Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2016. — Т.13

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2016. — V.13

НОВІ КРИТЕРІЇ ОБМЕЖЕНОСТІ L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Андрій Бандура

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, кафедра вищої математики, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська 15

А. Бандура. *Нові критерії обмеженості* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2016. — Т.13. — С. 58–67.

Отримано аналоги деяких критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $n \geq 2$, у випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$, що раніше доведені М.Т. Бордуляк та М.М. Шереметою для $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(|z_1|), \dots, l_n(|z_n|)\big)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$. Також встановлено нові критерії обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, що описують локальне поводження у полікрузі частинних похідних цілої функції.

A. Bandura, *New criteria of boundedness of* $\mathbf{L}$*-index in joint variables for entire functions*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016) 58–67.

In the paper we obtain analogues of some criteria of $\mathbf{L}$-index boundedness in joint variables for an entire function $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ and a function $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$. Formerly such theorems were proved by M.T. Bordulyak and M.M. Sheremeta for the case $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(|z_1|), \dots, l_n(|z_n|)\big)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. We also present new criteria of $\mathbf{L}$-index boundedness in joint variables, which describe the local behaviour of partial derivatives of an entire function in a polydisc.

Вступ

Нехай $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(z), \dots, l_n(z)\big)$, $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+ := (0, +\infty)^n$ – деяка фіксована функція. Цілу функцію $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називаємо ([5, 6], див. також [2, 3]) *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* якщо існує таке число $m \in \mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$, що для всіх $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ та всіх $J = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} :\ K \in \mathbb{Z}^n_+,\ \|K\| \leq m\right\}, \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D60, 32A10, 32A40 *УДК:* 517.555

Ключові слова та фрази: ціла функція від декількох змінних, полікруг, обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, максимум модуля, частинна похідна

E-mail: andriykopanytsia@gmail.com

де

$$F^{(K)}(z) := \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} := \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}, \quad K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

а $\|K\| = k_1 + \ldots + k_n$, $K! = k_1! \cdots k_n!$, $\mathbf{L}^J = l_1^{j_1} \cdots l_n^{j_n}$.

М.Т. Бордуляк та М.М. Шеремета [2, 3] досліджували цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних тільки для вектор-функцій $\mathbf{L}$, у яких кожна компонента залежить лише від модуля однієї змінної, а саме $\mathbf{L}(z) = L_0(z) := \big(l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|)\big)$ і тому $\mathbf{L}(z)$ є тотожно сталою на кістяку кожного полікруга з центром у початку координат. Крім цього відзначимо, що, наприклад, ціла функція $F(z) = \exp\{z_1 \cdots z_n\}$ не є цілою функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для жодної функції $\mathbf{L} = L_0$, вказаного щойно вигляду. Хоча є функцією обмеженого індексу за кожною своєю змінною при фіксованих інших, як функція від однієї змінної, а також є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для деякої функції $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ ([5], $n = 2$).

Якщо $l_j(z_j) \equiv 1$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то ціла функція називається *функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних* [8, 9, 15]. При $n = 1$ та $\mathbf{L} = l$ дістаємо означення цілої функції обмеженого l-індексу [4], а коли $n = 1$ та $\mathbf{L} = 1$ — цілої функції обмеженого індексу [12]. Також варто зауважити, що для $\mathbf{L}(z) \equiv \big(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\big)$ та $\Omega = \mathbb{C}^n$ наше означення збігається з означенням з [11] аналітичної в області $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ функції обмеженого індексу для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

У статті [5] узагальнено деякі відомі критерії обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, а також встановлено умови на логарифмічні частинні похідні за усіма змінними та розподіл нулів цілої функції, які забезпечують обмеженість $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Відповідне твердження є досить зручним для досліджень нескінченних добутків та цілих розв'язків рівнянь з частинними похідними або їхніх систем.

Дана стаття є продовженням досліджень властивостей цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, розпочатих у статті [5]. Поряд з розширенням кола аналогів критеріїв обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, нами отримані нові твердження, які містяться у теоремах 4 та 9 і є новими навіть у випадку $\mathbf{L} \equiv (1, \ldots, 1)$ (див. [8, 9, 11, 13, 14, 15]). Натомість теореми 6, 7, 8 є узагальненнями тверджень, отриманих в [3] для випадку $\mathbf{L}(z) = L_0(z) = \big(l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|)\big)$.

1. Основні поняття та позначення

Нам знадобляться деякі стандартні позначення. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Позначимо $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{2} = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Для $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ та $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ покладемо $\|R\| = r_1 + \cdots + r_n$, $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$. Також для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі позначення

$AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots a_n^{b_n}$, однак не порушуючи при цьому умов існування вказаних виразів. Запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ $(j = 1, \dots, n)$; подібно визначається відношення $A \leq B$.

Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| < r_j, \ j = 1, \dots, n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, а його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| = r_j, \ j = 1, \dots, n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| \leq r_j, \ j = 1, \dots, n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(z), \dots, l_n(z)\big)$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Найменше ціле число m, для якого виконується нерівність (1), називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$.

Для $R \in \mathbb{R}_+^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ та $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(z), \dots, l_n(z)\big)$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \inf \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in D^n\big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\big] \right\},$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \sup \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(z^0)} : z \in D^n\big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\big] \right\},$$

$$\Lambda_1(R) = \big(\lambda_{1,j}(R), \dots, \lambda_{1,n}(R)\big), \quad \Lambda_2(R) = \big(\lambda_{2,1}(R), \dots, \lambda_{2,n}(R)\big).$$

Через Q^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, які для кожного $R \in \mathbb{R}_+^n$ та $j \in \{1, \dots, n\}$ задовольняють $0 < \lambda_{1,j}(R) \leq \lambda_{2,j}(R) < +\infty$.

Крім того, для цілої функції $F(z)$ покладемо $M(R, z^0, F) = \max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)\}$. У подальших міркуваннях нам потрібні такі теореми з [5, 6].

Теорема 1 ([5, 6])**.** *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Для того, щоби ціла функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно і досить, щоби для кожного* $R \in \mathbb{R}_+^n$ *існували числа* $n_0 = n_0(R) \in \mathbb{Z}_+$ *та* $p_0 = p_0(R) \geq 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та деякого* $K^0 = K^0(z^0) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq n_0$,

$$\max \left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \leq n_0, z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\big] \right\} \leq p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \tag{2}$$

Теорема 2 ([5, 6])**.** *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *є обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують числа* R', R'', $\mathbf{0} < R' < \mathbf{e} < R''$, *та* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *виконується нерівність*

$$M\big(R''/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\big) \leq p_1 \cdot M\big(R'/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\big). \tag{3}$$

2. Локальне поводження частинних похідних цілої функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

У [5, 6] доведено наступну теорему, яке є узагальненням відповідного твердження, отриманого у [3].

Теорема 3 ([5, 6])**.** *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$ *і ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних з* $N(F, \mathbf{L}) = N < \infty$. *Тоді для кожного* $R \in \mathbb{R}_+^n$ *існує таке*

$p = p(R) \geq 1$, що для усіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \leq N$, виконується нерівність

$$\max\Big\{|F^{(K^0)}(z)|\colon z \in D^n\big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\big]\Big\} \leq p \cdot |F^{(K^0)}(z^0)|. \tag{4}$$

Достатність умови (4) не було встановлено ні в [3] для $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|)\big)$, ні в [5, 6] для $\mathbf{L}(z) = \big(l_1(z), \ldots, l_n(z)\big)$, $z \in \mathbb{C}^n$. Водночас наразі не відомо прикладу, який би показував, що цієї умови не досить для обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Натомість нам вдалося довести твердження з умовами, подібними до (4), що накладаються на частинні похідні по кожній змінній та є достатніми для обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Теорема 4. *Нехай $\mathbf{L} \in Q^n$. Якщо $\forall R > \mathbf{0}$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ $\exists p \geq 1$ $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $\exists K_j^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{k_j^0}_{j\text{-те місце}}, 0, \ldots, 0)$ таке, що $k_j^0 \leq n_0$ та*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}\colon \max\big\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\big]\big\} \leq p \cdot |F^{(K_j^0)}(z^0)|, \tag{5}$$

то ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Доведення. Для довільних $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $K_j^0 \in \mathbb{Z}_+^n$ і $S \in \mathbb{Z}_+^n$ запишемо інтегральну формулу Коші у такому вигляді

$$\frac{F^{(K_j^0+S)}(z^0)}{S!} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \frac{F^{(K_j^0)}(z)}{(z-z^0)^{S+\mathbf{e}}} dz.$$

Звідси, використовуючи (5), для $k_j^0 \leq n_0$ виводимо

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{S!} \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \frac{|F^{(K_j^0)}(z)|}{|z-z^0|^{S+\mathbf{e}}} |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))} \max\big\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))\big\} \frac{\mathbf{L}^{S+\mathbf{e}}(z^0)}{R^{S+\mathbf{e}}} |dz| =$$

$$= \max\big\{|F^{(K_j^0)}(z)| : z \in \mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))\big\} \frac{\mathbf{L}^S(z^0)}{R^S} \leq \frac{p\mathbf{L}^S(z^0)}{R^S} |F^{(K_j^0)}(z^0)|. \tag{6}$$

Візьмемо $R > \mathbf{e}$. Позначимо $\hat{r} = \min\big\{r_j : j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$. Виберемо S таке, що $\|S\| \geq s_0$, де $\frac{p}{\hat{r}^{s_0}} \leq 1$. Тоді з (6) випливає, що для всіх $j \in \{1, \ldots, n\}$ та $k_j^0 \leq n_0$

$$\frac{|F^{(K_j^0+S)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0+S}(z^0)(K_j^0+S)!} \leq \frac{p}{R^S} \frac{S!K_j^0!}{(K_j^0+S)!} \frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!} \leq \frac{|F^{(K_j^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K_j^0}(z^0)K_j^0!}.$$

Отже, $N(F, \mathbf{L}) \leq n_0 + s_0$. □

Зауваження 5. Зазначимо, що умова (5) гарантує обмеженість l_j-індексу за напрямком $\mathbf{e}_j$ (див. означення та властивості для цілих функцій у [1, 6, 7]). Насправді ми неявно довели твердження Теореми 6 з [5, 6].

Позначимо $\widetilde{\mathbf{L}}(z) = (\widetilde{l}_1(z), \dots, \widetilde{l}_n(z))$. Запис $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ означає, що існують $\Theta_1 = (\theta_{1,j}, \dots, \theta_{1,n}) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta_2 = (\theta_{2,j}, \dots, \theta_{2,n}) \in \mathbb{R}^n_+$ такі, що $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\theta_{1,j}\widetilde{l}_j(z) \le l_j(z) \le \theta_{2,j}\widetilde{l}_j(z)$.

Теорема 6. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$ *та* $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$. *Ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\widetilde{\mathbf{L}}$-*індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли вона має обмежений* $\mathbf{L}$-*індекс за сукупністю змінних.*

Доведення. Легко довести, що з $\mathbf{L} \in Q^n$ та $\mathbf{L} \asymp \widetilde{\mathbf{L}}$ випливає включення $\widetilde{\mathbf{L}} \in Q^n$.

Нехай $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}) < +\infty$. Тоді за теоремою 1, для кожного $\widetilde{R} > \mathbf{0}$ знайдуться $\widetilde{p} \ge 1$ та $\widetilde{n}_0 \in \mathbb{Z}_+$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та деякого K^0, $\|K^0\| \le \widetilde{n}_0$, нерівність (2) виконується з $\widetilde{\mathbf{L}}$ та $\widetilde{R}$ замість $\mathbf{L}$ and R. Звідси

$$\frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{\Theta_2^{K^0}|F^{(K^0)}(z^0)|}{\Theta_2^{K^0}\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} \ge \frac{\widetilde{p}}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\Theta_2^{K^0}\widetilde{\mathbf{L}}^{K^0}(z^0)} \ge$$
$$\ge \frac{1}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{L}^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\big]\right\} \ge$$
$$\ge \frac{1}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{\Theta_1^K|F^{(K)}(z)|}{K!L^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\big]\right\} \ge$$
$$\ge \frac{\min\limits_{0\le\|K\|\le\widetilde{n}_0}\{\Theta_1^K\}}{\Theta_2^{K^0}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!L^K(z)} : \|K\| \le \widetilde{n}_0, z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, \widetilde{R}/\widetilde{\mathbf{L}}(z)\big]\right\}.$$

З огляду на теорему 1 робимо висновок, що функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Теорема 7. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений* $\mathbf{L}$-*індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $R > \mathbf{0}$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{D}^2(z^0, R)$ *та деякого* $K^0 \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K^0\| \le n_0$ *виконується* (2).

Доведення. Необхідність випливає з необхідності у теоремі 1. Займемося доведенням достатності. З доведення достатності у теоремі 1 (див. теорема 3 у [5]) при $R = (2, \dots, 2)$ (а, отже, й для $R > (2, \dots, 2)$) випливає, що $N(F, \mathbf{L}) < +\infty$. Нехай $\mathbf{L}^* = \frac{R^0}{R}\mathbf{L}(z)$, $R^0 = (2, \dots, 2)$. У загальному випадку з виконання (2) для F та $\mathbf{L}$ з $R < (2, \dots, 2)$ маємо

$$\min_{\|K\|\le n_0}\Big(\frac{R^0}{R}\Big)^K \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!(\mathbf{L}^*(z))^K} : \|K\| \le n_0,\ \ z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, R_0/\mathbf{L}^*(z^0)\big]\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le n_0, z \in \mathbb{D}^n\big[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\big]\right\} \le$$
$$\le \frac{p_0}{K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} = \frac{2^{\|K^0\|}p_0}{R^{K^0}K^0!}\frac{|F^{(K^0)}(z)|}{(\mathbf{L}^*(z^0))^{K^0}} < \frac{p_0|F^{(K^0)}(z)|}{K^0!(\mathbf{L}^*(z^0))^{K^0}}\max_{\|K\|\le n_0}\frac{2^{n_0}}{R^K}.$$

Тобто (2) виконується для F, $\mathbf{L}^*$ та $R < R^0$. За теоремою 1, функція $F(z)$ є обмеженого $\mathbf{L}^*$-індексу за сукупністю змінних. Тому за теоремою 6, функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

3. Аналог теореми Хеймана для цілих функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних

Теорема 8. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують числа* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *справджується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : \|J\| = p+1\right\} \le c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le p\right\}. \tag{7}$$

Доведення. Необхідність випливає з означення обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілої функції при $p = N(f, \mathbf{L})$ та $c = \big((N+1)!\big)^n$.

Доведемо достатність. Для $F \equiv 0$ твердження теореми очевидне, тому вважаємо надалі, що $F \not\equiv 0$. Нехай (7) виконується, $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{D}^n[z^0, \frac{2}{\mathbf{L}(z^0)}]$. Для всіх $J \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|J\| \le p+1$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z^0)} &\le \Lambda_2^J(\mathbf{2})\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} \le c\cdot\Lambda_2^J(\mathbf{2})\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \|K\| \le p\right\} \le \\ &\le c\cdot\Lambda_2^J(\mathbf{2})\max\left\{\Lambda_1^{-K}(\mathbf{2})\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le p\right\} \le B\cdot G(z), \end{aligned} \tag{8}$$

де $B = c\cdot\max\{\Lambda_2^K(\mathbf{2}) : \|K\| = p+1\}\cdot\max\{\Lambda_1^{-K}(\mathbf{2}) : \|K\| \le p\}$, та $G(z) = \max\big\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z^0)} : \|K\| \le p\big\}$. Виберемо точки $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, ..., z_n^{(1)}) \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathrm{e}}{2\mathbf{L}(z^0)})$ та $z^{(2)} = (z_1^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}) \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{2}{\mathbf{L}(z^0)})$ так, щоб $F(z^{(1)}) \ne 0$ та $|F(z^{(2)})| = M\big(\frac{2}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, f\big) \ne 0$. Такі точки можна вибрати, бо у протилежному випадку рівність нулю функції на кістяку полікруга $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathrm{e}}{2\mathbf{L}(z^0)})$ чи $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{2}{\mathbf{L}(z^0)})$ за теоремою єдиності означає рівність нулю цієї ж функції у всіх точках з $\mathbb{C}^n$. Побудуємо площину

$$\alpha = \begin{cases} z_2 = k_2 z_1 + c_2, \\ z_3 = k_3 z_1 + c_3, \\ \quad\dots \\ z_n = k_n z_1 + c_n, \end{cases}$$

де $k_i = \frac{z_i^{(2)} - z_i^{(1)}}{z_1^{(2)} - z_1^{(1)}}$, $c_i = \frac{z_i^{(1)} z_1^{(2)} - z_i^{(2)} z_1^{(1)}}{z_1^{(2)} - z_1^{(1)}}$, $i = 2, \dots, n$. Елементарно перевіряємо, що точки $z^{(1)} \in \alpha$ та $z^{(2)} \in \alpha$.

Нехай $\tilde{G}(z_1) = G(z)\big|_\alpha$ — звуження функції G на площину α. Позаяк для кожного $K \in \mathbb{Z}^n_+$ функція $F^{(K)}(z)\big|_\alpha$ є цілою функцією та $\tilde{G}(z_1^{(1)}) = G(z^{(1)})\big|_\alpha \ne 0$ через вибір точки $z^{(1)}$, то всі нулі функції $F^{(K)}(z)\big|_\alpha$ як функції однієї змінної z_1

ізольовані. Тому ізольованими є всі нулі функції $\tilde{G}(z_1)$. Отже, на площині α можна вибрати кусково-аналітичну криву γ, задану так:

$$z = z(t) = (z_1(t), k_2 z_1(t) + c_2, \dots, k_n z_1(t) + c_n),\ t \in [0,1],$$

яка з'єднує точки $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ та на якій $G(z(t)) \neq 0$ і $\int_0^1 |z_1'(t)|dt \leq \frac{4}{l_1(z_1^0)}$. Для побудови такої кривої через $z_1^{(1)}$ та $z_1^{(2)}$ проведемо пряму $z_1^*(t) = (z_1^{(2)} - z_1^{(1)})t + z_1^{(1)}$, $t \in [0,1]$. Вона може пройти через точки z_1, в яких $\tilde{G}(z_1) = 0$. Їхнє число $m = m(z_1^{(1)}, z_1^{(2)})$ буде скінченним. Нехай $(z_{1,k}^*)$ — послідовність цих точок, упорядкована за зростанням значення $|z_1^{(1)} - z_{1,k}^*|$, $k \in \{1,2,\dots,m\}$. Виберемо досить мале $r < \min\limits_{1\leq k\leq m-1} \{|z_{1,k}^* - z_{1,k+1}^*|, |z_{1,1}^* - z_1^{(1)}|, |z_{1,m}^* - z_1^{(2)}|, \frac{3}{2\pi l_1(z^0)}\}$. Навколо кожної точки $z_{1,k}^*$ будуємо коло радіуса $r_k' < \frac{r}{2^k}$ так, що $\tilde{G}(z_1) \neq 0$ для всіх точок z_1 кола. Це здійсненно, бо $F \not\equiv 0$. Кожне таке коло прямою $z_1^*(t)$ розбивається на два півкола. Шукана кусково-аналітична крива $z_1(t)$ складається з дуг побудованих півкіл та відрізків прямої $z_1^*(t)$, які послідовно з'єднують їх між собою чи з точками $z_1^{(1)}$, $z_1^{(2)}$. Довжина кривої $z_1(t)$ у $\mathbb{C}$ (а не $z(t)$ у $\mathbb{C}^n$!) менша за $\frac{2}{l_1(z^0)} + \frac{1}{2l_1(z^0)} + \pi r < \frac{4}{l_1(z_1^0)}$. Тоді,

$$\int_0^1 |z_s'(t)|dt = |k_s| \int_0^1 |z_1'(t)|dt \leq \frac{|z_s^{(2)} - z_s^{(1)}|}{|z_1^{(2)} - z_1^{(1)}|} \frac{4}{l_1(z^0)} \leq$$
$$\leq \frac{2.5}{l_s(z^0)} \frac{l_1(z^0)}{1.5} \frac{4}{l_1(z^0)} \leq \frac{8}{l_s(z^0)},\ s \in \{2,\dots,n\}.$$

Домножимо останню нерівність на $l_s(z^0)$ та підсумуємо по s

$$\int_0^1 \sum_{s=1}^n l_s(z^0)|z_s'(t)|dt \leq 8n. \tag{9}$$

Оскільки функція $z = z(t)$ кусково-аналітична на $[0,1]$, то на кожному її інтервалі аналітичності для будь-яких $K \in \mathbb{Z}_+^n$, $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K\| \leq p$, $\|J\| \leq p$, $K \neq J$, або

$$\frac{|F^{(K)}(z(t))|}{\mathbf{L}^K(z^0)} \equiv \frac{|F(J)(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}, \tag{10}$$

або рівність

$$\frac{|F^{(K)}(z(t))|}{\mathbf{L}^K(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \tag{11}$$

виконується лише для скінченної множини точок $t = t_k \in [0,1]$.

Тоді для функції $G(z(t))$ як максимуму таких виразів $\frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ по всіх $\|J\| \leq p$ можливі два випадки:

1. $G(z(t))$ на деякому проміжку аналітичності кривої γ тотожно дорівнює одночасно декільком частинним похідним, тобто, справджується (10) і, відповідно, $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ для деякого J, $\|J\| \le p$. Зрозуміло, що $F^{(J)}(z(t))$ – аналітична функція, а $|F^{(J)}(z(t))|$ – неперервно диференційовна на згаданому проміжку аналітичності за винятком точок, у яких $F^{(J)}(z(t)) = 0$. Проте таких точок нема, бо у протилежному випадку й $G(z(t)) = 0$, а це суперечить вибору кривої γ.
2. $G(z(t))$ на деякому проміжку аналітичності кривої у скінченному числі точок одночасно дорівнює декільком частинним похідним, тобто, справджується (11). У цьому випадку вказані точки t_k розіб'ють інтервал аналітичності на скінченне число відрізків, на кожному з яких $G(z(t))$ дорівнює одній з похідних, тобто, $G(z(t)) \equiv \frac{|F^{(J)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)}$ для деякого J, $\|J\| \le p$. Також на кожному з таких проміжків на основі тих самих міркувань, що й у попередньому випадку, $|F^{(J)}(z(t))|$, а, отже, і $G(z(t))$ неперервно диференційовна функція за винятком точок t_k.

Беручи до уваги (8) та нерівність $\frac{d}{dt}|f(t)| \le |\frac{df(t)}{dt}|$, ми маємо

$$\frac{d}{dt}G(z(t)) \le \max\Big\{\frac{1}{\mathbf{L}^J(z^0)}\Big|\frac{d}{dt}F^{(J)}(z(t))\Big| :\ \|J\| \le p\Big\} \le$$

$$\le \max\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{\partial^{\|J\|+1}F}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s+1}\dots\partial z_n^{j_n}}(z(t))\Big|\frac{|z_s'(t)|}{\mathbf{L}^j(z^0)} :\ \|J\| \le p\Big\} \le$$

$$\le \max_{\|J\|\le p}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{\partial^{\|J\|+1}F}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s+1}\dots\partial z_n^{j_n}}(z(t))\Big|\frac{l_s(z^0)|z_s'(t)|}{l_1^{j_1}(z^0)\dots l_s^{j_1+1}(z^0)\dots l_n^{j_n}(z^0)} \le$$

$$\le \Big(\sum_{i=1}^{n}l_s(z^0)|z_s'(t)|\Big)\cdot\max_{\|J\|\le p+1}\frac{|F^{(j)}(z(t))|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \le \Big(\sum_{i=1}^{n}l_s(z^0)|z_s'(t)|\Big)\cdot B\cdot G(z(t)).$$

Враховуючи (9), одержуємо

$$\Big|\ln\frac{G(z^{(2)})}{G(z^{(1)})}\Big| = \Big|\int_0^1\frac{1}{G(z(t))}\frac{d}{dt}G(z(t))dt\Big| \le B\int_0^1\sum_{s=1}^{n}l_s(z^0)|z_s'(t)|dt \le 8nB.$$

З огляду на вибір точки $z^{(2)}$ маємо $M(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F) \le G(z^{(2)}) \le G(z^{(1)})e^{8nB}$. Але $z^{(1)} \in \mathbb{T}^n(z^0, \frac{\mathbf{e}}{2\mathbf{L}(z^0)})$, тому для всіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$ справджується нерівність Коші

$$\frac{|F^{(J)}(z^{(1)})|}{\mathbf{L}^J(z^0)} \le J!(\mathbf{2})^J M\Big(\frac{\mathbf{e}}{2\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\Big).$$

Тому при $\|J\| \le p$ отримуємо $G(z^{(1)}) \le (p!2^p)^n M\big(\frac{\mathbf{e}}{2\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\big)$,

$$M\Big(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\Big) \le \big(p!2^p e^{8nB}\big)^n M\Big(\frac{\mathbf{e}}{2\mathbf{L}(z^0)}, z^0, F\Big)$$

і за теоремою 2, функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Наступна теорема є новою навіть для цілих функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних, хоча при $n = 1$ цей результат відомий (див. [16], або [10] для випадку $l \equiv 1$).

Теорема 9. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують* $c \in (0; +\infty)$ *та* $N \in \mathbb{N}$ *такі, що для кожного* $z \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{\|K\|=0}^{N} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \geq c \sum_{\|K\|=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $0 < \theta_j < 1$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Якщо F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, то за теоремою 6, функція F має обмежений $\widetilde{\mathbf{L}}$-індекс за сукупністю змінних $N(F, \widetilde{\mathbf{L}}) = \widetilde{N} < +\infty$, де $\widetilde{\mathbf{L}} = \big(\widetilde{l_1}(z), \dots, \widetilde{l_2}(z)\big)$, $\widetilde{l_j}(z) = \theta_j l_j(z)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Тому

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} = \max\left\{\frac{\Theta^K|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \geq$$
$$\geq \prod_{i=s}^{n} \theta_s^{\widetilde{N}} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\widetilde{\mathbf{L}}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \geq \prod_{i=1}^{n} \theta_s^{\widetilde{N}} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\widetilde{L}^J(z)} = \prod_{i=1}^{n} \theta_s^{\widetilde{N}-j_s} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}$$

для всіх $J \geq \mathbf{0}$ та

$$\sum_{\|J\|=\widetilde{N}+1}^{\infty} \frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^j(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \sum_{\|J\|=\widetilde{N}+1}^{\infty} \theta_s^{j_s-\widetilde{N}} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq \widetilde{N}\right\} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s} \sum_{\|K\|=0}^{\widetilde{N}} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}.$$

Звідси, ми отримуємо (12) з $N = \widetilde{N}$ та $c = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_s}{1-\theta_s}$. Навпаки, з нерівності (12) випливає

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\colon \|J\| = N+1\right\} \leq \sum_{\|K\|=N+1}^{\infty} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \leq \frac{1}{c} \sum_{\|K\|=0}^{N} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \leq$$
$$\leq \frac{1}{c} \sum_{i=0}^{N} C_{n+i-1}^{i} \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \leq N\right\}$$

і за теоремою 8 функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. □

Автор висловлює щиру подяку Рецензенту за його цінні зауваження, які сприяли покращенню змісту статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. А.І. Бандура, О. Б. Скасків, *Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком,* Мат. Студії. **27**:1 (2007) 30–52.
2. М.Т. Бордуляк, *Простір цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу,* Мат. Студії. **4** (1995) 53–58.
3. М.Т. Бордуляк, М. М. Шеремета, *Обмеженість $\mathbf{L}$-індексу цілої функції декількох змінних,* Доп. АН України. **9** (1993) 10–13.
4. А.Д. Кузык, М.Н. Шеремета, *Целые функции ограниченного l-распределения значений,* Мат. заметки. **39**:1 (1986) 3–13; Engl. transl. in Math. Notes. **39**:1 (1986) 3–8.
5. A.I. Bandura, M.T. Bordulyak, O.B. Skaskiv, *Sufficient conditions of boundedness of L-index in joint variables,* Mat. Stud. **45**:1 (2016) 12–26.
6. A. Bandura, O. Skaskiv, *Entire functions of several variables of bounded index*, Lviv, Publisher I.E. Chyzhykov (2016), 128 p.
7. A.I. Bandura, O.B. Skaskiv, *Open problems for entire functions of bounded index in direction*, Mat. Stud. **43**:1 (2015) 103–109.
8. B.C. Chakraborty, R. Chanda, *A class of entire functions of bounded index in several variables,* J. Pure Math. **12** (1995) 16–21.
9. B.C. Chakraborty, T.K. Samanta, *On entire functions of bounded index in several variables,* J. Pure Math. **17** (2000) 53–71.
10. G.H. Fricke, *Entire functions of locally slow growth,* J. Anal. Math. **28**:1 (1975) 101–122.
11. J.K. Gopala, S.M. Shah, *Functions of bounded indices in one and several complex variables,* In: Mathematical essays dedicated to A.J. Macintyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio (1970) 223–235.
12. B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index,* Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.: Providence, Rhode Island, **2** (1968) 298–307.
13. F. Nuray, R.F. Patterson, *Entire bivariate functions of exponential type,* Bull. Math. Sci. **5**:2 (2015) 171–177.
14. F. Nuray, R.F. Patterson, *Multivalence of bivariate functions of bounded index,* Le Matematiche. **70**:2 (2015) 225–233.
15. M. Salmassi, *Functions of bounded indices in several variables,* Indian J. Math. **31**:3, (1989) 249–257.
16. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index,* Lviv, VNTL Publishers (1999), 141 p.

Надійшло 1.04.2016

Після переробки 20.12.2016