ОСОБЛИВІ ТОЧКИ СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ 4 ПОПАРНО ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК НА ПРЯМІЙ ТА ЗАМКНУТОГО ЛАНЦЮЖКА 4 ЧАСТИНОК НА ПРЯМІЙ ІЗ ВЗАЄМОДІЄЮ НАЙБЛИЖЧИХ СУСІДІВ

©2012 р. Богдан ДОВГАНЬ, Андрій ВУС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79602

e-mail: *bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net*

Редакція отримала статтю 29 березня 2012 р.

Досліджуються особливі точки інтегровних потенціалів в симетричній задачі системи чотирьох попарно взаємодіючих частинок на прямій та в симетричній задачі системи замкнутого ланцюжка чотирьох взаємодіючих частинок на прямій із взаємодією найближчих сусідів.

У даній роботі розглядається система 4 попарно взаємодіючих частинок, що симетрично розташовані на прямій з гамільтоніаном

$$H = T + W, \tag{1}$$

де кінетична енергія $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, а

$$W = V(x+y) + V(y-x) + \frac{1}{2}V(2x) + \frac{1}{2}V(2y). \tag{2}$$

Задача визначення інтегровності за Ліувілем полягає у відшуканні одного додаткового першого інтеграла, функціонально незалежного з

УДК: 517.9; MSC 2010: 70H06

Ключові слова і фрази: гамільтонова система, перший інтеграл, дужка Пуасона, теорема додавання

H. З рівності нулю дужки Пуасона $\{F, H\} = 0$, в роботі [1] отримано теорему додавання

$$\begin{aligned}\xi = 2(V(x+y) - V(y-x))(V''(2y) - V''(2x)) - \\ -3V'(2x)(V'(x+y) + V'(y-x)) + 3V'(2y)(V'(x+y) - \\ -V'(y-x)) + (V(2y) - V(2x))(V''(x+y) - V''(y-x)) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

для невідомого потенціала взаємодії. Виконавши у рівнянні (3) заміну $x + y = v, y - x = u$,$2y = u + v, 2x = v - u$, отримаємо

$$\begin{aligned}\eta(u, v) = 2(V(v) - V(u))(V''(u+v) - V''(v-u)) + \\ +(V(u+v) - V(v-u))(V''(v) - V''(u)) - \\ -3V'(v-u)(V'(v) + V'(u)) + 3V'(u+v)(V'(v) - V'(u)) = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

До того ж, в роботі [1] показано, що система з гамільтоніаном (1), (2) може мати додатковий перший інтеграл лише для потенціала, що має в нулі полюс другого порядку.

Також розглядається аналогічна задача взаємодії найближчих сусідів замкнутого ланцюжка 4 частинок на прямій, потенціальна частина гамільтоніана для якої має вигляд

$$W = V(y-x) + \frac{1}{2}V(2x) + \frac{1}{2}V(2y), \tag{5}$$

і з рівності $\{F, H\} = 0$, в роботі [2] отримано теорему додавання

$$\begin{aligned}\xi = -2V(y-x)(V''(2y) - V''(2x)) - (V(2y) - \\ -V(2x))V''(y-x) - 3(V'(2x) + V'(2y))(V'(y-x)) = 0\end{aligned} \tag{6}$$

для потенціала взаємодії $V(\cdot)$. Виконавши у рівнянні (6) заміну $x + y = v, y - x = u, 2y = u + v, 2x = v - u$, отримаємо

$$\begin{aligned}\eta(u, v) = -2V(u)(V''(u+v) - V''(v-u)) - (V(u+v) - \\ -V(v-u))V''(u) - 3(V'(v-u) + V'(u+v))V'(u) = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

У даній статті розглянуто питання можливості існування ненульових особливих точок потенціалів взаємодії для двох згаданих систем (тобто систем з гамільтоніанами (1), (2) і (1), (5) відповідно).

1 Ненульовий полюс в задачі попарної взаємодії 4 частинок на прямій

Лема 1.1. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (2) *допускає перший інтеграл четвертого порядку. Якщо для мероморфного потенціала* $V(x)$ *існує ненульовий полюс* a*, то*
(*i*) V *— періодична функція з періодом* a*;*
(*ii*) a *— полюс другого порядку.*

Доведення. Нехай точка a — полюс порядку $-\alpha$ ($\alpha < 0$), тоді в околі точки a потенціал V має вигляд $V(x) = (x-a)^\alpha + o((x-a)^\alpha)$. Підставивши сюди $x = \tilde{x} + a$, отримаємо $V(\tilde{x} + a) = \tilde{x}^\alpha + \ldots$.

Виконавши у рівнянні (3) заміну $\tilde{x} = x + \frac{a}{2}, \tilde{y} = y + \frac{a}{2}$, та позначивши знову $(\tilde{x}, \tilde{y})$ через (x, y), отримаємо

$$\begin{aligned}
&2(V(x+y+a) - V(y-x))(V''(2y+a) - V''(2x+a)) - \\
&-3V'(2x+a)(V'(x+y+a) + V'(y-x)) + \\
&+3V'(2y+a)(V'(x+y+a) - V'(y-x)) + \\
&+(V(2y+a) - V(2x+a))(V''(x+y+a) - V''(y-x)) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Розклавши (8) за степенями x, та прирівнявши до нуля коефіцієнт при найменшому степені $(2x)^{\alpha-2}$ в цьому розкладі, отримаємо рівність $-2\alpha(\alpha-1)(V(y+a) - V(y)) = 0$, звідки випливає, що V — періодична функція з періодом a.

Прирівнявши до нуля коефіцієнт при степені $(2x)^{\alpha-1}$ в розкладі рівняння (8), отримаємо
$-\alpha(\alpha-1)(V'(y+a) + V'(y)) - 3\alpha(V'(y+a) + V'(y)) = 0$,
$(-\alpha^2 - 2\alpha))(V'(y+a) + V'(y)) = 0$, звідки $\alpha = -2$. □

Враховуючи висновок леми 1, отримуємо, що $x = 0$ — теж полюс другого порядку для потенціала V, звідки, згідно з роботою [1], потенціал V може бути лише $\wp$-функцією Веєрштраса.

Наслідок 1.1. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (2) *допускає перший інтеграл четвертого порядку. Якщо мероморфний потенціал* $V(x)$ *задовільняє умову* $V(\infty) = 0$*, то такий потенціал не може мати ненульових полюсів.*

Теорема 1.1. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (2) *допускає поліноміальний перший інтеграл, і потенціал V має ненульовий полюс a. Тоді*
(i) $\exists s \in \mathbb{N}$ $V^{(s)}$ — періодична функція з періодом $2a$;
(ii) полюс a другого порядку.

Доведення. Можна вважати, що перший інтеграл має компоненти лише парного степеня

$$F = F_{2N} + F_{2N-2} + \cdots + F_0, \tag{9}$$

де F_{2k}, $k = \overline{0;N}$ — однорідні компоненти парного $2k$-го степеня за імпульсами, а старша компонента має вигляд

$$F_{2N} = \sum_{i=0}^{2N} E^{2N-i,i}(x,y)p_1^{2N-i}p_2^i. \tag{10}$$

Згідно з [1] для першого інтеграла $2N$-го порядку за імпульсами (9) існує однорідний оператор L такий, що теорема додавання має вигляд $L\xi = 0$, де $\xi = \xi(x,y)$ — ліва частина рівняння (3). Нехай L в змінних (x,y) має вигляд

$$L = a_s\partial_y^s\partial_x^{M-s} + \cdots + a_M\partial_y^M (s = \min\{i : a_i \neq 0\}, L = \sum_{i=0}^{M} a_i\partial_y^i\partial_x^{M-i}). \tag{11}$$

Подіявши оператором (11) на розклад рівняння (8), отримаємо розклад теореми додавання $L\xi = 0$, прирівнявши в якому коефіцієнт при найменшому степені $x^{\alpha-2-(M-s)}$ до нуля, одержимо рівність

$$2^{M-s+1}a_s(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-1-M+s)\alpha(1-\alpha)(V^{(s)}(y+a)-V^{(s)}(y)) = 0,$$

звідки випливає періодичність функції $V^{(s)}$. Прирівнявши наступний коефіцієнт при степені $x^{\alpha-2-(M-s)+1}$ до нуля, отримаємо
$2^{M-s}a_{s+1}(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-M+s)\alpha(1-\alpha)(V^{(s+1)}(y+a)-V^{(s+1)}(y)) -$
$- 2^{M-s}a_s(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-M+s)(\alpha^2+2\alpha)(V^{(s+1)}(y+a) +$
$+ V^{(s+1)}(y)) = 0.$
Перший доданок тотожньо рівний нулю завдяки періодичності $V^{(s)}$, з рівності нулю другого доданку випливає, що a — полюс другого порядку. $\square$

Використовуючи наслідок з теореми єдиності [1], одержимо

Наслідок 1.2. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (2) *допускає перший інтеграл* (9). *Якщо потенціал* $V(\infty) = 0$, *то потенціал* V *не може мати ненульових полюсів.*

2 Ненульовий полюс в задачі замкнутого ланцюжка взаємодіючих 4 частинок на прямій

Лема 2.1. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (5) *допускає перший інтеграл четвертого порядку. Тоді* $V(x)$ *не може мати ненульових полюсів.*

Доведення. Нехай точка a — полюс порядку $-\alpha$ ($\alpha < 0$). Тоді, провівши аналогічні міркування до поданих у доведенні леми 1.1, і прирівнявши до нуля коефіцієнт при найменшому степені $(2x)^{\alpha-2}$ в аналогічному розкладі, отримаємо $2\alpha(\alpha-1)V(y) = 0$, звідки безпосередньо отримуємо суперечність, яка доводить твердження леми. □

Теорема 2.1. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (5) *допускає перший інтеграл* (9). *Тоді* V *не може мати ненульових полюсів.*

Доведення. Згідно з [2] для першого інтеграла $2N$-го порядку за імпульсами (9) існує однорідний оператор L у вигляді (11) такий, що теорема додавання має вигляд $L\xi = 0$, де $\xi = \xi(x, y)$ — ліва частина рівняння (6). Подіявши оператором L на розклад рівняння (6), отримаємо розклад теореми додавання $L\xi = 0$, прирівнявши в якому коефіцієнт при найменшому степені $x^{\alpha-2-(M-s)}$ до нуля, одержимо $2^{M-s+1}a_s(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2-(M-s-1))\alpha(\alpha-1)V^{(s)}(y) = 0$. Отже, $V(y)$ — поліном. Отримана суперечність доводить твердження теореми. □

3 Ненульова істотно особлива точка в симетризованих задачах 4 частинок на прямій

3.1 Випадок попарної взаємодії

Розглянемо можливість існування ненульової істотно особливої точки для $V(x)$ у задачі попарної взаємодії 4 частинок на прямій.

Нехай a — істотно особлива точка ($a \neq 0$), тобто, розклад в ряд Лорана в околі точки a потенціала $V(z)$ має нескінченну кількість доданків у головній частині. Можна вважати, що

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{P} C_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n,$$

де

$$C_P \neq 0 \quad (P < 0). \tag{12}$$

Виконавши заміну $z = a + t$, отримаємо

$$V(z) = V(a+t) = \dots + C_P t^P + C_0 + C_1 t + \dots .$$

Розклавши рівняння (8) за степенями x в ряд Лорана, та позначивши

$$U_m = U_m(y,a) = V^{(m)}(y+a) - (-1)^m V^{(m)}(y), \tag{13}$$

отримаємо

$$-2 \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0;1\}} C_n n(n-1)(2x)^{n-2} \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{x^m}{m!} U_m - \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n (2x)^n \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{x^m}{m!} U_{m+2} -$$
$$- 3 \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} C_n n(2x)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{x^m}{m!} U_{m+1} + Q_4 = 0,$$

де Q_4 — завідомо правильно-регулярна частина.

Ввівши заміну $k = n-2$ в першій сумі, $k = n-1$ в третій, $k = n$ в другій, одержимо $Q_1 \sum\limits_{k=-\infty}^{P-2} C_{k+2}(k+2)(k+1)2^k x^k + Q_2 \sum\limits_{k=-\infty}^{P} C_k 2^k x^k +$
$+ Q_3 \sum\limits_{k=-\infty}^{P-1} C_{k+1}(k+1)2^k x^k + Q_4 = 0,$

де $Q_1 = -2 \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} U_m$; $Q_2 = -\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} U_{m+2}$; $Q_3 = -3 \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} U_{m+1}$.

Запровадивши новий індекс сумування $l = m+k$, отримаємо рівняння $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} g_l x^l = 0$, в якому головна частина матиме вигляд

$$\sum_{l=-\infty}^{-1} g_l x^l = 0, \tag{14}$$

де

$$g_l = \sum_{m=0}^{\infty} [p_{l;m} U_m + q_{l;m} U_{m+2} + r_{l;m} U_{m+1}], \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} p_{l;m} &= -\chi_{\{m\geq l-P+2\}}2^{l-m}\tfrac{2}{m!}C_{l-m+2}(l-m+2)(l-m+1), \\ q_{l;m} &= -\chi_{\{m\geq l-P\}}2^{l-m}\tfrac{1}{m!}C_{l-m}, \\ r_{l;m} &= -\chi_{\{m\geq l-P+1\}}2^{l-m}\tfrac{3}{m!}C_{l-m+1}(l-m+1), \end{aligned} \tag{16}$$

де χ_A — характеристична функція, що дорівнює 1 за умови A, і 0 — в іншому випадку.

Лема 3.1. *Якщо коефіцієнти ряду Лорана* (14) *мають вигляд* (15), (16)*, тоді також* $g_l = \sum\limits_{m=0}^{\infty} g_{l;m}U_m$*, де*
$g_{l;m} = -\chi_{\{l\leq m+P-2\}}\frac{C_{l-m+2}2^{l-m+1}}{m!}(l+1)(l+2+m)$.

Доведення базується на перетворенні

$$g_l = \sum_{m=0}^{\infty} p_{l;m}U_m + \ + \sum_{m=2}^{\infty} q_{l;m-2}U_m + \sum_{m=1}^{\infty} r_{l;m-1}U_m$$

та групуванні відповідних доданків.

Тоді, розклавши (14) за степенями x, та прирівнявши коефіцієнт g_{P-2} до нуля, отримаємо рівняння
$g_{P-2} = -C_P 2^{P-1}(P-1)PU_0 - \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{C_{P-m}2^{P-m-1}}{m!}(P-1)(P+m)U_m = 0$,
звідки, враховуючи (13), одержимо

$$V(y+a) - V(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{P-m}(P+m)2^{-m}(V^{(m)}(y+a) - (-1)^m V^{(m)}(y))}{C_P P m!}. \tag{17}$$

Нагадаємо, що, згідно з результатами роботи [1], потенціал може мати в нулі лише полюс другого порядку, тобто, $V(0) \sim \frac{1}{x^2}$.
Назвемо *характеристикою ряду Лорана* A *в околі точки* a найбільший від'ємний степінь ненульового члена головної частини розкладу A в околі істотно особливої точки a. Очевидно, характеристики лівої і правої частин такої рівності (17) повинні співпадати. Тому, спрямувавши y до нуля, одержимо $P = -2; C_P = 1$, іншими словами, якщо $V(0) \sim \frac{1}{x^2}$, то ряд Лорана $V(x)$ в проколотому околі точки a має характеристику -2 (ненульовий член головної частини з найбільшим від'ємним степенем має вигляд $\frac{1}{x^2}$).

Через $\mathcal{X}(A)$ позначимо ненульовий моном головної частини ряду Лорана A з найбільшим від'ємним степенем, тобто зі степенем характеристики. Назвемо *субхарактеристикою ряду Лорана* A характеристику ряду $A - \mathcal{X}(A)$.

Нехай розклад потенціала V в ряд Лорана в околі точки $x = a$ має субхарактеристику $-2 - M$, тоді

$$V(x) = \dots + \frac{C_{-2-M}}{(x-a)^{2+M}} + \frac{1}{(x-a)^2} + \{\textit{правильна частина}\}.$$

Зауважимо, що M — непарне, інакше характеристика лівої частини рівняння (17) дорівнюватиме $-2-M$, а правої буде меншою, ніж $-2-M$. Прирівнявши мономи степеня $-2-M$ лівої і правої частини рівняння (17), отримаємо

$$\frac{C_{-2-M}}{(x-a)^{2+M}} = \frac{C_{-2-M}(-2+M)2^{-M}}{C_P PM!} \left(\frac{1}{(x-a)^2}\right)^{(M)},$$

звідки, підставивши $p = -2$, отримаємо рівняння $1 = (M+1)(M-2)2^{-M-1}$, яке не має цілих коренів.

Отримана суперечність доводить неможливість існування істотно особливої точки в потенціала для задачі взаємодії чотирьох попарно взаємодіючих частинок на прямій.

Наслідок 3.1. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (2) *допускає перший інтеграл* (9). *Якщо потенціал задовільняє умову* $V(\infty) = 0$*, то* V *не може мати ненульової істотно особливої точки.*

Доведення. Згідно з теоремою 7 роботи [1] для першого інтеграла (9) існує однорідний диференціальний оператор L такий, що теорема додавання має вигляд $L\eta = 0$, де η — ліва частина теореми додавання (4), в якому покладено $u = x, v = y$.

Нехай (11) в змінних (x, y) має вигляд $L = \sum\limits_{k=a}^{b} l_k \partial_x^k \partial_y^{M-k}$, де $0 \le a < b \le M$; $l_a \ne 0$; $l_b \ne 0$; M — порядок оператора L. Провівши аналогічні міркування до проведених для першого інтеграла четвертого порядку, розкладаючи в ряд Лорана теорему додавання у формі (4), отримаємо головну частину у вигляді

$$\sum_{l=-\infty}^{-1} g_l x^l = \sum_{l=-\infty}^{P-2} \sum_{m=0}^{\infty} g_{l;m} U_m x^l + \sum_{l=P-1}^{-1} \sum_{m=l-P+2}^{\infty} g_{l;m} U_m x^l = 0, \qquad (18)$$

де $U_m = U_m(y,a) = V^{(m)}(y+a) - (-1)^m V^{(m)}(y-a)$, і

$$g_{l;m} = -\chi_{\{l\le m+P-2\}} \frac{C_{l-m+2}}{m!}(l+1)(l+2+m). \tag{19}$$

Подіявши оператором L на головну частину (18) розкладу теореми додавання $\eta = 0$ в ряд Лорана, отримаємо

$$\sum_{k=a}^{b} l_k \partial_x^k \partial_y^{M-k} \sum_{l=-\infty}^{P-2} \sum_{m=0}^{\infty} g_{l;m} U_m x^l + \sum_{k=a}^{b} l_k \partial_x^k \partial_y^{M-k} \sum_{l=P-1}^{-1} \sum_{m=l-P+2}^{\infty} g_{l;m} U_m x^l = 0,$$

звідки

$$\sum_{k=a}^{b} \sum_{l=-\infty}^{P-2} \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{l! l_k g_{l;m}}{(l-k)!} U_m^{(M-k)} x^{l-k} + \sum_{k=a}^{b} \sum_{l=P-1}^{-1} \sum_{m=l-P+2}^{\infty} \tfrac{l! l_k g_{l;m}}{(l-k)!} U_m^{(M-k)} x^{l-k} = 0.$$

Прирівнявши в даній сумі коефіцієнт при x^{P-2-b} до нуля, одержимо

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{(P-2-(b-k))! l_k}{(P-2-k)!} \sum_{m=0}^{\infty} g_{P-2-(b-k);m} U_m^{(M-k)} = 0. \tag{20}$$

Підставивши $y = \tilde{y} + 2a$ в останню рівність, розклавши (20) вдруге в ряд Лорана за степенями $\tilde{y}$, та прирівнявши коефіцієнт при $\tilde{y}^{P-M+b}$ до нуля, отримаємо $\frac{(P-2)!P! l_b(-P(P-1)c_P^2)}{(P-2-b)!(P-M+b)!} = 0$, що суперечить умові (12). Отже, ненульової істотно особливої точки не може бути. □

3.2 Випадок замкнутого ланцюжка

Розглянемо тепер питання існування ненульової істотно особливої точки в задачі замкнутого ланцюжка 4 частинок на прямій. Нехай a — істотно особлива точка ($a \neq 0$) потенціала V. Зазначимо, що згідно з твердженням 3 і наслідком 4 роботи [2] для першого інтеграла (9) існує деякий однорідний диференціальний оператор L такий, що теорема додавання для інтеграла $2N$ порядку має вигляд $L\eta = 0$, де $\eta = \eta(u,v)$ — ліва частина рівняння (7). Також, згідно з лемою 2.1, потенціал V не може мати ненульових полюсів. Зауважимо, що рівняння (7) порівняно з (4) відрізняється на групу доданків

$$\begin{aligned} \delta(u,v) = 2V(v)(V''(u+v) - V''(v-u)) + (V(u+v) - \\ -V(v-u))V''(v) - 3V'(v-u)V'(v) + 3V'(u+v)V'(v), \end{aligned} \tag{21}$$

Оскільки доданок $\delta(u,v)$ є регулярною функцією відносно розкладу за степенями u, то він не впливає на аналіз розкладу головної частини рівняння $L\eta = 0$, тому результати попереднього випадку повністю застосовні для даного випадку, зокрема виконується

Наслідок 3.2. *Нехай система з гамільтоніаном* (1), (5) *допускає перший інтеграл* (9). *Якщо виконується умова* $V(\infty) = 0$, *то потенціал* V *не може мати ненульової істотно особливої точки.*

4 Звуження множини інтегровних потенціалів

Враховуючи аналітичний характер потенціала V і першого інтеграла (9) (коефіцієнти F аналітичні за координатами), задача (2), (3) має природнє розширення фазового простору з $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{C}^4$. Відповідно (3) трактуємо як диференціальне рівняння в $\mathbb{C}^2$, розв'язком якого є функція $V = V(x)$, аналітична в $\mathbb{C}$.

Якщо потенціал V має ненульовий полюс, то V періодична, згідно з теоремою 1.1 (результати якої можна розширити на комплексну область). Тому $\{an, n \in \mathbb{Z}\}$ — полюси 2-го порядку. Заміною конфігураційних змінних $\tilde{x} = \frac{x\pi}{a}$, $\tilde{y} = \frac{y\pi}{a}$ і відповідно $\tilde{p}_1 = \frac{a}{\pi}p_1$, $\tilde{p}_2 = \frac{a}{\pi}p_2$ ці полюси будуть розташовані на уявній осі.

Якщо це єдині полюси V, то, внаслідок теореми 1.1, $V = \operatorname{sh}^{-2}\tilde{x} + C(\tilde{x})$, $C(\tilde{x})$ ціла πi–періодична. $C(\tilde{x}) = \sum C_k exp(k\tilde{x}), C_k = C_{-k}$. Якщо ж потенціал V крім полюсів $\{an, n \in \mathbb{Z}\}$ має ще хоча б один полюс, що не лежить на одній прямій з ними, то із двоякоперіодичності V, враховуючи, що усі полюси є 2 порядку, одержимо $V = \wp + C$, де $\wp(x; a, b)$ — відповідна $\wp$–функція Веєрштраса, що має ті ж полюси, що і V, $C(\tilde{x})$ — ціла двоякоперіодична функція, тотожно рівна константі згідно з теоремою Ліувілля [3]. Як відомо, $V(x)$ у вигляді $\wp$–функції Веєрштраса інтегровний і має додатковий перший інтеграл 3 порядку.

Таким чином, нетривіальні інтегровні потенціали можуть існувати лише в двох класах: $V = \frac{1}{\sin^2\tilde{x}} + S(\tilde{x})$, $S(\tilde{x})$ — ціла, π–періодична і $V = \frac{1}{x^2} + C(x)$, $C(x)$ — ціла в $\mathbb{C}$.

5 Висновки

Потенціали взаємодії симетризованих систем взаємодіючих частинок з гамільтоніанами (1), (2) та (1), (5) із додатковим поліноміальним інтегралом за імпульсами за додаткової умови $V(\infty) = 0$ не можуть мати ненульових особливих точок.

[1] *Довгань Б., Вус А.* Інтегровні потенціали симетричних задач 4 та 5 попарно взаємодіючих частинок на прямій // Вісник ЛНУ. — 2010. — **72**. — С. 107–126.

[2] *Довгань Б., Вус А.* Неінтегровність симетричної задачі взаємодії найближчих сусідів замкнутого ланцюжка 4 частинок на прямій // Вісник ЛНУ. — 2012 (прийнято до друку).

[3] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1976. — 299 с.

SINGULARITIES OF SYMMETRIC PROBLEMS OF 4 PAIRWISE INTERACTING PARTICLES ON LINE AND CLOSEST NEIGHBORS INTERACTION OF CLOSED CHAIN OF 4 PARTICLES ON LINE

Bohdan DOVHAN', Andrij VUS

Lviv Ivan Franko National University,
1 Universytets'ka Str., Lviv 79602, Ukraine

e-mail: *bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net*

The singularities of integrable potential functions of symmetric problem of four pairwise interacting particles on the line and symmetric problem of closed chain of four particles on the line with closest neighbourhood interaction are investigated.