Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2016. — Т.13

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2016. — V.13

РЯДИ ДІРІХЛЕ ЗБІЖНІ У ПІВПЛОЩИНІ ТА h-МІРА ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ

М.В. Баб'як[1], Т.М. Сало[2], О.Б. Скасків[1]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, 79001*

[2]*Національний університет "Львівська політехніка", вул. С.Бандери 12, Львів, 79013*

М.В. Баб'як, Т.М. Сало, О.Б. Скасків. *Ряди Діріхле збіжні у півплощині та h-міра виняткової множини* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2016. — Т.13. — С. 48–57.

Для абсолютно збіжних у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ і додатної неперервної зростаючої до $+\infty$ на $[-1, 0)$ функції h з неспадною до $+\infty$ похідною, знайдено умови на показники (λ_n) при яких співвідношення $F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}$ виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини E скінченної h-міри рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

M.V. Babyak, T.M. Salo, O.B. Skaskiv, *Dirichlet series convergent in the half-plane and h-measure of exceptional set*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016), 48–57.

For a Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, absolutely convergent in the half-plane $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, and a positive continuous function h increasing to $+\infty$ on $[-1, 0)$ with non-decreasing to $+\infty$ derivative, we establish conditions on (λ_n) under which the relation $F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}$ holds as $x \to -0$ outside some set E of finite h-measure uniformly in $y \in \mathbb{R}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50 *УДК:* 517.76

Ключові слова та фрази: ряд Діріхле, мінімум модуля, максимум модуля, максимальний член, виняткова множина

E-mail: mykola.babyak@gmail.com, olskask@gmail.com, tetyan.salo@gmail.com

1. Вступ

Нехай $D_a(\Lambda)$ – клас абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_a = \{z\colon \operatorname{Re} z < a\}$ рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n} \tag{1}$$

з фіксованою послідовністю показників $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$. Для $F \in D_a(\Lambda)$ і $x < a$ позначимо

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}, \ \ m(x,F) = \inf\{|F(x+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\},$$

а через $\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n \ge 0\}$ – максимальний член ряду, $\nu(x,F) = \max\{n\colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду Діріхле. Нехай L – клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій.

У випадку цілих рядів Діріхле ($F \in D_{+\infty}(\Lambda)$) відомо ([8]), що умова

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty \tag{2}$$

є необхідною та достатньою для того, щоб для кожної функції $F \in D_{+\infty}(\Lambda)$ співвідношення

$$F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}} \tag{3}$$

виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини $E \subset \mathbb{R}_+$ скінченної міри рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Скінченність міри виняткової множини E у цьому твердженні є непокращуваним її описом ([12]) у тому сенсі, що для довільної неспадної функції $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такої, що $h(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, і для довільної такої як і вище послідовності Λ, існують цілий ряд Діріхле $F \in D_{+\infty}(\Lambda)$, стала $\beta > 0$ і вимірна множина $E_1 \subset [0,+\infty)$ нескінченної h-міри (h-meas $(E_1) \overset{def}{=} \int_{E_1} dh(x) = +\infty$) така, що

$$(\forall\, x \in E_1)\colon\ M(x,F) > (1+\beta)\mu(x,F), \ \ M(x,F) > (1+\beta)m(x,F). \tag{4}$$

Зауваження 1. Відзначимо, що співвідношення (3) виконується при $x \to a-0$ $(x \in E_0)$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, тоді і тільки тоді, коли $M(x,F) \sim \mu(x,F)$ при $x \to a-0$ $(x \in E_0)$; крім цього із співвідношення (3) випливає, що $M(x,F) \sim m(x,F)$ при $x \to a-0$ $(x \in E_0)$.

Для рядів Діріхле $F \in D_0(\Lambda)$ в [9, теорема 10] доведено наступне твердження.

Твердження 2. *Якщо виконується умова* (2)*, то для довільного* $\eta > 0$ *існує множина* $E_1 \subset [-1, 0)$ *скінченної логарифмічної міри, тобто,* $\int_{E_1} d\ln(1/|x|) < +\infty$*, така, що для всіх* $x \in [-1, 0) \setminus E_1$ *виконується нерівність*

$$M(x, F) < \big(1/|x|\big)^{1+\eta}\mu(x, F). \tag{5}$$

Нескладна модифікація міркувань з доведення теореми 10 ([9]) дозволяє останню нерівність переписати у вигляді

$$M(x, F) < \big(1/|x|\big)\ln^{1+\eta}(1/|x|)\mu(x, F), \quad \eta > 0,$$

а якщо, крім цього, послідовність коефіцієнтів (a_n) є обмеженою, то з умови (2) випливає, що $M(x, F) = O(1/\sqrt{|x|})$ $(x \to -0)$.

Наступний приклад показує, що у твердженні 2 відмовитися від умови (2) взагалі кажучи, не можна. Справді, розглянемо при $x < 0$ функцію

$$F(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \exp\{-|x|n^2 \ln\ln n^2 + n^2\}, \ F \in D_0(\Lambda),$$

де для $\lambda_n = n^2 \ln\ln n^2$ умова (2), очевидно, не виконується. Далі,

$$F(x) \geq \int_2^{+\infty} \exp\{-|x|t^2 \ln\ln t^2 + t^2\}dt - \mu(x, F) = I(x) - \mu(x, F).$$

Введемо позначення $h(t, x) = -|x|t\ln\ln t + t$. Очевидно, що $\sup\{h(t, x) : t \geq 4\} \geq \ln\mu(x, F)$ $(x \to -0)$. Оскільки $h(t, x)$, як функція від t, вгнута, то для всіх $x < 0$ вона має єдину точку максимуму $t = t(x)$, яку знаходимо з рівняння

$$h'_t(t, x) = -|x|\Big(\ln\ln t + \frac{1}{\ln t}\Big) + 1 = 0.$$

Звідси, зокрема, маємо, що

$$t(x) \to +\infty, \quad \ln t(x) = \exp\left\{\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\ln t(x)}\right\} \sim \exp\left\{\frac{1}{|x|}\right\} \quad (x \to -0).$$

Позначимо $\rho(x) = |h''_{tt}(t(x), x)|^{-\frac{1}{2}}$. Зауважимо, що для $|t - t(x)| \leq \rho(x)$, при $x \to -0$

$$h''_{tt}(t, x) \sim h''(t(x), x) \sim -\Big(\frac{t(x)\ln t(x)}{|x|}\Big)^{-1}.$$

Тому, при $x \to -0$ маємо

$$
\begin{aligned}
2I(x)e^{-h(t(x),x)} &\geq \int_{|t-t(x)|\leq\rho(x)} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{h(t,x)-h(t(x),x)}dt = \\
&= \frac{(1+o(1))}{\sqrt{t(x)}} \cdot \int_{|t-t(x)|\leq\rho(x)} e^{(\frac{1}{2}+o(1))h''(t(x),x)(t-t(x))^2}dt \geq \\
&\geq \frac{2+o(1)}{\sqrt{t(x)}}\rho(x)\cdot e^{-(\frac{1}{2}+o(1))} \sim \frac{2+o(1)}{\sqrt{e}}\sqrt{\frac{\ln t(x)}{|x|}} \sim \frac{2+o(1)}{\sqrt{e}}\sqrt{\frac{1}{|x|}e^{\frac{1}{|x|}}}.
\end{aligned}
$$

Звідси, при $x \to -0$ виводимо

$$
\varliminf_{x\to-0} \frac{F(x)}{\mu(x,F)}\sqrt{|x|e^{-\frac{1}{|x|}}} \geq \frac{1}{\sqrt{e}} > 0,
$$

тобто співвідношення (5) не може виконуватися для жодного $\eta > 0$. Крім цього, зрозуміло, що

$$
F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|x|n^2} \geq \int_0^{+\infty} e^{-|x|t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|x|}} \quad (x \neq 0).
$$

Зауваження 3. Авторам в даний момент не відомо, наскільки точним у твердженні 2 є показник $1+\eta$.

З іншого боку, з доведеного в [6, теорема 1] випливає, що для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ (у тому числі і такої, що умова (2) виконується) і для довільних функцій $\psi, \omega \in L$ існує функція $F \in D_0(\Lambda)$, для якої виконуються співвідношення

$$
\begin{gathered}
\frac{\omega(M(x,F))}{\omega(\mu(x,F))} \to +\infty, \quad \frac{\omega(M(x,F))}{\omega(m(x,F))} \to +\infty \quad (x \to -0), \\
\sup\{|a_n| \colon n \geq 0\} = +\infty, \quad \ln\mu(x,F) \leq \psi(1/|x|) \quad (x_1 \leq x < 0).
\end{gathered}
$$

В [6, теорема 2] також доведено, що для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ такої, що умова (2) не виконується і для довільної функції $\psi \in L$ існує функція $F \in D_0(\Lambda)$, для якої співвідношення $M(x,F) \sim \mu(x,F)$, $M(x,F) \sim m(x,F)$ не можуть виконуватись навіть на деякій послідовності $x = x_j \to -0$ $(j \to +\infty)$, при цьому

$$
\ln\mu(x,F) \geq \psi(1/|x|) \quad (x_1 \leq x < 0). \tag{6}
$$

З наведених тверджень випливає, що умови достатні для того, щоб співвідношення (3) виконувалось у підкласах $D_0(\Lambda)$ принаймні при $x = x_j \to +\infty$ і рiвномiрно по $y \in \mathbb{R}$ повиннi мiстити умову збiжностi ряду (2), а також умову вигляду (6).

З [6, теорема 3] (див. також [9]) випливає, що для $F \in D_0(\Lambda)$ i $\Phi \in L$ умови

$$\overline{\lim_{x\to -0}} \frac{\ln \mu(x,F)}{|x|\Phi(1/|x|)} > 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} t \sum\nolimits_{\lambda_n \geq \Phi(t)} \tfrac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = 0$$

забезпечують виконання спiввiдношення (3) при $x \to -0$ зовнi деякої множини нульової нижньої лiнiйної щiльностi в точцi $x = 0$. У статтi [9, теорема 5] доведено, що умови

$$\underline{\lim_{x\to -0}} \frac{\ln \mu(x,F)}{|x|\Phi(1/|x|)} > 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} t \cdot \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} \tfrac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = 0,\ \Phi_1(t) := \frac{\Phi(t)}{t}$$

iмплiкують виконання спiввiдношення (3) при $x \to -0$ зовнi деякої множини нульової лiнiйної щiльностi в точцi $x = 0$. При цьому вiд функцiї $\Phi_1 \in L$ додатково вимагається диференцiйовностi i виконання умови

$$\underline{\lim}_{t\to+\infty} t\big(\ln \Phi_1(t)\big)' > 1.$$

У статтi [6] анонсовано це твердження з довiльною функцiєю $\Phi \in L$ i за (в загальному) слабшої другої умови, в якiй функцiю Φ_1 слiд замiнити на функцiю Φ.

2. Основнi результати

Нехай L_0 – клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ на $[-1,0)$ функцiй, а L_0^+ – пiдклас L_0, в який входять диференцiйовнi функцiї з неспадною до $+\infty$ на $[-1,0)$ похiдною.

Для $h \in L_0$ назвемо *h-мiрою множини* $E \subset (-\infty,0)$ величину

$$\text{h-meas}\,(E) \stackrel{def}{=} \int\limits_{E\cap[-1,0)} dh(x).$$

Зокрема, при $h(x) = \ln\frac{1}{|x|}$ отримуємо *логарифмiчну мiру* на $[-1,0)$.

Для $\Phi \in L$ визначимо пiдклас

$$D_0(\Lambda,\Phi) = \{F \in D_0(\Lambda):\ \ln \mu(x,F) \geq \Phi\big(1/|x|\big)\ (x > x_0)\}.$$

Надалi припускатимемо, що послiдовнiсть $\Lambda = (\lambda_n)$ задовольняє умову (2). Позначимо $\Delta_0 = 0$ i для $n \geq 1$ приймемо

$$\Delta_n = \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\lambda_{j+1}-\lambda_j\Big)\sum_{m=j+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_m-\lambda_{m-1}} + \frac{1}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}\Big).$$

Теорема 4. *Нехай* $\Phi \in L$, $h \in L_0^+$, $F \in D_0(\Lambda, \Phi)$, *а* φ *– обернена до* Φ *функція. Якщо*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln|a_n|}{\Delta_n} = +\infty \tag{7}$$

і

$$(\forall b > 0): \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} h'\Big(-\frac{1}{\varphi(\lambda_n)} + \frac{b}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\Big) < +\infty, \tag{8}$$

то співвідношення (3) виконується при $x \to -0$ *зовні деякої множини* E *скінченної* h*-міри рівномірно по* $y \in \mathbb{R}$.

Зауваження 5. Відзначимо, що з одного боку умова (7) є достатньою для того, щоб співвідношення (3) виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини нульової нижньої лінійної щільності у точці $x = 0$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, а з іншого боку для кожного $q > 0$ ряд Діріхле $F_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{q\Delta_n + z\lambda_n}$, $F_q \in D_0(\Lambda)$, а співвідношення (3) для нього не може виконуватись навіть на деякій послідовності $x = x_j \to -0$ $(j \to +\infty)$. Власне, для всіх $x \in (x_1, 0)$ виконуються нерівності (4) (див. [6]). Проте у зв'язку з теоремою 4 висловимо таке припущення.

Гіпотеза 1. Твердження теореми 4 є правильним без умови (7), тобто, для кожної $F \in D_0(\Lambda, \Phi)$, якщо виконується умова (8) з $\Phi \in L$, $h \in L_0^+$.

Доведення теореми 4. Розглянемо функцію

$$f_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} e^{z\lambda_n},$$

де $\alpha_n = e^{q\Delta_n}$, $q > 0$.

Оскільки $\Delta_n = o(\lambda_n)$ при $n \to +\infty$, то для абсциси абсолютної збіжності маємо

$$\sigma_a(f_q) = -\limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln|a_n| - q\Delta_n}{\lambda_n} = -\limsup_{n\to+\infty} \Big(\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} - q\frac{\Delta_n}{\lambda_n}\Big) = 0,$$

тобто $f_q \in D_0(\Lambda)$.

Покажемо, що $\nu(x, f_q) \to +\infty$ $(x \to -0)$.

Справді, якщо припустити, що $\lim\limits_{\sigma\to-0} \nu(\sigma, f_q) < +\infty$, то існували б $x_1 < 0$ і $k \ge 0$ такі, що для всіх $n \ge 0$ і $x \in (x_1, 0)$ виконується $\dfrac{a_k}{\alpha_k} e^{x\lambda_k} \ge \dfrac{a_n}{\alpha_n} e^{x\lambda_n}$. Тоді при $x \to -0$ отримаємо $\dfrac{a_k}{\alpha_k} \ge \dfrac{a_n}{\alpha_n}$, тобто $\dfrac{a_k}{\alpha_k} = \sup\limits_{j\ge0} \dfrac{a_j}{\alpha_j}$, а це суперечить (7).

Повторюючи доведення леми 1 з [3], нескладно отримати наступну лему.

Лема 6. *Для всiх $n \geq 0$ i $k \geq 1$ виконується нерiвнiсть*

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\, e^{\tau_k(\lambda_n-\lambda_k)} \leq e^{-q|n-k|}, \tag{9}$$

де $\tau_k = \tau_k(q) = qt_k + \dfrac{q}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$, $t_k = \dfrac{\Delta_{k-1} - \Delta_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$.

Доведення леми 6. Оскiльки

$$\ln \alpha_n - \ln \alpha_{n-1} = q(\Delta_n - \Delta_{n-1}) = -qt_n(\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

то для $n \geq k+1$ маємо

$$\ln\frac{\alpha_n}{\alpha_k} + \tau_k(\lambda_n - \lambda_k) = -q \sum_{j=k+1}^{n} t_j(\lambda_j - \lambda_{j-1}) + \tau_k \sum_{j=k+1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{j-1}) =$$

$$= - \sum_{j=k+1}^{n} \big(qt_j - \tau_k\big)\big(\lambda_j - \lambda_{j-1}\big) \leq - \sum_{j=k+1}^{n} \big(qt_j - \tau_{j-1}\big)\big(\lambda_j - \lambda_{j-1}\big) =$$

$$= -q \sum_{j=k+1}^{n} 1 = -q(n-k).$$

Подiбно доводимо, що для $n \leq k-1$

$$\ln \frac{\alpha_n}{\alpha_k} + \tau_k(\lambda_n - \lambda_k) = -\ln \frac{\alpha_k}{\alpha_n} - \tau_k(\lambda_k - \lambda_n) =$$

$$= q \sum_{j=n+1}^{k} t_j(\lambda_j - \lambda_{j-1}) - \tau_k \sum_{j=n+1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j-1}) = - \sum_{j=n+1}^{k} (\tau_k - qt_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \leq$$

$$\leq - \sum_{j=n+1}^{k} (\tau_j - qt_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1}) = -q \sum_{j=n+1}^{k} 1 = -q(k-n)$$

i лему 1 доведено. □

Нехай J – множина значень центрального iндекса $\nu(x, f_q)$, а (R_k) – послiдовнiсть точок стрибка $\nu(x, f_q)$, занумерована так, що $\nu(x, f_q) = k$ для $x \in [R_k, R_{k+1})$ у випадку $R_k < R_{k+1}$. Тодi для $x \in [R_k, R_{k+1})$ маємо

$$\frac{a_n}{\alpha_n} e^{x\lambda_n} \leq \frac{a_k}{\alpha_k} e^{x\lambda_k}$$

для всiх $n \geq 0$. Враховуючи лему 1, для $x \in [R_k + \tau_k, R_{k+1} + \tau_k)$ отримуємо

$$\frac{a_n e^{x\lambda_n}}{a_k e^{x\lambda_k}} = \frac{a_n e^{(x-\tau_k)\lambda_n}}{a_k e^{(x-\tau_k)\lambda_k}} e^{\tau_k(\lambda_n-\lambda_k)} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\, e^{\tau_k(\lambda_n-\lambda_k)} \leq e^{-q|n-k|} \quad (n \geq 0).$$

Отже,

$$\nu(x,F)=k,\quad \mu(x,F)=a_k e^{x\lambda_k}\quad (x\in[R_k+\tau_k,R_{k+1}+\tau_k)) \tag{10}$$

і

$$|F(x+iy)-a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}|\le$$
$$\le \sum_{n\ne\nu(x,F)}\mu(x,F)e^{-q|n-\nu(x,F)|}\le 2\,\frac{e^{-q}}{1-e^{-q}}\,\mu(x,F) \tag{11}$$

для всіх $x\in[R_k+\tau_k,R_{k+1}+\tau_k)$ і $k\in J$. Тобто, нерівність (11) виконується для всіх $x\notin E_1(q)\overset{def}{=}\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}[R_{k+1}+\tau_k,R_{k+1}+\tau_{k+1})$.

Оскільки $\tau_{k+1}-\tau_k=2q/(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$, а за теоремою Лагранжа про кінцеві прирости

$$h(R_{k+1}+\tau_{k+1})-h(R_{k+1}+\tau_k)=(\tau_{k+1}-\tau_k)h'(R_{k+1}+\tau_k+\theta_k(\tau_{k+1}-\tau_k)),$$

де $\theta_k\in(0;1)$, то для h-міри множини $E_1(q)$ для кожного $q>0$ маємо оцінку

$$\begin{aligned}\text{h-meas}\,(E_1(q))&=\sum_{k=k_0}^{+\infty}\int\limits_{R_{k+1}+\tau_k}^{R_{k+1}+\tau_{k+1}}dh(x)=\\&=\sum_{k=k_0}^{+\infty}(h(R_{k+1}+\tau_{k+1})-h(R_{k+1}+\tau_k))\le\\&\le 2q\sum_{k=k_0}^{+\infty}\tfrac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}h'\big(R_{k+1}+\tau_k+\tfrac{2q}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\big),\end{aligned}$$

при цьому ми скористались умовою $h\in L_0^+$.

Для $F\in D_0(\Lambda,\Phi)$ при $x>x_0$ маємо

$$\Phi\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\le\ln\mu(x,F)=\ln|a_{\nu(x,F)}|-|x|\lambda_{\nu(x,F)}\le\ln|a_{\nu(x,F)}|,$$

звідки, для всіх достатньо великих $x\ge x_2\ge x_0$ випливає

$$\Phi\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\le\lambda_{\nu(x-0,F)}, \tag{12}$$

тобто,

$$|x|\ge\frac{1}{\varphi(\lambda_{\nu(x-0,F)})}\quad (x\ge x_2),$$

і для $k \geq k_2$ з (10) отримаємо

$$R_{k+1} + \tau_k \leq -\frac{1}{\varphi(\lambda_{\nu(R_{k+1}+\tau_k-0,F)})} = -\frac{1}{\varphi(\lambda_k)}.$$

Застосовуючи останню нерівність до нерівності (2), за умовою $h \in L_0^+$ отримаємо

$$\text{h-meas}\,(E_1(q)) \leq 2q \sum_{k=k_0}^{+\infty} \tfrac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} h'\big(-\tfrac{1}{\varphi(\lambda_k)} + \tfrac{2q}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\big). \tag{13}$$

Звідси, за умовою (8) маємо, що h-meas $(E_1(q)) < +\infty$.

Нехай тепер $q_k = k$. Оскільки h-meas $(E_1(q_k)) < +\infty$, то h-meas $(E_1(q_k) \cap [x,0)) = o(1)\ \ (x \to -0)$, тому можна вибрати таку зростаючу до -0 послідовність (x_k), що h-meas $\big(E_1(q_k) \cap [x_k, 0)\big) \leq \frac{1}{k^2}$ для всіх $k \geq 1$.

Позначимо $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \big(E_1(q_k) \cap [x_k, x_{k+1})\big)$. Тоді, з одного боку

$$\text{h-meas}\,(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{h-meas}\,\big(E_1(q_k) \cap [x_k, x_{k+1})\big) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

а з іншого, з нерівності (11) випливає, що для всіх $x \in [x_k, x_{k+1}) \setminus E_1$ виконується нерівність

$$|F(x+iy) - a_{\nu(x,F)} e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}| \leq \frac{2e^{-q_k}}{1-e^{-q_k}} \mu(x, F),$$

звідки при $x \to -0$ $(x \notin E_1)$ отримуємо (3). Теорему 4 доведено. □

Відзначимо, що подібні результати отримано і для цілих рядів Діріхле з описанням величини виняткової множини в термінах асимптотичних h-щільностей [5, 7] та h-міри [11], а у статтях [2]–[10] для цілих кратних рядів Діріхле і рядів Діріхле з "монотонними" коефіцієнтами.

ЛІТЕРАТУРА

1. М.Р. Луцишин, *Про максимальний член цілого ряду Діріхле з комплексними показниками і монотонними коефіцієнтами*, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **51** (1998) 33–36.

2. М.Р. Луцишин, О.Б. Скасків, *Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле*, Укр.матем.журн. **44**:9 (1992) 1296–1298.

3. М.Р. Луцишин, О.Б. Скасків, *Асимптотичні властивості кратного ряду Діріхле*, Матем. студії. **3** (1994) 41–48.

4. М.Р. Луцишин, О.Б. Скасків, *Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле з монотонними коефіцієнтами*, Мат. методи і фіз.-мех. поля.**40**:4 (1997) 21–25; English transl. in J. Math. Sci., **96** (2), (1999) 2957–2960.

5. Т.М. Сало, *Оцінка виняткової множини в асимптотичній рівності між максимальним членом та сумою ряду Діріхле швидкого зростання*, Вісн. Львів.ун-ту. Сер. мех.-мат. **60** (2002) 115–121.

6. Т. Сало, О. Скасків, *Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле*, Мат. вісн. Наук.тов. ім. Шевченка, **4** (2007) 564–574.

7. Т.М. Сало, О.Б. Скасків, *Цілі ряди Діріхле швидкого зростання і нові оцінки міри виняткових множин в теоремах типу Вімана-Валірона*, Укр. мат. журн. **53**:6 (2001) 830–839.

8. О.Б. Скасків, *Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле*, Доп. АН України, сер. А. 11 (1984) 22–24.

9. О.Б. Скаскив, *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции*, Изв. АН СССР, сер. мат. **53**:4 (1989) 833–850.

10. T.M. Salo, S.I. Panchuk, O.B. Skaskiv, *Entire Dirichlet series with monotonous coefficients and logarithmic h-measure*, preprint, 2015 (https://arxiv.org/abs/1512.08032).

11. T.M. Salo, O.B. Skaskiv, *The minimum modulus of gap power series and h-measure of exceptional sets*, preprint, 2015 (https://arxiv.org/abs/1512.05557).

12. T.M. Salo, O.B. Skaskiv, O.M. Trakalo, *On the best possible description of exceptional set in Wiman–Valiron theory for entire functions,* Mat. Stud., **16**:2 (2001) 131–140.

Надійшло 15.11.2016

Після переробки 9.12.2016