# ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТЕНЗОРНИХ ДОБУТКІВ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ЗАМКНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

©*2012 р. Мар'ян ДМИТРИШИН*

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *m_dmytryshyn@hotmail.com*

Редакція отримала статтю 27 червня 2011 р.

Визначено інтерполяційні простори тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами та доведено інтерполяційні теореми.

## 1 Вступ

Однією з найбільш важливих областей застосування методів дійсної інтерполяції є теорія апроксимації в банахових просторах [1]. Використовуючи такі методи можна отримати класичні теореми Джексона і Бернштейна про найкраще наближення функцій із $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ цілими функціями експоненціального типу. Теорія інтерполяції використовується також при апроксимації обмежених лінійних операторів операторами скінченного рангу, апроксимації диференціальних операторів різницевими, апроксимації сплайн-функціями.

В роботах [2, 3] до проблеми наближення елементів банахового простору застосовано техніку векторів експоненціального типу замкнених

УДК: 517.98; MSC 2010: 41A65, 47A57, 47A58, 46E35

*Ключові слова і фрази:* інтерполяційні простори, вектори експоненціального типу, замкнені оператори, тензорні добутки

операторів, введених в [4]. У праці [5], користуючись поняттям векторів експоненціального типу замкнених лінійних операторів заданих в деякому банаховому просторі, введено і досліджено поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова, асоційованого з довільним замкненим оператором. У випадку оператора диференціювання, заданого в просторі $L_p(\mathbb{R})$, такі абстрактні простори Бєсова точно співпадають з класичними. Там же наведено застосування абстрактного простору Бєсова до проблеми найкращих апроксимацій елементів банахового простору векторами експоненціального типу асоційованих з довільними замкненими операторами.

Метою даної статті є поширення деяких методів дійсної інтерполяції на випадок проективних тензорних добутків банахових просторів. Зокрема, визначено інтерполяційні простори тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів над банаховими просторами, а також досліджено інтерполяційні властивості таких просторів.

## 2 Означення і попередні відомості

Нехай $\{\mathfrak{X}_j, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}_j}\}_{j=1}^J$ — скінченний набір банахових просторів над полем $\mathbb{C}$, $\otimes_j^J \mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}_J$ — їх тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму $\|w\|_{\otimes_j^J \mathfrak{X}_j} = \inf\limits_{w=\sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J}$, де точну нижню грань беруть за всіма зображеннями елемента $w \in \otimes_j^J \mathfrak{X}_j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^N \otimes_j^J x_n^j$ із скінченним $N$, $x_n^j \in \mathfrak{X}_j$ і $\otimes_j^J x_n^j := x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j^J \mathfrak{X}_j$. Поповнення простору $\otimes_j^J \mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J \mathfrak{X}_j := \mathfrak{X}_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathfrak{X}_J$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$, $j = 1, \ldots, J$, розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \le p_j \le \infty$ визначимо банахові простори цілих векторів експоненціального типу оператора $A_j$

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) := \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \ \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \Big( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}^{p_j}}{\nu_j^{k p_j}} \Big)^{1/p_j} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{E}_{\infty}^{\nu_j}(A_j) := \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \ \|x\|_{\mathcal{E}_{\infty}^{\nu_j}(A_j)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}}{\nu_j^k} < \infty \right\}.$$

Побудуємо тензорний добуток $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) := \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)$ з проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}.$$

Нехай $\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ — поповнення $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ у цій нормі. Нехай $0 < t, \nu_j, \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j, p_j, r_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Використовуючи позначення праці [6], визначимо інтерполяційний простір $\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}$ з нормою

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}} = \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j))\big]^{q_j} \frac{dt}{t}\Big)^{1/q_j},$$

де $\mathcal{K}(t, x; \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)) = \inf_{x=x_0+x_1} \big(\|x_0\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} + t\|x_1\|_{\mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)}\big)$, $x_0 \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, $x_1 \in \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)$, а також простір $\big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}$ з нормою

$$\|w\|^q_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} = \int_0^\infty \big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j))\big]^q \frac{dt}{t},$$

де $\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)) = \inf_{w=u+v} \big(\|u\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)} + t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)}\big)$, $u \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)$, $v \in \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)$.

## 3 Основні результати

**Теорема 1.** *Нехай* $0 < \nu_j \le \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\frac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^J \Big(\frac{1}{q_j} - 1\Big)$ *справедливий ізоморфізм банахових просторів*

$$\big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J \big(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}. \qquad (1)$$

***Доведення.*** Відзначимо, що при $0 < \nu_j \le \gamma_j < \infty$ виконуються нерівності $\|x\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)} \le \|x\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)}$ для всіх $x \in \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)$ і вкладення $\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j) \subset \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)$ неперервні. Тому при $0 < \tau < \infty$ і $\tau^J = t$ отримуємо таку оцінку

$$\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)) = \inf_{w=u+v} \big(\|u\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)} + t\,\|v\|_{\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)}\big) =$$

$$= \inf_{\sum_n \otimes_j^J x_n^j = \sum_n \otimes_j^J u_n^j + \sum_n \otimes_j^J v_n^j} \Bigg( \inf_{u=\sum_n \otimes_j^J u_n^j} \sum_{n=1}^N \|u_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|u_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J)} +$$

$$+ t \inf_{v=\sum_n \otimes_j^J v_n^j} \sum_{n=1}^N \|v_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|v_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)} \Bigg) \le$$

$$\le \inf_{\sum_n \otimes_j^J x_n^j = \sum_n \otimes_j^J u_n^j + \sum_n \otimes_j^J v_n^j} \Bigg( \sum_{n=1}^N \|u_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|u_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J)} +$$

$$+ t \sum_{n=1}^N \|v_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|v_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)} \Bigg) \le \sum_{n=1}^N \inf_{x_n^1 = u_n^1 + v_n^1} \big( \|u_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1)} +$$

$$+ \tau \|v_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)} \big) \cdot \ldots \cdot \inf_{x_n^J = u_n^J + v_n^J} \big( \|u_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J)} + \tau \|v_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)} \big) =$$

$$= \sum_{n=1}^N \mathcal{K}(\tau, x_n^1; \mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1), \mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)) \cdot \ldots \cdot \mathcal{K}(\tau, x_n^J; \mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J), \mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)).$$

Використовуючи нерівність Юнга, при $\frac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{q_j} - 1 \right)$ отримуємо

$$\int_0^\infty \left[ t^{-\theta} \mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)) \right]^q \frac{dt}{t} \le$$

$$\le J \sum_{n=1}^N \int_0^\infty \left[ \tau^{-\theta J} \mathcal{K}(\tau, x_n^1; \mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1), \mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)) \cdot \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \cdot \mathcal{K}(\tau, x_n^J; \mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J), \mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)) \right]^q \frac{d\tau}{\tau} \le$$

$$\le J \sum_{n=1}^N \Big( \int_0^\infty \left[ \tau^{-\theta} \mathcal{K}(\tau, x_n^1; \mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1), \mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)) \right]^{q_1} \frac{d\tau}{\tau} \Big)^{q/q_1} \ldots$$

$$\ldots \Big( \int_0^\infty \left[ \tau^{-\theta} \mathcal{K}(\tau, x_n^J; \mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J), \mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)) \right]^{q_J} \frac{d\tau}{\tau} \Big)^{q/q_J}.$$

Таким чином, $\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} \le J \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\theta,q_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\theta,q_J}$, де $\|x_n^j\|_{\theta,q_j} := \|x_n^j\|_{\left(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}}$. Беручи нижню грань по всіх зображеннях елемента $w \in \tilde{\otimes}_j^J \big(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^N \otimes_j^J x_n^j$, $x_n^j \in \big(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}$, отримуємо

$$\|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} \le J \|w\|_{\tilde{\otimes}_j^J \left(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}},$$

звідки випливає вкладення

$$\tilde{\otimes}_j^J \big(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j} \subset \big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}. \tag{2}$$

Використовуючи інтерполяційну нерівність

$$\|x\|_{\theta,q_j} \le c_{\theta,q_j} \|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)} \|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)}, \quad x \in \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j),$$

та нерівність Гельдера, отримуємо

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j^J \left(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j^J x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\theta,q_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\theta,q_J} \le$$

$$\le c'_{\theta,q_j} \inf_{w=\sum_n \otimes_j^J x_n^j} \Big( \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\nu_J}(A_J)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_1^{\gamma_J}(A_J)} \Big) \le$$

$$\le c''_{\theta,q_j} t^{-\theta} \mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)).$$

Звідси, в силу наступної нерівності $\mathcal{K}(t, w; \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)) \le c_{\theta,q} t^{\theta} \|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q}}$, $w \in \big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}$, маємо

$$\|w\|_{\tilde{\otimes}_j^J \left(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j}} \le c'_{\theta,q} \|w\|_{\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q}} \tag{3}$$

для $w = \sum_n \otimes_j^J x_n^j \in \big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}$, таких, що $x_n^j \in \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)$.

Оскільки $\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j)$ щільний в $\big(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}$, то (3) виконується для всіх $w \in \big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}$. Із нерівності (3) випливає

$$\big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j^J \big(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}. \tag{4}$$

Вкладення (2) і (4) дають (1). □

**Теорема 2.** *Нехай* $0 < \nu_j < \gamma_j < \infty$, $\mu_j = \nu_j^{1-\theta} \gamma_j^{\theta}$, $1 \le q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\frac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{q_j} - 1\right)$ *справедливий ізоморфізм банахових просторів*

$$\big(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{q_j}^{\mu_j}(A_j). \tag{5}$$

***Доведення.*** Кожний простір $\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)$ ізометричний простору послідовностей вигляду $l^{\nu_j}_{p_j} = \big\{\bar{x} := (A^k_j x)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)\big\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l^{\nu_j}_{p_j}} = \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu_j}_{p_j}(A_j)}$. Зробимо заміни $\mu_j = 2^{-\sigma_j}$, $\nu_j = 2^{-\sigma_{0j}}$, $\gamma_j = 2^{-\sigma_{1j}}$, при яких умова $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^{\theta}$ переходить у рівність $\sigma_j = (1-\theta)\sigma_{0j} + \theta\sigma_{1j}$ і використаємо обчислення з доведення [6, теорема 1.18.2]. При цьому $\mathcal{K}(t, \bar{x}, l^{\nu_j}_{\infty}, l^{\gamma_j}_{\infty}) \approx \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\min(2^{k\sigma_{0j}}, t2^{k\sigma_{1j}})\|A^k_j x\|_{\mathfrak{X}_j}$ для $p_j = r_j = \infty$ та $\mathcal{K}(t, \bar{x}, l^{\nu_j}_{1}, l^{\gamma_j}_{1}) \approx \sum_{k\in\mathbb{N}}\min(2^{k\sigma_{0j}}, t2^{k\sigma_{1j}})\|A^k_j x\|_{\mathfrak{X}_j}$ для $p_j = q_j = 1$. Нехай $\bar{x} \in \big(l^{\nu_j}_{\infty}, l^{\gamma_j}_{\infty}\big)_{\theta,q_j}$ і без обмеження загальності $\sigma_{0j} > \sigma_{1j}$. Підставляючи вирази для $\mathcal{K}$ у формули для норм, з точністю до деякої сталої $c > 0$ одержуємо

$$\|\bar{x}\|^{q_j}_{\left(l^{\nu_j}_{\infty}, l^{\gamma_j}_{\infty}\right)_{\theta,q_j}} \sim \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta q_j i(\sigma_{0j}-\sigma_{1j})} \sup_k \big[\min(2^{k\sigma_{0j}}, 2^{i(\sigma_{0j}-\sigma_{1j})+k\sigma_{1j}}) \times$$
$$\times \|A^k_j x\|_{\mathfrak{X}_j}\big]^{q_j} \geq \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{q_j i[\sigma_{0j}(1-\theta)+\sigma_{1j}\theta]}\|A^i_j x\|^{q_j}_{\mathfrak{X}_j} = c\|\bar{x}\|^{q_j}_{l^{\mu_j}_{q_j}}.$$

Отже, правильне неперервне вкладення $\big(l^{\nu_j}_{\infty}, l^{\gamma_j}_{\infty}\big)_{\theta,q_j} \subset l^{\mu_j}_{q_j}$. Якщо $\bar{x} \in l^{\mu_j}_{q_j}$, то з використанням нерівності Гельдера

$$\|\bar{x}\|^{q_j}_{\left(l^{\nu_j}_{1}, l^{\gamma_j}_{1}\right)_{\theta,q_j}} \sim \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta q_j i(\sigma_{0j}-\sigma_{1j})} \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \min(2^{k\sigma_{0j}}, 2^{i(\sigma_{0j}-\sigma_{1j})+k\sigma_{1j}}) \times$$
$$\times \|A^k_j x\|_{\mathfrak{X}_j}\Big]^{q_j} \leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\mu_j q_j}\|A^k_j x\|^{q_j}_{\mathfrak{X}_j} = c\|\bar{x}\|^{q_j}_{l^{\mu_j}_{q_j}}.$$

Тому правильне неперервне вкладення $l^{\mu_j}_{q_j} \subset \big(l^{\nu_j}_{1}, l^{\gamma_j}_{1}\big)_{\theta,q_j}$. З властивостей інтерполяційних просторів отримуємо $\big(l^{\nu_j}_{1}, l^{\gamma_j}_{1}\big)_{\theta,q_j} \subset \big(l^{\nu_j}_{\infty}, l^{\gamma_j}_{\infty}\big)_{\theta,q_j}$ при $1 \leq q_j \leq \infty$. В результаті маємо $l^{\mu_j}_{q_j} \subset \big(l^{\nu_j}_{1}, l^{\gamma_j}_{1}\big)_{\theta,q_j} \subset l^{\mu_j}_{q_j}$ і, таким чином, доведено рівність

$$\big(\mathcal{E}^{\nu_j}_{1}(A_j), \mathcal{E}^{\gamma_j}_{1}(A_j)\big)_{\theta,q_j} = \mathcal{E}^{\mu_j}_{q_j}(A_j). \tag{6}$$

Рівність (5) безпосередньо випливає з рівностей (1) і (6). □

Як приклад, розглянемо на просторах $\{L_{\rho_j}(\Omega)\}_{j=1}^{J}$, $1 < \rho_j < \infty$, комплексних сумовних функцій в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класу $C^\infty$ з границею $\partial\Omega$ регулярно еліптичні оператори (див. 5.2.1/4 з [6])

$$(A_j u)(x) = \sum_{|\alpha_j|\leq 2m} a_{\alpha_j}(x)\, D^{\alpha_j}u(x)\,, \quad a_{\alpha_j}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
$$\mathcal{D}(A_j) = \Big\{u \in W^{2m}_{\rho_j}(\Omega) : B_{ji}u_{|\partial\Omega} = 0,\ i = 1, \ldots, m\Big\},$$

де $W^{2m}_{\rho_j}(\Omega)$ — простір Соболєва, $(B_{ji}u)(x) = \sum_{|\alpha_j|\le m_i} b_{i,\alpha_j}(x)\, D^{\alpha_j}u(x)$ — набір граничних операторів, $b_{i,\alpha_j}(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $i = 1,\dots,m$.

Оператор $A_j$ є замкненим оператором в просторі $L_{\rho_j}(\Omega)$ і за умови $\rho(A_j) \ne \{\emptyset\}$ його спектр $\sigma(A_j) = \{\lambda_{jk}\}_{k=1}^\infty$ складається із ізольованих власних значень $\lambda_{jk}$ скінченної алгебраїчної кратності, причому $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{jk} = \infty$ [6, 5.4.3]. Позначимо через $\mathcal{R}_k(A_j)$ кореневий підпростір оператора $A_j$, що відповідає власному значенню $\lambda_{jk}$.

**Теорема 3.** *Нехай* $0 < \nu_j < \gamma_j < \infty$, $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^\theta$, $1 \le q, q_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\frac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{q_j} - 1\right)$ *справедливий ізоморфізм банахових просторів*

$$\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_k(A_j) :\ |\lambda_{jk}| < \mu_j\right\}.$$

***Доведення.*** Згідно з теоремою 1 [7], для кожного $\nu_j > 0$ виконується рівність $\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_k(A_j) :\ |\lambda_{jk}| < \nu_j\right\}$. Звідси і з рівності (6) при $\mu_j = \nu_j^{1-\theta}\gamma_j^\theta$, $\nu_j < \gamma_j$, $1 \le q_j \le \infty$, отримуємо

$$\left(\mathcal{E}_1^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_1^{\gamma_j}(A_j)\right)_{\theta,q_j} = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_k(A_j) :\ |\lambda_{jk}| < \mu_j\right\}.$$

Далі залишилось використати рівність (1). □

Якщо коефіцієнти $a_{\alpha_j}$ оператора $A_j$ є сталими, то у [7] доведено рівність

$$\bigcup\nolimits_{\nu>0} \mathcal{E}^\nu(A_j) = \operatorname{Exp}_{A_j,B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega)), \tag{7}$$

де $\operatorname{Exp}_{A_j,B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega)) = \left\{u \in \operatorname{Exp}(L_{\rho_j}(\Omega)) : B_{ji}A_j^k u_{|\partial\Omega} = 0, i = 1,\dots,m,\right.$ $\left.k = 0,1,\dots\right\}$, $\operatorname{Exp}(L_{\rho_j}(\Omega))$ — простір цілих функцій експоненціального типу, звуження яких на $\Omega$ належить простору $L_{\rho_j}(\Omega)$.

Використовуючи результати праці [8], з рівностей (7) і (5) отримуємо топологічний ізоморфізм просторів

$$\lim_{\nu\to\infty} \operatorname{ind} \tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{q_j}^\nu(A_j) \simeq \tilde{\otimes}_j^J \operatorname{Exp}_{A_j,B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega)).$$

[1] *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980. — 264 с.

[2] *Горбачук М.Л., Горбачук В.І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. ж. — 1995. — **47**, №5. — С. 616–628.

[3] *Радзиевский Г.В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Мат. сб. — 1998. — **189**, №4. — С. 83–124.

[4] *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. — 1983. — **27**, № 9. — С. 791–793.

[5] *Дмитришин М.І., Лопушанський О.В.* Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах // Доп. НАН України. — 2007. — №12. — С. 16–22.

[6] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[7] *Lopushansky O. V., Dmytryshyn M. I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії. Праці Львівського матем. т-ва. — 1998. — **9**, №1. — С. 70–77.

[8] *Grotendieck A.* Produits tensorial topologeus et espases nucleaire // Mem. Amer. Math. Soc. — 1955. — **16**, №2. — P. 1–140.

## INTERPOLATION OF TENSOR PRODUCTS OF EXPONENTIAL TYPE VECTORS OF CLOSED OPERATORS

*Maryan DMYTRYSHYN*

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *m_dmytryshyn@hotmail.com*

We define the interpolation spaces of tensor products of exponential type vectors of closed operators on Banach spaces and we prove the interpolation theorems.