_{n,j}) - \frac{C_f}{\sqrt[8]{S_f(x_n)}},$$

звідки отримуємо

$$P(A_{n,j})(y_n + C \ln P(A_{n,j})) \le \frac{C_f}{\sqrt[8]{S_f(x_n)}}. \tag{40}$$

Покладемо $\varepsilon_n = \max\left\{\exp\left\{-\frac{y_n}{2C}\right\}, \frac{2C_f}{y_n \sqrt[8]{S_f(x_n)}}\right\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, і доведемо, що $P(A_{n,j}) \leq \varepsilon_n$. Якщо $C \ln P(A_{n,j}) \leq -\frac{y_n}{2}$, то, очевидно, $P(A_{n,j}) \leq \varepsilon_n$. Якщо ж $C \ln P(A_{n,j}) > -\frac{y_n}{2}$, то за (40) маємо

$$P(A_{n,j})\frac{y_n}{2} < P(A_{n,j})(y_n + C \ln P(A_{n,j})) \leq \frac{C_f}{\sqrt[8]{S_f(x_n)}},$$

звідки отримуємо, що $P(A_{n,j}) \leq \varepsilon_n$. Тому $P(A_n) \leq \sum_{j=0}^{2} P(A_{n,j}) \leq 3\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Оскільки $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, то існує зростаюча послідовність (n_p) така, що

$$\sum_{p=0}^{\infty} P(A_{n_p}) \leq 3 \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_{n_p} < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі м. н. виконується лише скінченне число подій A_{n_p}, тобто м. н. для всіх $p \geq p_0(\omega)$ маємо $Y_{\omega,n_p} + 1 > \ln S_f(x_{n_p}) - y_{n_p}$. Звідси, прийнявши $s_p = x_{n_p}$, $p \in \mathbb{N}_0$, м. н. для всіх $p \geq p_0(\omega, K)$ отримуємо

$$\ln S_f(s_p) < \inf_{|a| \leq \alpha(s_p)} \widehat{N}_{f_\omega}(s_p, a) + 1 + l(\ln S_f(s_p)) - 1 \leq$$

$$\leq \mathcal{N}_{f_\omega}(r, K) + l(\ln S_f(s_p)),$$

що й потрібно було довести. □

5 Уточнення теореми А. К. Оффорда

Використовуючи отримані нами результати, покажемо, що твердження теореми C можна істотно уточнити. Правильні такі дві теореми.

Теорема 15. *Нехай $f \in \mathcal{H}(1)$ — аналітична функція вигляду* (2). *Тоді для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для кожного $K > 0$ маємо*

$$\ln S_f(r) - C_8 \ln\ln S_f(r) \leq \overline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right) \leq \ln S_f(r) + C_f, \quad r \in [r_0(\omega), \mathcal{R}),$$

де $C_8 > 0$ — абсолютна стала, а $C_f > 0$ — стала, залежна лише від функції f.

Теорема 16. *Нехай $h \in L$, а $f \in \mathcal{H}(1)$ — аналітична функція вигляду* (3)*. Тоді існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (s_p) така, що для випадкової аналітичної функції* (5) *м. н. для всіх $K > 0$ виконуються нерівності*

$$\underline{N}_{f_\omega}\left(s_p, \frac{1}{2}, K\right) \geq \ln S_f(s_p) - h(\ln S_f(s_p)), \quad p \geq p_0(\omega, K);$$
$$\overline{N}_{f_\omega}\left(s_p, \frac{1}{2}, K\right) - \underline{N}_{f_\omega}\left(s_p, \frac{1}{2}, K\right) \leq h(\ln S_f(s_p)) \quad p \geq p_0(\omega, K).$$

При доведенні теореми 15 в якості допоміжного результату використаємо наступне добре відоме твердження ([1], с. 37).

Лема C. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r_0 \in (0, \mathcal{R})$ — довільне число, а f — мероморфна в крузі $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функція. Тоді існує стала $C_f(r_0) > 0$, залежна лише від функції f і числа r_0, така, що для довільного $a \in \mathbb{C}$ виконується виконується нерівність*

$$N_f(r, a) - N_f(r_0, a) \leq T_f(r) + C_f(r_0), \quad r \in [r_0, \mathcal{R}).$$

Доведення теореми 15. Використовуючи теорему D і нерівності (2) та (4), м. н. для кожного $K > 0$ і всіх $r \in [r_1(\omega), \mathcal{R})$ отримуємо

$$\overline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right) \geq N_{f_\omega}(r, 0) - N_{f_\omega}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \geq$$
$$\geq \ln S_f(r) - C_1 \ln\ln S_f(r) - \ln 2 + \ln|c_f(0)| - \frac{1}{2e} - \ln^+ S_f\left(\frac{1}{2}\right) \geq$$
$$\geq \ln S_f(r) - C_8 \ln\ln S_f(r),$$

де $C_8 = 2C_1$. З іншого боку, за лемою C і нерівнісю (4) маємо

$$\overline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right) \leq T_{f_\omega}(r) + C_f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln S_f(r) + C_f, \quad r \in [r_2, \mathcal{R}).$$

Залишилось прийняти $r_0(\omega) = \max\{r_1(\omega), r_2\}$. □

Доведення теореми 16. Насамперед зауважимо, що для всіх $r \in \left[\frac{1}{2}, \mathcal{R}\right)$ маємо

$$\overline{N}_{f_\omega}\left(r, \frac{1}{2}, K\right) = \inf_{|a| \leq K}\left(\widehat{N}_{f_\omega}(r, 0) - \widehat{N}_{f_\omega}\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) \geq$$

$$\geq \mathcal{N}_{f_\omega}(r,K) - \sup_{|a|\leq K} \widehat{N}_{f_\omega}\left(\frac{1}{2},0\right),$$

причому, як випливає з формули Йєнсена (39) і нерівності (4),

$$\sup_{|a|\leq K} \widehat{N}_{f_\omega}\left(\frac{1}{2},0\right) \leq T_{f_\omega}\left(\frac{1}{2}\right) + \ln^+ K + \ln 2 \leq \ln^+ S_f\left(\frac{1}{2}\right) + \ln^+ K + 2.$$

Згідно з теоремою 14, застосованою до функції $l(x) = \frac{1}{4}h(x)$, існує зростаюча до $\mathcal{R}$ послідовність (s_p) така, що для випадкової аналітичної функції (5) м. н. для всіх $K > 0$ виконується нерівність $\mathcal{N}_{f_\omega}(r,K) \geq \ln S_f(s_p) - l(\ln S_f(s_p))$, $p \geq p_1(\omega, K)$. Звідси, а також з наведених вище оцінок, м. н. для всіх $K > 0$ отримуємо

$$\underline{N}_{f_\omega}\left(s_p, \frac{1}{2}, K\right) \geq \ln S_f(s_p) - 2l(\ln S_f(s_p)) \geq \ln S_f(s_p) - h(\ln S_f(s_p)),$$

$$p \geq p_2(\omega, K).$$

Крім того, скориставшись теоремою 15, м. н. для всіх $K > 0$ і $p \geq p_3(\omega, K)$ маємо

$$\overline{N}_{f_\omega}\left(s_p, \frac{1}{2}, K\right) - \underline{N}_{f_\omega}\left(s_p, \frac{1}{2}, K\right) \leq$$

$$\leq \ln S_f(s_p) + C_f - \ln S_f(s_p) + 2l(\ln S_f(s_p)) \leq h(\ln S_f(s_p)).$$

Теорему 16 доведено. □

6 Умови відсутності валіронових дефектних значень

Наступна теорема є безпосереднім наслідком з теореми 4.

Теорема 17. *Нехай* $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ *і* $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ *— аналітична функція вигляду* (3)*. Якщо виконується кожна з умов*

$$\ln\ln S_{f^*}(r) = o(\ln S_f(r)), \quad r \to \mathcal{R}; \tag{41}$$

$$l_f(r) = o\left(\frac{\ln^2 S_f(r)}{\ln\ln S_f(r)}\right), \quad r \to \mathcal{R}, \tag{42}$$

то існує функція $h \in L$ така, що $h(x) = o(x)$, $x \to +\infty$, і для випадкової аналітичної функції (5) *м. н. для всіх $a \in \mathbb{C}$ правильна нерівність*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r, a) + (1 + \ln^+ |a|)h(\ln S_f(r)) + 3\ln^+ |a|, \quad r \in [r_0(\omega), \mathcal{R}). \tag{43}$$

Отже, якщо одночасно виконуються співвідношення (41) і (42), то випадкова аналітична функції (5) м. н. не має валіронових виняткових значень.

Наведемо два наслідки з теореми 17.

Наслідок 1. *Нехай f — ціла функція вигляду* (3). *Якщо виконується умова*

$$\ln\ln S_f(r) = O\left(\frac{\ln^2 r}{\ln\ln r}\right), \quad r \to +\infty, \tag{44}$$

то випадкова ціла функція (5) *м. н. не має валіронових виняткових значень.*

Доведення. Наслідок потребує доведення лише для трансцендентних цілих функцій.

Нехай, отже, f — трансцендентна ціла функція вигляду (3). Досить довести, що зі співвідношення (44) випливає кожне зі співвідношень (41) і (42) (з $\mathcal{R} = +\infty$).

Використовуючи умову (44) і враховуючи, що для трансцендентної функції виконується (21), легко отримуємо (42):

$$l_f(r) \le \ln\frac{2r}{2r - r} + \ln\ln S_f(2r) = O\left(\frac{\ln^2 r}{\ln\ln r}\right) = o\left(\frac{\ln^2 S_f(r)}{\ln\ln S_f(r)}\right),$$

$$r \to +\infty.$$

Далі доведемо, що (41) випливає зі значно слабшого за (44) співвідношення

$$\ln\ln\ln S_f(r) = O(\ln r), \quad r \to +\infty. \tag{45}$$

Розглянемо функції $u(r)$, $v(r)$ та $w(r)$, визначені рівностями (19), і покладемо $\alpha(r) = r(\ln u(r))'$, $\beta(r) = r(\ln v(r))'$. Легко бачити, що тоді

$$S^2_{f^*}(r) = \frac{1}{4}w(r) = \frac{1}{4}\alpha(r)\beta(r)S^2_f(r). \tag{46}$$

Крім того, функції $u(r)$ та $v(r)$ є максимумами модулів трансцендентних цілих функцій $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 z^{2n}$ та $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n|c_n|^2 z^{2n}$ відповідно. Отже, $\ln u(r)$ та $\ln v(r)$ є опуклими на $(0, +\infty)$ відносно $\ln r$ функціями, які зростають при $r \to +\infty$ швидше за $\ln r$. З огляду на це, $\alpha(r)$ і $\beta(r)$ є додатними, неспадними, необмеженими на $(0, +\infty)$ функціями.

Надалі через d_j позначатимемо додатні сталі, залежні хіба що від функції f. Використовуючи (45), маємо

$$\alpha(r) \le \int_r^{er} \frac{\alpha(t)}{t} dt = \ln u(er) - \ln u(r) \le \ln u(er) =$$

$$= 2 \ln S_f(er) \le \exp\left\{r^{d_1}\right\}, \quad r \ge r_1. \tag{47}$$

Тоді $\ln v(r) = \ln \alpha(r) + \ln u(r) \le \exp\left\{r^{d_2}\right\}$, $r \ge r_2$, а тому, подібно до (47), отримуємо

$$\beta(r) \le \int_r^{er} \frac{\beta(t)}{t} dt = \ln v(er) - \ln v(r) \le \ln v(er) \le \exp\left\{r^{d_3}\right\}, \quad r \ge r_3. \tag{48}$$

З (46), (47) і (48) випливає, що $\ln S_{f^*}(r) \le r^{d_4} + \ln S_f(r)$, $r \ge r_4$. Отже, згідно з (21),

$$\ln\ln S_{f^*}(r) \le d_4 \ln r + \ln\ln S_f(r) + \ln 2 = o(\ln S_f(r)), \quad r \to +\infty.$$

Наслідок доведено. □

Наслідок 2. *Нехай* $\mathcal{R} \in (0, +\infty)$ *і* $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ *— аналітична функція вигляду* (3)*. Якщо виконуються умови*

$$\varliminf_{r\to\mathcal{R}} \frac{\ln S_f(r)}{\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}} > 0, \qquad \varliminf_{r\to\mathcal{R}} \frac{\ln\ln S_f(r) \ln\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}}{\ln^2 \frac{1}{\mathcal{R}-r}} = 0, \tag{49}$$

то випадкова аналітична функція (5) *м. н. не має валіронових виняткових значень.*

Доведення. Досить довести, що з (49) випливає кожне зі співвідношень (41) і (42).

Для довільного $r \in [0, \mathcal{R})$ нехай $R(r) = \frac{r+\mathcal{R}}{2}$, $y(r) = \frac{1}{\mathcal{R}-r}$. Тоді, як легко бачити,

$$\frac{1}{R(r) - r} = \frac{1}{\mathcal{R} - R(r)} = y(R(r)) = 2y(r).$$

Використовуючи спочатку другу, а потім першу з умов (49), легко отримуємо (42):

$$l_f(r) \le \ln \frac{R}{R - r} + \ln\ln S_f(R) = o\left(\frac{\ln^2 y(r)}{\ln\ln y(r)}\right) = o\left(\frac{\ln^2 S_f(r)}{\ln\ln S_f(r)}\right), \; r \to \mathcal{R}.$$

Далі доведемо, що (41) виконується, якщо одночасно виконуються перше зі співвідношень (49), а також співвідношення

$$\ln\ln\ln S_f(r) = o(\ln y(r)), \quad r \to \mathcal{R}, \tag{50}$$

яке є значно слабшим за друге зі співвідношень (49).

Подальші міркування подібні до міркувань із доведення попереднього наслідку. Розглянемо функції $u(r)$, $v(r)$ та $w(r)$, визначені рівностями (19), і покладемо $\alpha(r) = r(\ln u(r))'$, $\beta(r) = r(\ln v(r))'$. Тоді для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$ виконується (46). Крім того, $\alpha(r)$ і $\beta(r)$ є додатними, неспадними, необмеженими на $(0, \mathcal{R})$ функціями.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Використовуючи (50), для всіх $r \in [r_1, \mathcal{R})$ маємо

$$\alpha(r) \ln \frac{R(r)}{r} \le \int_r^{R(r)} \frac{\alpha(t)}{t} dt = \ln u(R(r)) - \ln u(r) \le \ln u(R(r)) =$$
$$= 2 \ln S_f(R(r)) \le \exp\left\{y^{\varepsilon}(r)\right\}.$$

Звідси, враховуючи, що

$$\ln \frac{R(r)}{r} = \ln\left(1 + \frac{1}{2ry(r)}\right) \sim \frac{1}{2\mathcal{R}y(r)}, \quad r \to \mathcal{R},$$

отримуємо

$$\alpha(r) \le \exp\left\{y^{2\varepsilon}(r)\right\}, \quad r \in [r_2, \mathcal{R}). \tag{51}$$

Тоді $\ln v(r) = \ln \alpha(r) + \ln u(r) \le \exp\{y^{3\varepsilon}(r)\}$, $r \in [r_3, \mathcal{R})$. Міркуючи так само, як і при виведенні нерівності (51), маємо

$$\beta(r) \le \exp\left\{y^{4\varepsilon}(r)\right\}, \quad r \in [r_4, \mathcal{R}). \tag{52}$$

З (46), (51) і (52) випливає, що $\ln S_{f^*}(r) \le y^{5\varepsilon}(r) + \ln S_f(r)$, $r \in [r_5, \mathcal{R})$. Отже,

$$\ln\ln S_{f^*}(r) \le 5\varepsilon \ln \frac{1}{\mathcal{R}-r} + \ln\ln S_f(r) + \ln 2, \quad r \in [r_6, \mathcal{R}).$$

Звідси, з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ і перше зі співвідношень (49), отримуємо

$$\ln\ln S_{f^*}(r) \le o\left(\ln \frac{1}{\mathcal{R}-r}\right) + \ln\ln S_f(r) = o(\ln S_f(r)), \quad r \to \mathcal{R}.$$

Наслідок доведено. $\square$

[1] *Хейман У.* Мероморфные функции. — М.: Мир, 1966. — 288 с.

[2] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с.

[3] *Аракелян Н. У.* Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений // ДАН СССР. — 1966. — **170**, № 2. — С. 999–1002.

[4] *Drasin D., Shea D. F.* On the Valiron deficiencies of integral functions // Bull. London Math. Soc. — 1969. — **1**. — P. 174–178.

[5] *Offord A. C.* The distribution of the value of a random function in the unit disk // Studia Math. — 1972. — **41**. — P. 71–106.

[6] *Mahola M.P., Filevych P.V.* The value distribution of a random entire function // Mat. Stud. — 2010. — **34**, №2. — P. 120–128.

[7] *Магола М.П., Филевич П.В.* Угловое распределение нулей случайных аналитических функций // Уфимский мат. журн. — 2012. — **4**, №1. — С. 122–135.

[8] *Mahola M.P., Filevych P.V.* The angular value distribution of random analytic functions // Mat. Stud. — 2012. — **37**, №1. — P. 34–51.

[9] *Kondratyuk A.A., Kshanovskyy I.P.* On the logarithmic derivative of a meromorphic function // Mat. Stud. — 2004. — **21**, № 1. — P. 98–100.

[10] *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. — М.: Мир, 1973. — 304 с.

[11] *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

[12] *Benbourenane D., Korhonen R.* On the growth of the logarithmic derivative // Comput. Meth. Func. Theory. — 2001. — **1**, №2. — P. 301–310.

THE DISTRIBUTION OF VALUES OF RANDOM ANALYTIC FUNCTIONS

Mariya MAHOLA[1], *Petro FILEVYCH*[2]

[1] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 3b Naukova Str., L'viv 79060, Ukraine

e-mail: *marichka_stanko@ukr.net*

[2] S. Z. Gzhytskyy Lviv National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies, 50 Pekarska Str., L'viv 79010, Ukraine

e-mail: *filevych@mail.ru*

Let $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $f(z) = \sum c_n z^n$ be an analytic function in the disk $|z| < \mathcal{R}$ such that $\sum |c_n|^2 r^{2n} \to +\infty$, $r \to \mathcal{R}$, $T_f(r)$ be the Nevanlinna characteristic of f, $N_f(r, a)$ be the integrated counting function of a-points of f, and $(\omega_n(\omega))$ be a sequence of independent equidistributed on $[0, 1]$ random variables. It is proved that for every function h increasing to $+\infty$ on $[x_0, +\infty)$ there exists a sequence (r_n) increasing to $\mathcal{R}$ such that for the random analytic function $f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i \omega_n(\omega)} c_n z^n$ almost surely for each $a \in \mathbb{C}$ we have $T_{f_\omega}(r_n) \le N_{f_\omega}(r_n, a) + h(T_{f_\omega}(r_n))$, $n \ge n_0(\omega, a)$.