МУЛЬТИПЛІКАТИВНА ЗГОРТКА НА СПЕКТРІ АЛГЕБР СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

©*2012 р. Андрій ЗАГОРОДНЮК*[1], *Ірина ЧЕРНЕГА*[2]

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *andriyzag@yahoo.com*

[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060

e-mail: *icherneha@ukr.net*

Редакція отримала статтю 14 березня 2012 р.

За допомогою введеної в роботі операції мультиплікативної згортки досліджується спектр алгебри аналітичних симетричних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1.

1 Означення та попередні відомості

Нехай X — комплексний банахів простір і G — напівгрупа ізометричних операторів на X. Функція f на X називається *симетричною відносно* G (або, скорочено, G-*симетричною*), якщо для кожного $\sigma \in G$

$$f(\sigma(x)) = f(x).$$

УДК: 517.98; MSC 2010: 46G20, 46G25

Ключові слова і фрази: симетрична аналітична функція, спектр алгебри, комплексний гомоморфізм, мультиплікативна згортка

У випадку, коли $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$ і $G = \mathcal{G}$ — група підстановок на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, то $\sigma \in \mathcal{G}$ діє на ℓ_p наступним чином:

$$\sigma\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_{\sigma(i)},$$

де $e_1, e_2, \ldots$ — стандартний базис в ℓ_p. В літературі $\mathcal{G}$-симетричні функції на ℓ_p називаються *симетричними.*

Симетричні функції на $\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{R}^n$ є стандартним об'єктом класичної алгебри (див. наприклад [1]). Симетричні поліноми на просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$ вперше досліджувались Німеровским і Семьоновим в [2].

У [3] доведено, що поліноми

$$F_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k,$$

$k = \lceil p \rceil, \lceil p \rceil + 1 \ldots$, де $\lceil p \rceil$ — найменше ціле, яке не менше, ніж p, утворюють алгебраїчний базис в $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ — просторі всіх симетричних поліномів на ℓ_p. Тобто, поліноми F_k є алгебраїчно незалежними і їх алгебраїчна комбінація збігається з усім простором $\mathcal{P}_s(\ell_p)$.

Позначимо через $H_{bs}(\ell_p)$ алгебру цілих симетричних аналітичних функцій з ℓ_p в $\mathbb{C}$, що є обмеженими на обмежених множинах і через $M_{bs}(\ell_p)$ — спектр (множину всіх комплексних гомоморфізмів) даної алгебри.

Нехай $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$. В [4] визначено операцію змішування $x \bullet y \in \ell_p$ наступним чином:

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Ця операція визначає *симетричний зсув* для симетричних функцій, за допомогою якого в роботі [5] введено операцію симетричної згортки на спектрі алгебри $H_{bs}(\ell_p)$, що дозволило в [6] представити $M_{bs}(\ell_1)$ в термінах цілих функцій експоненціального типу. У даній роботі введено операцію мультиплікативної згортки на множині $M_{bs}(\ell_1)$, за допомогою якої покращено результати роботи [6].

2 Мультиплікативна згортка

Нехай $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Визначимо операцію *мультиплікативного змішування* $x \diamond y$ як множину $\{(x_i y_j), \quad i, j \in \mathbb{N}\}$, пронумеровану одним індексом у деякому фіксованому порядку. Зауважимо, що для подальших викладок порядок нумерації не має значення.

Твердження 2.1. *Для довільних $x, y \in \ell_p$ маємо, що:*

1. $x \diamond y \in \ell_p \quad i \quad \|x \diamond y\|^p = \|x\|^p \|y\|^p$;
2. $F_k(x \diamond y) = F_k(x) F_k(y)$.

Доведення. Дійсно, $\|x \diamond y\|^p = \sum |x_i y_j|^p = \sum |x_i|^p \sum |y_j|^p = \|x\|^p \|y\|^p$. Аналогічно, $F_k(x \diamond y) = \sum (x_i y_j)^k = \sum x_i^k \sum y_j^k = F_k(x) F_k(y)$. □

Твердження 2.2. *Нехай $f \in H_{bs}(\ell_p)$. Тоді $f(x \diamond y) \in H_{bs}(\ell_p)$ для кожного фіксованого $y \in \ell_p$.*

Доведення. Легко бачити, що f є G-аналітичною і симетричною, оскільки $\sigma(x) \diamond y = x \diamond y$ для кожної підстановки σ.

Маємо, що $\|f_n(x \diamond y)\| \le \|f_n\| \|y\| \|x\|$. Таким чином, для фіксованого $y \in \ell_p$ маємо $\|f_n(\cdot \diamond y)\| = \|f_n\| \|y\|^n$ і

$$\rho_0(f) = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f_n\| \|y\|^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f_n\|}\, \|y\|} = \infty.$$

Таким чином, f є аналітичною функцією обмеженого типу. □

Означення 2.1. *Відображення $f \mapsto M_y(f)$, де $M_y(f)(x) = f(x \diamond y)$, ми будемо називати мультиплікативним зсувом.*

Твердження 2.3. *Для кожного $y \in \ell_p$ оператор мультиплікативного зсуву M_y є неперервним гомоморфізмом на $H_{bs}(\ell_p)$.*

Доведення. Очевидно, що M_y є лінійним та мультиплікативним. Нехай x належить ℓ_p і $\|x\| \le r$. Тоді $\|x \diamond y\| = \sqrt[p]{\|x\|^p \|y\|^p} \le r\|y\|$ і

$$|M_y f(x)| \le \sup_{\|z\| \le r\|y\|} |f(z)| = \|f\|_{r\|y\|}. \tag{1}$$

Таким чином, M_y неперервний. □

Використовуючи оператор мультиплікативного зсуву, ми можемо ввести мультиплікативну згортку на $H_{bs}(\ell_p)'$. Повторюючи міркування з [7, с. 62, 65] та згідно з (1) маємо, що для довільного $\theta \in H_{bs}(\ell_p)'$ радіус-функція

$$R(\theta \circ M_y) \leq \sqrt[p]{R(\theta)^p \|y\|^p} = R(\theta)\|y\|$$

і для фіксованого $f \in H_{bs}(\ell_p)$ функція $y \mapsto \theta \circ M_y(f)$ також належить $H_{bs}(\ell_p)$.

Означення 2.2. *Нехай $f \in H_{bs}(\ell_p)$, $\theta \in H_{bs}(\ell_p)'$. Мультиплікативну згортку $\theta \Box f$ визначимо наступним чином:*

$$(\theta \Box f)(x) = \theta[M_x(f)].$$

Означення 2.3. *Для довільних $\varphi, \theta \in H_{bs}(\ell_p)'$ їх мультиплікативна згортка визначається як*

$$(\varphi \Box \theta)(f) = \varphi(\theta \Box f).$$

Твердження 2.4. *Якщо $\varphi, \theta \in M_{bs}(\ell_p)$, то $\varphi \Box \theta \in M_{bs}(\ell_p)$.*

Доведення. З мультиплікативності M_y випливає, що $\phi \Box \theta$ є характером. Використовуючи [7, с. 62, 65] та (1), маємо, що

$$R(\phi \Box \theta) \leq \sqrt[p]{R(\phi)^p R(\theta)^p} = R(\phi)R(\theta).$$

Звідси $\phi \Box \theta \in M_{bs}(\ell_p)$. $\square$

Теорема 2.1. 1. *Для кожного $\varphi, \theta, \in M_{bs}(\ell_p)$*

$$(\varphi \Box \theta)(F_k) = \varphi(F_k)\theta(F_k). \tag{2}$$

2. *Напівгрупа $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \Box)$ є комутативною і значення в точці $x_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, δ_{x_0}, є одиничним елементом.*

Доведення. Візьмемо спочатку $x, y \in \ell_p$ та $\delta_x, \delta_y \in M_{bs}(\ell_p)$ — гомоморфізми “значення в точках”. Тоді $(\delta_x \Box \delta_y)(F_k) = F_k(x \diamond y) = \sum x_i^k y_j^k = F_k(x)F_k(y)$.

Нехай тепер $\varphi, \theta \in M_{bs}(\ell_p)$. Тоді

$$(\theta \square F_k)(x) = \theta(M_x(F_k)) = \theta(F_k(x)F_k) = F_k(x)\theta(F_k).$$

Таким чином,

$$(\varphi \square \theta)(F_k) = \varphi(F_k \theta(F_k)) = \varphi(F_k)\theta(F_k).$$

Міняючи місцями параметри в формулі (2), ми отримаємо, що

$$(\theta \square \varphi)(F_k) = \theta(F_k)\varphi(F_k) = (\varphi \square \theta)(F_k),$$

звідки випливає, що мультиплікативна згортка є комутативною на F_k. Оскільки кожен симетричний поліном подається у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів F_k і кожна функція з $H_{bs}(\ell_p)$ рівномірно наближається симетричними поліномами, то операція згортки є комутативною.

Також з (2) випливає, що виконується правило скорочення і δ_{x_0}, де $x_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, є одиничним елементом. $\square$

Нагадаємо, що для довільних $\varphi, \theta \in M_{bs}(\ell_p)$, $f \in H_{bs}(\ell_p)$ в [5] було визначено симетричну згортку $\varphi \star \theta$ наступним чином:

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(T_y^s(f)),$$

де $T_y^s(f)(x) = f(x \bullet y)$.

Твердження 2.5. *Для довільних $\theta, \varphi, \psi \in M_{bs}(\ell_p)$ має місце наступна рівність:*

$$\theta \square (\varphi \star \psi) = (\theta \square \varphi) \star (\theta \square \psi).$$

Доведення. Дійсно, використовуючи теорему 2.1 та теорему 1.5 з [6], отримаємо

$$((\theta \square \varphi) \star (\theta \square \psi))(F_k) = (\theta \square \varphi)(F_k) + (\theta \square \psi)(F_k) =$$

$$\theta(F_k)\varphi(F_k) + \theta(F_k)\psi(F_k) = \theta(F_k)(\varphi(F_k) + \psi(F_k)) =$$

$$\theta(F_k)(\varphi \star \psi)(F_k) = \theta \square (\varphi \star \psi)(F_k),$$

що і потрібно було довести. $\square$

Наслідок 2.1. *Множина* $(M_{bs}, \square, \star)$ *є комутативним напівкільцем з одиницею.*

Скажемо, що лінійний оператор $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \to \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ називається *оператором мультиплікативної згортки*, якщо існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $Tf = \theta \square f$.

Твердження 2.6. *Неперервний гомоморфізм* $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \to \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ *є оператором мультиплікативної згортки тоді і тільки тоді, коли* T *комутує з усіма операторами мультиплікативного зсуву* $M_y(f)$, $y \in \ell_p$.

Доведення. Припустимо, що існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $Tf = \theta \square f$. Зафіксуємо $y \in \ell_p$. Тоді

$$[T \circ M_y](f)(x) = [T(M_y(f))](x) = [\theta \square M_y(f)](x) =$$

$$\theta[M_x(M_y(f)] = \theta[M_{x \diamond y}(f)].$$

З іншого боку,

$$[M_y \circ T](f)(x) = [M_y(Tf)](x) = Tf(x \diamond y) = (\theta \square f)(x \diamond y) = \theta[M_{x \diamond y}(f)].$$

Навпаки, нехай $x_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, покладемо $\theta = \delta_{x_0} \circ T$. Очевидно, що $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Переконаємось, що $Tf = \theta \square f$. Дійсно, $(\theta \square f)(x) = \theta[M_x(f)] = [T(M_x(f))](x_0) = [M_x(T(f))](x_0) = Tf(x_0 \diamond x) = Tf(x)$. $\square$

Теорема 2.2. *Гомоморфізм* $T : H_{bs}(\ell_p) \to H_{bs}(\ell_p)$ *такий, що* $T(F_k) = a_k F_k$ *є неперервним тоді і тільки тоді, якщо існує* $\varphi \in M_{bs}(\ell_p)$ *такий, що* $\varphi(F_k) = a_k$.

Доведення. Нехай $\varphi \in M_{bs}(\ell_p)$, $\varphi(F_k) = a_k$. Тоді

$$(\varphi \square F_k)(x) = \varphi \square \delta_x(F_k) = \varphi(F_k) F_k(x) = a_k F_k$$

і є неперервним гомоморфізмом.

Навпаки, нехай T неперервний. Очевидно, шо T комутує з усіма M_y. Згідно з твердженням 2.6 він має вигляд $T(f) = \varphi \square f$ для деякого $\varphi \in M_{bs}(\ell_p)$. Таким чином, $T(F_k) = \varphi(F_k) F_k(x) = a_k F_k$. $\square$

3 Випадок простору ℓ_1

У цьому розділі ми розглядаємо алгебру $H_{bs}(\ell_1)$. Окрім базису $\{F_n\}$, дана алгебра має інший природній базис, що задається послідовністю $\{G_n\}$:

$$G_n(x) = \sum_{k_1<\dots<k_n}^{\infty} x_{k_1}\cdots x_{k_n},$$

де $G_0 = 1$.

Нехай $\mathbb{C}\{t\}$ — простір всіх степеневих рядів над $\mathbb{C}$. Позначимо через $\mathcal{G}$ наступне відображення з $M_{bs}(\ell_1)$ в $\mathbb{C}\{t\}$:

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(G_n) = \varphi\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\Big).$$

Візьмемо $\varphi = \delta_{(a,b,0,0,\dots)}$ і обчислимо $\mathcal{G}(\varphi\Box\delta_x)(t)$. Маємо, що

$$\mathcal{G}(\varphi\Box\delta_x)(t) = \Big(\varphi\Box\delta_x\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\Big) =$$

$$\Big(\delta_{(a,0,0,\dots)}\Box\delta_x\Big) \star \Big(\delta_{(b,0,0,\dots)}\Box\delta_x\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\Big) =$$

$$\Big(\delta_{(a,0,0,\dots)}\Box\delta_x\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\Big)\Big(\delta_{(b,0,0,\dots)}\Box\delta_x\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\Big) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(ax) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(bx) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n G_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n b^n G_n(x).$$

Візьмемо тепер $\delta_x, \delta_y \in M_{bs}(\ell_1)$, $x, y \in \ell_1$. Тоді

$$\mathcal{G}(\delta_y\Box\delta_x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n y_1^n G_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n y_2^n G_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n y_3^n G_n(x) \dots =$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^n y_k^n G_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^n x_k^n G_n(y). \tag{3}$$

Більш загально, для довільного $\varphi \in M_{bs}(\ell_1)$, $y \in \ell_1$

$$\mathcal{G}(\delta_y\Box\varphi)(t) = \Big(\delta_y\Box\varphi\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\Big) = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^n y_k^n \varphi(G_n).$$

У роботі [6] побудовано сім'ю елементів множини $M_{bs}(\ell_1)$, ψ_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$ таку, що $\psi_\lambda(F_1) = \lambda$ і $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > 1$ і показано, що $\mathcal{G}(\psi_\lambda)(t) = e^{\lambda t}$. Легко бачити, що

1. $\psi_\lambda \Box \varphi(F_1) = \lambda\varphi(F_1)$;
2. $\psi_\lambda \Box \varphi(F_k) = 0, \quad k > 1$;
3. $\mathcal{G}(\psi_\lambda \Box \varphi) = e^{\lambda\varphi(F_1)t}$.

Теорема 3.1. *Нехай $g(t)$ і $h(t)$ — функції експоненціального типу однієї змінної, такі що $g(0) = h(0) = 1$ і $\{a_n\}$ є нулями функції $g(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty$; $\{b_n\}$ є нулями функції $h(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b_n|} < \infty$. Тоді існує функція експоненціального типу $u(t)$ з нулями $\{a_n b_m\}_{n,m}$, яку можна подати у вигляді*

$$u(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{a_k} \Big)^n h_n(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{b_k} \Big)^n g_n(t).$$

Доведення. Згідно [6], $g(t) = \mathcal{G}(\delta_x)(t)$ і $h(t) = \mathcal{G}(\delta_y)(t)$, де $x, y \in \ell_1$, $x_n = -\frac{1}{a_n}$, $y_n = -\frac{1}{b_n}$. Тому $u(t) = \mathcal{G}(\delta_x \Box \delta_y)(t)$ і за формулою (3) отримуємо твердження теореми. $\Box$

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ — послідовність комплексних чисел, така що $x \in \ell_{1+d}$ для кожного $d > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} n|x_n| < \infty, \qquad \limsup_{r\to 1} \Big| \sum_{\frac{1}{|x_n|} < r} x_n \Big| < \infty \tag{4}$$

і $\lambda \in \mathbb{C}$. Позначимо через $\delta_{(x,\lambda)}$ гомоморфізм на алгебрі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ наступного вигляду:

$$\delta_{(x,\lambda)}(F_1) = \lambda, \qquad \delta_{(x,\lambda)}(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k, \quad k > 1.$$

Твердження 3.1 ([6])**.** *Нехай $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Тоді звуження φ на алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ співпадає з $\varphi_{(x,\lambda)}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$ і x, що задовольняє (4).*

Теорема 3.2. *Не існує неперервного характера вигляду* $\delta_{(\lambda,u)}$, *де*

$$u = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

Доведення. Достатньо показати, що для $w = u \diamond u$ не виконується умова теореми Ліндельофа [8]

$$\limsup_{n\to\infty} w_n n < \infty.$$

Розглянемо для простоти підпослідовність $v = (v_n) \subset (u_n)$,

$$v = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

Оскільки $s = v \diamond v \subset w$, то достатньо показати, що

$$\limsup_{n\to\infty} s_n n = \infty.$$

Позначимо $d(m)$ — кількість дільників натурального числа m. Тоді у послідовності (s_n) кожне число $1/m$ зустрічається $d(m)$ разів. Без втрати загальності можна вважати, що

$$s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n \le \ldots.$$

Тоді s має вигляд

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \underbrace{\frac{1}{m}, \dots \frac{1}{m}}_{d(m)}, \dots.$$

Зокрема, номер останнього входження елемента $\frac{1}{m}$ дорівнює $\sum\limits_{n=1}^{m} d(n)$. З теорії чисел відомо [9, теорема 3.3], що

$$\sum_{n=1}^{m} d(n) = m \ln m + 2(\gamma - 1)m + O(\sqrt{m}),$$

де γ — константа Ейлера. Тому

$$\limsup_{n\to\infty} s_n n \ge \limsup_{m\to\infty} \frac{m \ln m}{m} = \limsup_{m\to\infty} \ln m = \infty.$$

$\square$

Наслідок 3.1. *Існує функція експоненціального типу $g(t)$, $g(0) = 0$, для якої не існує характера $\varphi \in M_{bs}$ такого, що $\mathcal{G}(\varphi)(t) = g(t)$.*

Доведення. Достатньо взяти функцію експоненціального типу, нулями якої будуть елементи послідовності

$$\left\{\frac{1}{u_n}\right\} = \{1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

Такою є, наприклад, функція

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

(див. [8]). □

Залишилось відкритим питання:

Чи кожен елемент з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ можна подати у вигляді цілої функції експоненціального типу з нулями $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такими, що або $\{a_n\} = \emptyset$ або $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty$?

[1] *van der Waerden B.L.* Modern Algebra. — Ungar, 1964. — 264 p.

[2] *Nemirovski A.S. and Semenov S.M.* On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik. — 1973. — **2**, №21. — P. 255–277.

[3] *Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. — 1999. — **59.** — P. 681–697.

[4] *Чернега І.В.* Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 // Мат. методи і фіз. мех. поля. — 2006. — **2**, №49. — С. 52–57.

[5] *Chernega I., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2012. — **55.** — P. 125–142.

[6] *Chernega I., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // To appear.

[7] *Aron R.M., Cole B.J. and Gamelin T.W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. — 1991. — **415**. — P. 51–93.

[8] *Levin B. Ya.* Lectures on Entire Functions. — AMS, Providence, RI: Transl. of Math. Monographs, **150**, 1996. — 248 p.

[9] *Apostol T.* Introduction to Analytic Number Theory. — New York: Springer-Verlag, 1976. — 338 p.

[10] *Dineen S.* Complex Analysis in Locally Convex Spaces. — Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, Mathematics Studies, Vol. 57, 1981. — 492 p.

THE MULTIPLICATIVE CONVOLUTION ON THE SPECTRA OF ALGEBRAS OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS

Andriy ZAGORODNYUK[1], *Iryna CHERNEGA*[2]

[1] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *andriyzag@yahoo.com*

[2] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3b Naukova Str., L'viv 79060, Ukraine
e-mail: *icherneha@ukr.net*

Using introduced operation of multiplicative convolution we investigate the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type on the space ℓ_1.