ПРИМІТИВНІ МІНЛИВІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Ярослав ГРУШКА

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ 01601

e-mail: *grushka@imath.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 23 січня 2012 р.

В роботі вводиться поняття примітивної мінливої множини і досліджуються основні властивості таких множин. Примітивні мінливі множини є технічно необхідними для побудови більш загальної теорії мінливих множин. Тематика роботи тісно пов'язана з відомою шостою проблемою Гільберта.

1 Вступ

Незважаючи на широко відомі досягнення сучасної теоретичної фізики, математично строге обґрунтування її основ залишається відкритою проблемою [1, 2, 3] (шоста проблема Гільберта). Певні спроби формалізації окремих фізичних теорій було зроблено в роботах [4, 5, 6, 7]. Зауважимо, що в зазначених роботах не було сформульовано єдиного абстрактного підходу. Тому математичний апарат цих робіт виглядає штучним і недостатньо гнучким. Крім того, спроба в [6] формалізувати максимальну кількість відомих фізичних об'єктів без попереднього створення ієрархії більш елементарних абстрактних математичних

УДК: 510.22 + 51-71; MSC 2010: 03E99, 70A05
Ключові слова і фрази: примітивні мінливі множини, рух, зміни, час, шоста проблема Гільберта

понять привела до недостатньо зручного для аналізу математичного об'єкта [6, с. 177, означення 4.1]. Слід підкреслити, що в роботі [6] не було доведено теорем про властивості цього математичного об'єкта і, як зазначено в [7], подібних теорем на сьогодні не відомо. Однією з головних причин такого стану речей є відсутність абстрактних математичних структур, у рамках яких можна було б строго математично моделювати різноманітні процеси в фізичних, біологічних та інших складних системах.

У цій роботі досліджуються *примітивні мінливі множини*, на які можна дивитися як на математичну абстракцію найпримітивніших моделей фізичних процесів в одній (фіксованій) системі відліку. Ця робота є спробою описати з абстрактної, математично строгої точки зору таке базове поняття фізики, як еволюція систем. Примітивні мінливі множини є технічно необхідними для побудови більш загальної теорії *мінливих множин* — сукупностей об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, а також змінювати свої властивості залежно від способу спостереження (тобто, фактично, системи відліку).

2 Орієнтовані множини та їхні властивості

Найпримітивніша (стартова) модель сукупності мінливих об'єктів закладена в наступному означенні.

Означення 2.1. *Нехай M — довільна непорожня множина.*

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\leftarrowtriangle$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M \;\; x \leftarrowtriangle x$) будемо називати ***орієнтацією****, а пару $\mathcal{M} = (M, \leftarrowtriangle)$ будемо називати* ***орієнтованою множиною****. При цьому множину M будемо називати* ***базовою****, або множиною всіх* ***елементарних станів*** *орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і будемо позначати її через $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, а відношення $\leftarrowtriangle$ будемо називати* ***напрямним відношенням змін (трансформацій)*** *$\mathcal{M}$ і будемо позначати його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення

"$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним продовженням" елементарного стану x".

Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

Означення 2.2. *Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається **транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає $z \leftarrow x$.*

*Транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається **максимально транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо не існує транзитивної множини $N_1 \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такої, що $N \subset N_1$ (підкреслимо, що тут знак $\subset$ означає строге включення, тобто $N \neq N_1$).*

*Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається **ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається **максимальним ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо не існує ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такого, що $L \subset L_1$.*

Твердження 2.1. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. Довільна непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, яка містить не більше, двох елементів є транзитивною.

2. Не більш, ніж двохелементна непорожня підмножина $L = \{x, y\} \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ є ланцюгом тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Зокрема одноелементна підмножина $L \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ завжди є ланцюгом.

Доведення твердження 2.1 зводиться до тривіальної перевірки.

Лема 2.1. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. Об'єднання довільної сукупності транзитивних множин $\mathcal{M}$, лінійно упорядкованої відношенням включення є транзитивною множиною в $\mathcal{M}$.

2. Об'єднання довільної сукупності ланцюгів $\mathcal{M}$, лінійно упорядкованої відношенням включення є ланцюгом в $\mathcal{M}$.

Доведення. 1. Нехай $\mathfrak{N} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — деяка сукупність транзитивних множин в $\mathcal{M}$, лінійно упорядкована відношенням включення і $\widetilde{N} := \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N$. Розглянемо довільні елементарні стани $x, y, z \in \widetilde{N}$

такі, що $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$. Оскільки $x, y, z \in \widetilde{N} = \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N$, то існують $N_x, N_y, N_z \in \mathfrak{N}$ такі, що $x \in N_x$, $y \in N_y$, $z \in N_z$. Оскільки сім'я множин $\mathfrak{N}$ лінійно упорядкована відношенням включення, то знайдеться множина $N_0 \in \{N_x, N_y, N_z\} \subseteq \mathfrak{N}$ така, що $N_x, N_y, N_z \subseteq N_0$. Отже, $x, y, z \in N_0$. Оскільки N_0 — транзитивна множина, то з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає $z \leftarrow x$. Таким чином, $\widetilde{N}$ — транзитивна множина.

2. Нехай $\mathfrak{L} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ сукупність ланцюгів в $\mathcal{M}$, лінійно упорядкована відношенням включення. Згідно з пунктом 1, множина $\widetilde{L} := \bigcup_{L \in \mathfrak{L}} L$ є транзитивною. Далі, аналогічно як і в пункті 1, для довільних $x, y \in \widetilde{L}$ існує ланцюг $L_0 \in \mathfrak{L}$ такий, що $x, y \in L_0$. І оскільки L_0 — ланцюг, хоч одна з умов $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$ мусить мати місце. $\square$

З леми 2.1 та леми Цорна випливає наступне твердження.

Твердження 2.2.

1. Для довільної транзитивної множини N в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально транзитивна множина $N_{\max}$ така, що $N \subseteq N_{\max}$.

2. Для довільного ланцюга L в $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$ такий, що $L \subseteq L_{\max}$.

Зауважимо, що на другий пункт твердження 2.2 можна дивитися, як на узагальнення принципу максимальності Хаусдорфа в рамках даної теорії. З тверджень 2.2 та 2.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1.

1. Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально-транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ така, що $x, y \in N$.

2. Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, таких, що $y \leftarrow x$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такий, що $x, y \in L$.

Поклавши $x = y$ (враховуючи, що, за означенням, множина $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ непорожня) приходимо до висновку, що в довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ завжди існують максимально-транзитивні множини і максимальні ланцюги.

3 Означення часу. Примітивні мінливі множини

В теоретичній фізиці звикли вважати моменти часу дійсними числами. Проте абстрактна математика може мати справу з об'єктами потужності, більшої за континуум. Тому, в даній абстрактній теорії, ми не будемо обмежуватись дійсночисловими моментами часу. В наступному означенні в якості моментів часу можуть служити елементи довільної лінійно упорядкованої множини. Таке розуміння часу близьке до філософського, уявлення про час, як певний "хронологічний порядок", узгоджений з процесами змін.

Означення 3.1. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ називається **часом** на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови:*

1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.

2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

*При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати **моментами часу**, пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — **хронологізацією** $\mathcal{M}$, а трійку*

$$\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$$

*— **примітивною мінливою множиною**.*

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathcal{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину завжди можна хронологізувати. Найпримітивніший спосіб це зробити — взяти лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів і покласти

$$\psi(t) := \mathfrak{B}s(\mathcal{M}), \quad t \in \mathbf{T}. \tag{1}$$

Більш нетривіальні способи хронологізації розглянуті в розділі 4.

Наступне твердження є тривіальним наслідком означення часу 3.1.

Твердження 3.1. *Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{M}_1$ — орієнтовані множини, причому $\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{B}s\left(\mathcal{M}_1\right)$ і $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} \subseteq \underset{\mathcal{M}_1}{\leftarrow}$ (тобто для $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ з умови $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$ випливає, що $y \underset{\mathcal{M}_1}{\leftarrow} x$).*

Якщо відображення $\psi_1 : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M}_1)}$ (де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина) є часом на $\mathcal{M}_1$, то відображення:

$$\psi(t) = \psi_1(t) \cap \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$$

є часом на $\mathcal{M}$.

4 Точковий та монотонний час. Теореми про хронологізацію

Означення 4.1. *Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина.*

*1) Час ψ будемо називати **квазіточковим**, якщо для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною.*

*2) Час ψ будемо називати **точковим**, якщо виконуються наступні умови:*

(а) час ψ є квазіточковим;

(б) $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ з умов $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$, випливає $x_2 \leftarrow x_1$.

*3) Час ψ будемо називати **монотонним**, якщо $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ з умов $x_1 \in \psi\left(t_1\right)$, $x_2 \in \psi\left(t_2\right)$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$ випливає $t_1 < t_2$.*

Якщо час ψ є квазіточковим/точковим/монотонним, то хронологізацію $(\mathbb{T}, \psi)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ будемо називати квазіточковою/точковою/монотонною відповідно.

Приклад 1. *Розглянемо довільне відображення $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$. Таке відображення можна трактувати як опис руху деякої матеріальної точки в просторі $\mathbb{R}^d$. Відображення f породжує орієнтовану множину $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{B}s(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$, де $\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) = \mathfrak{R}(f) = \{f(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ і для $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$ тоді і тільки тоді, коли існують $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $x = f\left(t_1\right)$, $y = f\left(t_2\right)$ і $t_1 \leq t_2$. Легко перевірити, що відображення:*

$$\psi(t) = \{f(t)\} \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

є точковим часом на $\mathcal{M}$.

Приклад 1 пояснює зміст терміну "точковий час". Очевидно, що *будь-який точковий час є квазіточковим і монотонним.* Взагалі кажучи квазіточковий час може бути не монотонним, а отже, не точковим. Монотонний час також може бути не квазіточковим, а отже, і не точковим. Нижче наводяться приклади для підтвердження сказаного.

Приклад 2. *Розглянемо довільну двохелементну множину* $M = \{x_1, x_2\}$. *Побудуємо орієнтовану множину* $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{B}s(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$, *базова множина та напрямне відношення змін якої задаються наступним чином:*

$$\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) := M = \{x_1, x_2\}\,; \quad \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} := \{(x_2, x_1)\} \cup \mathsf{diag}(M),$$

де $\mathsf{diag}(M) = \{(x,x) \mid x \in M\}$, *(тобто, іншими словами,* $x_2 \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x_1$, $x_1 \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x_1$, $x_2 \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x_2$*). Розглянемо лінійно упорядковану множину* $\mathbb{T} = (\mathbb{R}, \leq)$ *(зі звичним порядком на полі дійсних чисел). Час* $\psi : \mathbb{R} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ *на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *визначимо наступним чином:*

$$\psi(t) := \begin{cases} \{x_1\}\,, & t \notin \mathbb{Q}; \\ \{x_2\}\,, & t \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

де через $\mathbb{Q}$ *позначено поле раціональних чисел. Легко перевірити, що таке відображення* $\psi(t)$ *справді є часом на* $\mathcal{M}$, *тобто задовольняє умови означення* 3.1. *Оскільки для довільного* $t \in \mathbb{R}$ *множина* $\psi(t)$ *завжди є одноелементною, то такий час* ψ *є квазіточковим. Поклавши* $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = 1$, *отримаємо* $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$, $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \not\leftarrow x_2$, *проте* $t_1 > t_2$. *Отже, час* ψ *не є монотонним.*

Приклад 3. *Розглянемо довільну чотириелементну множину* $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. *Побудуємо орієнтовану множину* $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{B}s(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$:

$$\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) = M; \quad \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} = \{(x_2, x_1), (x_4, x_3)\} \cup \mathsf{diag}(M).$$

Розглянемо лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\{1, 2\}, \leq)$ *(зі звичним порядком на полі дійсних чисел). Час на орієнтованій множині*

$\mathcal{M}$ визначимо наступним чином:

$$\psi(t) := \begin{cases} \{x_1, x_3\}, & t = 1 \\ \{x_2, x_4\}, & t = 2. \end{cases}$$

Легко перевірити, що $\psi(\cdot)$ є монотонним, але не квазіточковим, часом на $\mathcal{M}$.

Можна навести приклад, який показує, що квазіточковий і монотонний час також може бути не точковим.

Означення 4.2. *Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати* ***ланцюговою****, якщо вся множина $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ є ланцюгом $\mathcal{M}$.*

Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати ***циклічною****, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ мають місце обидва співвідношення $x \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$.*

Очевидно, що будь-яка циклічна орієнтована множина є ланцюговою.

Лема 4.1. *Будь-яку циклічну орієнтовану множину можна точково хронологізувати.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — циклічна орієнтована множина. За означенням орієнтованої множини, $\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Розглянемо довільні дві множини $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$, рівнопотужні множині $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такі, що $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2 = \emptyset$ (з теорії множин випливає, що такі множини обов'язково існують). Нехай $\trianglelefteq_i$ $(i = 1, 2)$ — довільні відношення лінійного порядку на $\mathbf{T}_i$ (зокрема за $\trianglelefteq_i$ можна взяти відношення повного порядку, які дає теорема Цермело). Покладемо:

$$\mathbf{T} := \mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2.$$

Для $t, \tau \in \mathbf{T}$ будемо вважати, що $t \leq \tau$, тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:

(П1) $t, \tau \in \mathbf{T}_i$ і $t \trianglelefteq_i \tau$ $(i = 1, 2)$; **(П2)** $t \in \mathbf{T}_1$, $\tau \in \mathbf{T}_2$.

Пара $(\mathbf{T}, \leq)$ є порядковою сумою двох лінійно упорядкованих множин $(\mathbf{T}_1, \trianglelefteq_1)$ і $(\mathbf{T}_2, \trianglelefteq_2)$. Отже, згідно з [8, с. 218, теорема 4], $(\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно упорядкованою множиною. Нехай $f : \mathbf{T}_2 \mapsto \mathbf{T}_1$ — довільна взаємно-однозначна відповідність між (рівнопотужними) множинами $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$, а $g : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ — довільна взаємно-однозначна відповідність між (рівнопотужними) множинами $\mathbf{T}_1$ і $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Побудуємо відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$:

$$\psi(t) := \begin{cases} \{g(t)\}, & t \in \mathbf{T}_1; \\ \{g(f(t))\}, & t \in \mathbf{T}_2. \end{cases} \tag{2}$$

Доведемо, що ψ є часом на $\mathcal{M}$.

1) Нехай $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Оскільки $g : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ — взаємно-однозначна відповідність між множинами $\mathbf{T}_1$ і $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, то існує обернене відображення $g^{[-1]} : \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) \mapsto \mathbf{T}_1$. Розглянемо елемент $t_x = g^{[-1]}(x) \in \mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$. Згідно з (2):

$$\psi(t_x) = \{g(t_x)\} = \left\{g(g^{[-1]}(x))\right\} = \{x\}.$$

Отже, $x \in \psi(t_x)$. Тобто перша умова означення часу виконується.

2) Нехай $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$, $x \neq y$. Покладемо:

$$t_x := g^{[-1]}(x) \in \mathbf{T}_1, \quad t_y := f^{[-1]}\left(g^{[-1]}(y)\right) \in \mathbf{T}_2.$$

Оскільки $t_x \in \mathbf{T}_1$, $t_y \in \mathbf{T}_2$, то, згідно з (П2), $t_x \leq t_y$. Оскільки $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2 = \emptyset$, то $t_x \neq t_y$. Отже, $t_x < t_y$. Згідно з (2):

$$\psi(t_x) = \{g(t_x)\} = \left\{g\left(g^{[-1]}(x)\right)\right\} = \{x\};$$
$$\psi(t_y) = \{g\left(f\left(t_y\right)\right)\} = \left\{g\left(f\left(f^{[-1]}\left(g^{[-1]}(y)\right)\right)\right)\right\} = \{y\}.$$

Тому $x \in \psi(t_x)$, $y \in \psi(t_y)$, де $t_x < t_y$. Отже, ψ — час на $\mathcal{M}$.

Згідно з (2), час ψ є квазіточковим. Нехай $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$. Оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ є циклічною, то $x_2 \leftarrow x_1$. Тому, за означенням 4.1, час ψ точковий. □

Теорема 4.1. *Будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — ланцюгова орієнтована множина. Тоді вся множина $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ є ланцюгом орієнтованої множини $\mathcal{M}$, тобто відношення $\leftarrow\, = \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ є квазі-порядком (рефлексивним і транзитивним відношенням) на $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$.

Нехай $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ будемо говорити, що елементи x і y є *циклічно еквівалентними* (позначення $x \overset{o}{\equiv} y$), якщо $x \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$. Згідно з [9, с. 37], відношення $\overset{o}{\equiv}$ є відношенням еквівалентності на $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Нехай F_1 і F_2 — два класи еквівалентності відношення $\overset{o}{\equiv}$. Будемо вважати, що $F_2 \mathrel{\triangleleft\!\!-} F_1$, якщо для довільних елементів $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ справедливо $x_2 \leftarrow x_1$. Згідно з [9, с. 37], відношення $\mathrel{\triangleleft\!\!-}$ є відношенням порядку на фактор-множині $\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}$ всіх класів еквівалентності, породжених відношенням $\overset{o}{\equiv}$. Доведемо, що цей порядок лінійний. Нехай $F_1, F_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}$, $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ (оскільки F_1 і F_2 є класами еквівалентності, то вони непорожні). Оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ є ланцюговою, то хоч одне із співвідношень $x_2 \leftarrow x_1$ або $x_1 \leftarrow x_2$ повино мати місце. Але у випадку $x_2 \leftarrow x_1$, згідно з [9, с. 37], будемо мати $F_2 \mathrel{\triangleleft\!\!-} F_1$. Аналогічно у випадку $x_1 \leftarrow x_2$ отримаємо $F_1 \mathrel{\triangleleft\!\!-} F_2$. Отже, $(\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}, \mathrel{\triangleleft\!\!-})$ є лінійно упорядкованою множиною.

Нехай $F \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}$. Тоді, оскільки F — клас еквівалентності відношення $\overset{o}{\equiv}$, для довільних $x, y \in F$ мають місце співвідношення $x \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ одночасно. Отже, будь-який клас еквівалентності $F \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}$ є циклічною орієнтованою множиною відносно відношення $\leftarrow$ (звуженого на цей клас). Тому, згідно з лемою 4.1, кожен такий клас еквівалентності можна точково хронологізувати. Нехай $(\mathbb{T}_F, \psi_F) = ((\mathbf{T}_F, \leq_F), \psi_F)$ — точкова хронологізація довільного класу еквівалентності $F \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$. Справді, в протилежному випадку можна перейти до множин:

$$\tilde{\mathbf{T}}_F = \{(t, F) : t \in \mathbf{T}_F\}, \quad F \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}$$

з порядком, $(t_1, F) \lesssim_F (t_2, F) \iff t_1 \leq_F t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbf{T}_F,\ F \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv})$ і часами, $\tilde{\psi}_F((t, F)) = \psi_F(t)$ $(t \in \mathbf{T}_F,\ F \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv})$ які також, очевидно, будуть точковими.

Отже, будемо вважати, що $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$. Покладемо:

$$\mathbf{T} := \bigcup\nolimits_{F \in \left(\mathfrak{B}s(\mathcal{M}) / \overset{o}{\equiv}\right)} \mathbf{T}_F.$$

Нехай $t \in \mathbf{T}$. Тоді існує клас еквівалентності $F(t) \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$ такий, що $t \in \mathbf{T}_{F(t)}$. І оскільки $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$, то такий клас еквівалентності $F(t)$ єдиний, тобто:

(F) *Для довільного* $t \in \mathbf{T}$ *з умови* $t \in \mathbf{T}_\Phi$ *(*$\Phi \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$*) випливає, що* $\Phi = F(t)$.

Нехай $t, \tau \in \mathbf{T}$. Будемо вважати, що $t \leq \tau$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:

(П1) $F(t) \neq F(\tau)$ і $F(\tau) \Leftarrow F(t)$; **(П2)** $F(t) = F(\tau)$ і $t \leq_{F(t)} \tau$.

Згідно [8, с. 218, теорема 4], $\leq$ є відношенням лінійного порядку на $\mathbf{T}$. Покладемо:

$$\psi(t) := \psi_{F(t)}(t), \qquad t \in \mathbf{T}. \tag{3}$$

Оскільки $\psi_{F(t)}(t) \subseteq F(t) \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $t \in \mathbf{T}$, то ψ є відображенням з $\mathbf{T}$ в $2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$. Доведемо, що $\psi(\cdot)$ є точковим часом.

а) Нехай $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Тоді існує клас еквівалентності $\Phi \in M/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$, такий, що $x \in \Phi$. Оскільки відображення $\psi_\Phi : \mathbf{T}_\Phi \mapsto 2^\Phi$ є часом на орієнтованій множині $(\Phi, \leftarrow)$, то існує момент часу $t \in \mathbf{T}_\Phi$ такий, що $x \in \psi_\Phi(t)$. Оскільки $t \in \mathbf{T}_\Phi$, то, згідно з твердженням (F), $\Phi = F(t)$. Тому:

$$\psi(t) = \psi_{F(t)}(t) = \psi_\Phi(t) \ni x.$$

Отже, перша умова означення часу виконується.

б) Нехай $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$ і $y \neq x$. Згідно з пунктом (а), існують $t, \tau \in \mathbf{T}$ такі, що $x \in \psi(t)$, $y \in \psi(\tau)$. Згідно з формулою (3), $\psi(t) = \psi_{F(t)}(t)$, $\psi(\tau) = \psi_{F(\tau)}(\tau)$. Оскільки $x \in \psi_{F(t)}(t) \subseteq F(t)$, $y \in F(\tau)$ і $y \leftarrow x$, то для довільних $x' \in F(t)$, $y' \in F(\tau)$ маємо $x' \overset{\mathbf{o}}{\equiv} x$, $y' \overset{\mathbf{o}}{\equiv} y$, а отже, $y' \leftarrow y \leftarrow x \leftarrow x'$, тобто $y' \leftarrow x'$. Це означає, що $F(\tau) \Leftarrow F(t)$. Звідси у випадку $F(t) \neq F(\tau)$, згідно з (П1), отримуємо, що $t \leq \tau$. Крім того, у цьому випадку з $F(t) \neq F(\tau)$ випливає, що $t \neq \tau$. Отже, $t < \tau$. Розглянемо тепер випадок $F(t) = F(\tau)$. У цьому випадку $x, y \in F(t)$. Оскільки $y \leftarrow x$ і $y \neq x$ і $\psi_{F(t)}$ є часом на $(F(t), \leftarrow)$, то існують елементи $t', \tau' \in \mathbf{T}_{F(t)}$ такі, що $x \in \psi_{F(t)}(t')$, $y \in \psi_{F(t)}(\tau')$ і $t' <_{F(t)} \tau'$. Оскільки $t', \tau' \in \mathbf{T}_{F(t)}$, то, згідно з твердженням (F), $F(t') = F(\tau') = F(t)$. Тому $\psi(t') = \psi_{F(t')}(t') = \psi_{F(t)}(t')$ і $\psi(\tau') = \psi_{F(t)}(\tau')$. Отже, $x \in \psi(t')$, $y \in \psi(\tau')$.

Оскільки $t' <_{F(t)} \tau'$ (тобто $t' \leq_{F(t)} \tau'$ і $t' \neq \tau'$), то, згідно з (П2), $t' \leq \tau'$, а отже, і $t' < \tau'$. Таким чином, $x \in \psi(t')$, $y \in \psi(\tau')$, де $t' < \tau'$. Отже, в обох випадках умова 2) означення часу виконується. Тому ψ — час на $\mathcal{M}$.

в) Оскільки для довільного класу еквівалентності $G \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$ відображення ψ_G є точковим часом на $(G, \twoheadleftarrow)$, то з формули (3) випливає, що час ψ квазіточковий.

Нехай $x \in \psi(t)$, $y \in \psi(\tau)$, де $t \leq \tau$. Доведемо, що $y \leftarrow x$. У випадку $F(t) \neq F(\tau)$, згідно з (П1), (П2), маємо, $F(\tau) \twoheadleftarrow F(t)$. І оскільки $x \in \psi(t) = \psi_{F(t)}(t) \subseteq F(t)$, $y \in F(\tau)$, то $y \leftarrow x$. У випадку $F(t) = F(\tau)$, аналогічно отримуємо $x, y \in F(t) = F(\tau)$, тобто $x \overset{\mathbf{o}}{\equiv} y$. А це означає, що, зокрема, $y \leftarrow x$. Отже, за означенням 4.1, час ψ точковий. $\square$

Теорема 4.2. *Будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково.*

Доведення. **1.** Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Позначимо через $\mathfrak{L}$ множину всіх максимальних ланцюгів множини $\mathcal{M}$. Згідно з теоремою 4.1, для кожного ланцюга $L \in \mathfrak{L}$ існує деяка точкова хронологізація $((\mathbf{T}_L, \leq_L), \psi_L)$ орієнтованої множини $(L, \leftarrow)$. Як і в доведенні теореми 4.1, не обмежуючи загальності можна вважати, що $\mathbf{T}_L \cap \mathbf{T}_M = \emptyset$, $L \neq M$. Покладемо:

$$\mathbf{T} := \bigcup\nolimits_{L \in \mathfrak{L}} \mathbf{T}_L. \tag{4}$$

Із співвідношення (4) випливає, що для довільного елемента $t \in \mathbf{T}$ існує ланцюг $L(t) \in \mathfrak{L}$ такий, що $t \in \mathbf{T}_{L(t)}$. І оскільки $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$, то такий ланцюг $L(t)$ для елемента $t \in \mathbf{T}$ єдиний, тобто справедливе твердження:

(L) *Для довільного елемента $t \in \mathbf{T}$ з умови $t \in \mathbf{T}_N$, де $N \in \mathfrak{L}$ випливає, що $N = L(t)$.*

Розглянемо довільний лінійний порядок $\trianglelefteq$ на множині $\mathfrak{L}$. Нехай $t, \tau \in \mathbf{T}$. Будемо вважати, що $t \leq \tau$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:

(П1) $L(t) \neq L(\tau)$ і $L(t) \trianglelefteq L(\tau)$. **(П2)** $L(t) = L(\tau)$ і $t \leq_{L(t)} \tau$.

Згідно з [8, с. 218, теорема 4], $(\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно упорядкованою множиною. Покладемо:

$$\psi(t) := \psi_{L(t)}(t) \qquad t \in \mathbf{T}. \tag{5}$$

Зауважимо, що $\psi(t) = \psi_{L(t)}(t) \subseteq L(t) \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $t \in \mathbf{T}$.

2. Доведемо, що відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ є часом.

2.а) Нехай $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Згідно з наслідком 2.1, для елемента x існує максимальний ланцюг $N_x \in \mathfrak{L}$ такий, що $x \in N_x$, а отже, оскільки відображення $\psi_{N_x} : \mathbf{T}_{N_x} \mapsto 2^{N_x}$ є часом, існує елемент $t_x \in \mathbf{T}_{N_x} \subseteq \mathbf{T}$, такий, що $x \in \psi_{N_x}(t_x)$. Оскільки $t_x \in \mathbf{T}_{N_x}$, то, згідно із сформульованим вище твердженням (L), $N_x = L(t_x)$. Тому:

$$\psi(t_x) = \psi_{L(t_x)}(t_x) = \psi_{N_x}(t_x) \ni x.$$

Тобто, для довільного елемента $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ існує елемент $t_x \in \mathbf{T}$, такий, що $x \in \psi(t_x)$.

2.б) Нехай $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$, $x \neq y$. Згідно з наслідком 2.1, існує максимальний ланцюг $N_{xy} \in \mathfrak{L}$ такий, що $x, y \in N_{xy}$. Оскільки $y \leftarrow x$, $x \neq y$ і відображення $\psi_{N_{xy}} : \mathbf{T}_{N_{xy}} \mapsto 2^{N_{xy}}$ є часом, то існують елементи $t_x, t_y \in \mathbf{T}_{N_{xy}} \subseteq \mathbf{T}$ такі, що $t_x <_{N_{xy}} t_y$ (тобто $t_x \leq_{N_{xy}} t_y$, $t_x \neq t_y$) і $x \in \psi_{N_{xy}}(t_x)$, $y \in \psi_{N_{xy}}(t_y)$. Оскільки $t_x, t_y \in \mathbf{T}_{N_{xy}}$, то, згідно з твердженням (L), $L(t_x) = L(t_y) = N_{xy}$. Тому:

$$\psi(t_x) = \psi_{L(t_x)}(t_x) = \psi_{N_{xy}}(t_x) \ni x;$$
$$\psi(t_y) = \psi_{L(t_y)}(t_{xy}) = \psi_{N_{xy}}(t_y) \ni y.$$

Оскільки $L(t_x) = L(t_y) = N_{xy}$, $t_x \leq_{N_{xy}} t_y$ і $t_x \neq t_y$, то, згідно з (П2), $t_x \leq t_y$ і $t_x \neq t_y$, тобто $t_x < t_y$. Отже, для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, таких, що $y \leftarrow x$, $x \neq y$ існують елементи $t_x, t_y \in \mathbf{T}$ такі, що $t_x < t_y$, $x \in \psi(t_x)$, $y \in \psi(t_y)$.

Таким чином, відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ справді є часом на $\mathcal{M}$.

3. Оскільки часи $\{\psi_L | L \in \mathfrak{L}\}$ є точковими, то з (5) випливає, що для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною. Отже, час ψ є квазіточковим. $\square$

Неважко переконатись в справедливості наступного твердження.

Твердження 4.1. *Будь-яка орієнтована множина $\mathcal{M}$, в якій існують елементарні стани $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такі, що $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \not\leftarrow x_2$, $x_3 \leftarrow x_2$, $x_2 \not\leftarrow x_3$, $x_1 \leftarrow x_3$, $x_1 \neq x_3$ не має монотонної хронологізації.*

Тому, не кожну орієнтовану множину можна хронологізувати монотонно, а отже, й точково.

5 Час і одночасність. Внутрішній час

Означення 5.1. *Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина. Множину*

$$Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$$

*будемо називати **множиною одночасних станів**, породженою часом ψ.*

Безпосередньо з означення часу 3.1 випливає наступне твердження.

Твердження 5.1. *Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина, а Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ. Тоді:*

$$\bigcup_{A \in Y_\psi} A = \mathfrak{B}s(\mathcal{M}).$$

Означення 5.2. *1. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Довільну сім'ю множин $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ таку, що $\bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, будемо називати **одночасністю** на $\mathcal{M}$.*

*2. Нехай $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — довільна одночасність на $\mathcal{M}$. Час ψ на $\mathcal{M}$ будемо називати **породжуючим** для одночасності $\mathbf{Y}$, якщо $\mathbf{Y} = Y_\psi$, де Y_ψ — множина одночасних станів, породжених часом ψ.*

Теорема 5.1. *Будь-яка одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ на довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ має породжуючий час.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — одночасність на $\mathcal{M}$.

a) Спочатку доведемо теорему у випадку, коли одночасність $\mathbf{Y}$ "розділяє" неоднакові послідовні елементарні стани, тобто коли виконується умова:

(Rp) Для довільних $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $A \neq B$.

Нехай $A, B \in \mathbf{Y}$. Будемо вважати, що $B \leftarrow A$ ($B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} A$) тоді і тільки тоді, коли:

$$A = B = \emptyset, \text{ або } \quad \exists\, x \in A\, \exists\, y \in B \ \ (y \leftarrow x)\,.$$

Легко перевірити, що пара $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$ є орієнтованою множиною. Згідно з теоремою 4.2, орієнтовану множину $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$ можна квазіточково хронологізувати. Нехай $\Psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathbf{Y}}$ — квазіточковий час на $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$. За означенням квазіточкового часу, для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\Psi(t)$ є одноелементною. Це означає, що:

$$\forall\, t \in \mathbf{T}\; \exists A_t \in \mathbf{Y} \quad \Psi(t) = \{A_t\}\,.$$

Покладемо:

$$\psi(t) := A_t, \quad t \in \mathbf{T}.$$

Доведемо, що ψ — час на $\mathcal{M}$. Оскільки Ψ — час на $\mathbf{Y}$, то $\bigcup_{t \in \mathbf{T}} \Psi(t) = \mathbf{Y}$. Отже, враховуючи, що $\Psi(t) = \{A_t\}$, $t \in \mathbf{T}$, отримуємо $\{A_t \,|\, t \in \mathbf{T}\} = \mathbf{Y}$. Тому, оскільки система множин $\mathbf{Y}$ є одночасністю, то $\bigcup_{t \in \mathbf{T}} \psi(t) = \bigcup_{t \in \mathbf{T}} A_t = \bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Отже, перша умова означення часу 3.1 виконується. Доведемо, що виконується і друга умова цього означення. Нехай $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$ і $x \neq y$. Згідно з умовою (Rp) існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $A \neq B$. Оскільки $x \in A$, $y \in B$ і $y \leftarrow x$, то $B \leftarrow A$. Оскільки $B \leftarrow A$, $A \neq B$ і Ψ — час на $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$, існують моменти часу $t, \tau \in \mathbf{T}$ такі, що $A \in \Psi(t)$, $B \in \Psi(\tau)$ і $t < \tau$. Звідси, враховуючи, що $\Psi(t) = \{A_t\}$, $\Psi(\tau) = \{A_\tau\}$, отримуємо, $A = A_t$, $B = A_\tau$, тобто $A = \psi(t)$, $B = \psi(\tau)$. Отже, оскільки $x \in A$, $y \in B$, то $x \in \psi(t)$, $y \in \psi(\tau)$, де $t < \tau$. Таким чином, ψ — час на $\mathcal{M}$. Крім того, враховуючи доведене вище, отримуємо:

$$Y_\psi = \{\psi(t) \,|\, t \in \mathbf{T}\} = \{A_t \,|\, t \in \mathbf{T}\} = \mathbf{Y}.$$

Отже, у випадку виконання умови (Rp) твердження теореми доведено.

б) Нехай тепер одночасність $\mathbf{Y}$ не задовольняє умови (Rp). Розглянемо довільний елемент $\tilde{x}$, що не належить до множини $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Покладемо:

$$\tilde{M} := \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) \cup \{\tilde{x}\}, \quad \widetilde{\leftarrow} = \leftarrow \cup \{(\tilde{x}, \tilde{x})\} \subseteq \tilde{M} \times \tilde{M},$$

тобто, іншими словами, для $x, y \in \tilde{M}$ співвідношення $y \widetilde{\leftarrow} x$ має місце тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ і $y \leftarrow x$ або $x = y = \tilde{x}$. Враховуючи, що для $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ умова $y \widetilde{\leftarrow} x$ рівносильна умові $y \leftarrow x$, надалі для відношень $\widetilde{\leftarrow}$ і $\leftarrow$ будемо використовувати одне і те ж позначення $\leftarrow$, вважаючи, що відношення $\leftarrow$ просто розширено на множину $\tilde{M}$. Оскільки $\forall x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ $(x \leftarrow x)$ і $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x}$ (за означенням), то пара $\left(\tilde{M}, \leftarrow\right)$ є орієнтованою множиною. Покладемо:

$$\mathbf{Y}_0 := \{B \in \mathbf{Y} \mid \exists x, y \in B : \ x \neq y, \ y \leftarrow x\}$$
$$\tilde{B} := B \cup \{\tilde{x}\}, \ B \in \mathbf{Y}_0;$$
$$\tilde{\mathbf{Y}}_0 := \left\{\tilde{B} \mid B \in \mathbf{Y}_0\right\}; \qquad \tilde{\mathbf{Y}} := \mathbf{Y} \cup \tilde{\mathbf{Y}}_0.$$

Оскільки, за припущенням, умова (Rp) не виконується, то $\mathbf{Y}_0 \neq \emptyset$. Оскільки $\mathbf{Y}$ є одночасністю на $\mathcal{M}$, і $\tilde{x} \in \tilde{B}$ для довільної множини $\tilde{B} \in \tilde{\mathbf{Y}}_0$, то $\tilde{\mathbf{Y}}$ є одночасністю на $\left(\tilde{M}, \leftarrow\right)$. Одночасність $\tilde{\mathbf{Y}}$ вже буде задовольняти умову (Rp). Тому, згідно з доведеним в пункті а), існує час $\psi_1 : \mathbf{T} \mapsto 2^{\tilde{M}}$ на $\left(\tilde{M}, \leftarrow\right)$ такий, що $Y_{\psi_1} = \{\psi_1(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = \tilde{\mathbf{Y}}$. Покладемо, $\psi(t) := \psi_1(t) \cap \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $t \in \mathbf{T}$. Згідно з твердженням 3.1, ψ є часом на $\mathcal{M}$. Крім того, $Y_\psi = \left\{A \cap \mathfrak{B}s(\mathcal{M}) \mid A \in \tilde{\mathbf{Y}}\right\} = \mathbf{Y}$. $\square$

Нижче буде розглянуто питання про єдиність (при певних обмеженнях) породжуючого часу одночасності. Для того, щоб постановка питання про таку "єдиність" була коректною, спочатку буде сформульовано означення еквівалентності хронологізацій.

Означення 5.3. *Хронологізації* $\mathcal{H}_1 = ((\mathbf{T}_1, \leq_1), \psi_1)$ *та* $\mathcal{H}_2 = ((\mathbf{T}_2, \leq_2), \psi_2)$ *орієнтованої множини* $\mathcal{M}$ *будемо називати* ***еквівалентними*** *(позначення* $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_2$*), якщо існує взаємно однозначна відповідність* $\xi : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{T}_2$ *така, що:*

1) *ξ є порядковим ізоморфізмом між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$, тобто для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}_1$ нерівність $t \le_1 \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\xi(t) \le_2 \xi(\tau)$.*

2) *Для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ має місце рівність $\psi_1(t) = \psi_2(\xi(t))$.*

Твердження 5.2. *Відношення $\upuparrows$ є відношенням еквівалентності на довільній множині хронологізацій довільної орієнтованої множини.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — довільна орієнтована множина і $\mathcal{V}$ довільна множина хронологізацій $\mathcal{M}$. Далі в цьому доведенні $\mathcal{H}_i = ((\mathbf{T}_i, \le_i), \psi_i) \in \mathcal{V}$ $(i = 1, 2, 3)$ означають довільні три хронологізації з $\mathcal{V}$.

1) Рефлексивність. Покладемо $\xi_{11}(t) := t$, $t \in \mathbf{T}_1$. Очевидно, що ξ_{11} є порядковим ізоморфізмом між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_1$. При цьому $\psi(t) = \psi(\xi_{11}(t))$, $t \in \mathbf{T}_1$. Отже, $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_1$.

2) Симетричність. Нехай $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_2$. Тоді, згідно з означенням 5.3, існує взаємно-однозначне відображення $\xi_{12} : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{T}_2$ таке, що ξ_{12} є порядковим ізоморфізмом між $\mathbf{T}_1$ та $\mathbf{T}_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ $\psi_1(t) = \psi_2(\xi_{12}(t))$. Покладемо $\xi_{21}(t) := \xi_{12}^{[-1]}(t) \in \mathbf{T}_1$, $t \in \mathbf{T}_2$. Оскільки ξ — порядковий ізоморфізм між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$, то $\xi_{21} = \xi_{12}^{[-1]}$ — порядковий ізоморфізм між $\mathbf{T}_2$ і $\mathbf{T}_1$. Крім того, для довільного $t \in \mathbf{T}_2$ маємо, $\psi_2(t) = \psi_2\left(\xi_{12}\left(\xi_{12}^{[-1]}(t)\right)\right) = \psi_1(\xi_{21}(t))$. Отже, $\mathcal{H}_2 \upuparrows \mathcal{H}_1$.

3) Транзитивність. Нехай $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_2 \upuparrows \mathcal{H}_3$. Тоді існують порядкові ізоморфізми $\xi_{12} : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{T}_2$ і $\xi_{23} : \mathbf{T}_2 \mapsto \mathbf{T}_3$ такі, що $\psi_1(t) = \psi_2(\xi_{12}(t))$, $t \in \mathbf{T}_1$ і $\psi_2(t) = \psi_3(\xi_{23}(t))$, $t \in \mathbf{T}_2$. Покладемо $\xi_{13}(t) := \xi_{23}(\xi_{12}(t))$, $t \in \mathbf{T}_1$. Легко бачити, що ξ_{13} — порядковий ізоморфізм між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_3$. Крім того, для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ маємо $\psi_1(t) = \psi_2(\xi_{12}(t)) = \psi_3(\xi_{23}(\xi_{12}(t))) = \psi_3(\xi_{13}(t))$. Отже, $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_3$. $\square$

Але, якщо, навіть, ставити питання про єдиність породжуючого часу одночасності з точністю до еквівалентності відповідних хронологізацій, то відповідь на поставлене питання є негативною. Так, наприклад, якщо $(\mathbf{T}, \le)$ — лінійно упорядкована множина, $\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}$, $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ і $t_1 \in \mathbf{T}_1$, то для часу:

$$\psi(t) := \begin{cases} \psi_1(t), & t \in \mathbf{T}_1 \\ \psi_1(t_1), & t \in \mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{T})$$

отримаємо $Y_\psi = Y_{\psi_1}$, хоча у випадку, коли множини $\mathbf{T}$ і $\mathbf{T}_1$ не є порядково ізоморфними, хронологізації $((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ і $((\mathbf{T}_1, \leq), \psi_1)$ не є еквівалентними. Тому для того, щоб отримати позитивну відповідь на поставлене питання, далі будуть накладені додаткові умови як на одночасність, так і на породжуючий її час.

Означення 5.4. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1) *Будемо говорити, що множина $B \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ **монотонно послідовна** множині $A \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ (позначення $B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow\!(\mathrm{m})} A$), якщо існують такі елементи $x \in A$ і $y \in B$, що $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$ і $x \underset{\mathcal{M}}{\not\leftarrow} y$.*

2) *Нехай $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — деяка система підмножин множини $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$. Будемо говорити, що множина $A \in \mathcal{Q}$ **транзитивно монотонно послідовна** множині $B \in \mathcal{Q}$ відносно $\mathcal{Q}$ (позначення $B \overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow\!(\mathrm{m})}} A$), якщо існує така послідовність множин $C_0, C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, що $C_0 = A$, $C_n = B$ і для довільного $k \in \overline{1,n}$ $C_k \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow\!(\mathrm{m})} C_{k-1}$.*

У випадку, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow\!(\mathrm{m})}$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow\!(\mathrm{m})}}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи, замість них позначення $\leftarrow\!(\mathrm{m})$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow\!(\mathrm{m})}$ відповідно.

Зауваження 5.1. *Відношення* $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow\!(\mathrm{m})}$ **є транзитивним** *на $\mathcal{Q}$, оскільки воно є* транзитивним замиканням *відношення* $\leftarrow\!(\mathrm{m})$ *в сенсі* [10, с. 69].

Використовуючи означення 5.4 неважко довести наступне твердження.

Твердження 5.3. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}' \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ — системи підмножин множини $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, причому $\mathfrak{S} \sqsubseteq \mathfrak{S}'$ (тобто для довільної множини $A \in \mathfrak{S}$ існує множина $A' \in \mathfrak{S}'$ така, що $A \subseteq A'$).*

Тоді для довільних $A, B \in \mathfrak{S}$ і $A', B' \in \mathfrak{S}'$ таких, що $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ з умови $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow\!(\mathrm{m})} A$ випливає, що $B' \overset{\mathfrak{S}'}{\twoheadleftarrow\!(\mathrm{m})} A'$.

Означення 5.5. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1) *Систему множин $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати* ***неповторною****, якщо не існує множин $A, B \in \mathfrak{S}$ таких, що $A \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, B$ і $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$. Зокрема, якщо одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є неповторною системою множин, отримуємо* ***неповторну одночасність****.*

2) *Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати* ***чіткою****, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$, $A \neq B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$ (тобто якщо ця одночасність "відчуває" всі зміни на орієнтованій множині $\mathcal{M}$).*

3) *Одночасність $\mathbf{Y}$ будемо називати* ***чітко-неповторною****, якщо вона є чіткою і неповторною одночасно.*

Твердження 5.4. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — неповторна система множин. Тоді:*

1) *Відношення $\overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})$ є* строгим порядком *(антирефлексивним і транзитивним відношенням) на $\mathfrak{S}$ (зокрема довільних $A, B \in \mathfrak{S}$ з умови $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$ випливає, що $A \neq B$).*

2) *Якщо $\mathfrak{S}_1 \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ і $\mathfrak{S}_1 \sqsubseteq \mathfrak{S}$ то $\mathfrak{S}_1$ також є неповторною, системою множин.*

Доведення. Перший пункт даного твердження безпосередньо випливає з означення 5.5 (п.1) і зауваження 5.1. Другий пункт є наслідком твердження 5.3. □

Лема 5.1. *Якщо час $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ є монотонним і Y_ψ — одночасність, породжена часом ψ, то для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ з умови $\psi(t_2) \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, \psi(t_1)$ випливає, що $t_1 < t_2$.*

Доведення. 1) Розглянемо спочатку випадок $\psi(t_2) \leftarrow(\mathrm{m})\, \psi(t_1)$. В цьому випадку, за означенням 5.4, існують елементи $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ такі, що $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$. Тому, оскільки час ψ монотонний, $t_1 < t_2$.

2) Розглянемо тепер загальний випадок, коли $\psi(t_2) \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, \psi(t_1)$. В цьому випадку існують моменти часу $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{T}$ такі, що $\tau_0 = t_1$, $\tau_n = t_2$ і для довільного $k \in \overline{1,n}$ $\psi(\tau_k) \leftarrow(\mathrm{m})\, \psi(\tau_{k-1})$. Звідси, згідно з пунктом 1), отримуємо $\tau_{k-1} < \tau_k$, $k \in \overline{1,n}$. Отже, $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t_2$. □

Означення 5.6. *Одночасність* $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *будемо називати* ***монотонно зв'язною****, якщо для довільних множин* $A, B \in \mathbf{Y}$ *таких, що* $A \neq B$ *має місце хоч одна з умов* $A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} B$ *або* $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} A$.

Зауваження 5.2. *Безпосередньо з означення* 5.6 *і твердження* 5.4 (п.1) *випливає, що коли одночасність* $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *є неповторною і монотонно-зв'язною, то відношення* $\overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}$ *є* строгим лінійним порядком *на* $\mathbf{Y}$.

Означення 5.7. *Час* $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *(де* $(\mathbf{T}, \leq)$ *— лінійно упорядкована множина) будемо називати* ***невпинним****, якщо не існує моментів часу* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ *таких, що* $t_1 < t_2$ *і для довільного* $t \in \mathbf{T}$ *такого, що* $t_1 \leq t \leq t_2$ *має місце рівність* $\psi(t) = \psi(t_1)$*. Час* ψ *будемо називати* ***строго монотонним*** *(монотонно-невпинним), якщо він є одночасно і монотонним і невпинним.*

Лема 5.2. *Нехай* $\mathbf{Y}$ *— чітко-неповторна і монотонно-зв'язна одночасність на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *і* $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *— породжуючий цю одночасність час. Тоді:*

1) *Якщо час* ψ *є строго монотонний, то він є* ***неповторним*** *(тобто для довільних* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ *з умови* $t_1 \neq t_2$ *випливає, що* $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$*).*

2) *Час* ψ *є строго монотонним тоді і тільки тоді, коли для довільних* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ *з умови* $t_1 < t_2$ *випливає, що* $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi(t_1)$.

3) *Якщо час* ψ *є строго монотонний, то строго лінійно упорядковані множини* $(\mathbf{T}, >)$ *і* $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}\right)$ *є порядково ізоморфні, причому відображення* $\psi : \mathbf{T} \mapsto \mathbf{Y}$ *є порядковим ізоморфізмом між* $(\mathbf{T}, >)$ *і* $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}\right)$.

Доведення. 1) Нехай час $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є строго монотонний. Припустимо, що існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і $\psi(t_1) = \psi(t_2)$. Оскільки час ψ невпинний, то існує момент часу $t_3 \in \mathbf{T}$ такий, що $t_1 < t_3 < t_2$ і $\psi(t_3) \neq \psi(t_1) = \psi(t_2)$. Оскільки $\psi(t_3) \neq \psi(t_1)$

і одночасність $\mathbf{Y}$ є монотонно зв'язною, то мусить мати місце хоч одна з умов $\psi\left(t_3\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_1\right)$ або $\psi\left(t_1\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_3\right)$. Проте, оскільки $t_1 < t_3$ то умова $\psi\left(t_1\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_3\right)$ виконуватись не може, згідно з лемою 5.1. Отже, $\psi\left(t_3\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_1\right)$. Аналогічно з умов $t_3 < t_2$ і $\psi\left(t_3\right) \neq \psi\left(t_2\right)$ випливає, що $\psi\left(t_2\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_3\right)$. Тобто, враховуючи, що $\psi\left(t_1\right) = \psi\left(t_2\right)$ маємо, $\psi\left(t_3\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_1\right)$ і $\psi\left(t_1\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_3\right)$, що суперечить тому, що одночасність $\mathbf{Y} = Y_\psi$ є неповторною.

2.а) Нехай час $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ є строго монотонний. Розглянемо моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$. Згідно з першим пунктом леми $\psi\left(t_1\right) \neq \psi\left(t_2\right)$. Тому, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є монотонно зв'язною, то мусить мати місце хоч одна з умов $\psi\left(t_2\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_1\right)$ або $\psi\left(t_1\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_2\right)$. Але, оскільки $t_1 < t_2$, то умова $\psi\left(t_1\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_2\right)$ виконуватись не може, згідно з лемою 5.1. Отже,

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbf{T}\ t_1 < t_2 \Rightarrow \psi\left(t_2\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_1\right). \tag{6}$$

2.б) Нехай тепер виконується умова (6). Розглянемо елементарні стани $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такі, що $x_1 \in \psi\left(t_1\right)$, $x_2 \in \psi\left(t_2\right)$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$ (де $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$). За означенням 5.4, $\psi\left(t_2\right) \leftarrow(\mathrm{m})\, \psi\left(t_1\right)$. Тому

$$\psi\left(t_2\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_1\right). \tag{7}$$

Якщо припустити, що $t_1 \geq t_2$, то ми отримаємо

$$\psi\left(t_1\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi\left(t_2\right) \tag{8}$$

(справді, у випадку $t_1 = t_2$ співвідношення (8) випливає з (7), а у випадку $t_1 > t_2$ співвідношення (8) випливає з умови (6)). Отже, у випадку $t_1 \geq t_2$ мусять виконуватись умови (7) і (8) одночасно, що неможливо, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною. Тому єдино можливим є варіант $t_1 < t_2$. Цим доведено монотонність часу ψ.

Припустимо, що існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi\left(t_1\right)$. Тоді, зокрема, отримаємо $\psi\left(t_1\right) = \psi\left(t_2\right)$, де $t_1 < t_2$. Оскільки

$t_1 < t_2$, то, за умовою (6), мусить виконуватись співвідношення (7), а оскільки $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, то співвідношення (8) повино виконуватись також, що неможливо, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною. Отже, припущення — невірне. Тому час ψ є невпинним. Таким чином, час ψ строго монотонний.

3) Згідно з першим пунктом леми, відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto \mathbf{Y}$ є взаємно-однозначною відповідністю між $\mathbf{T}$ і $\mathbf{Y} = Y_\psi$. Згідно з другим пунктом леми, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ з умови $t_2 > t_1$ випливає, що $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi(t_1)$. Тому відображення ψ є порядковим ізоморфізмом між лінійно упорядкованими (за строгим порядком) множинами $(\mathbf{T}, >)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}\right)$. $\square$

Теорема 5.2. *Для довільної чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності* $\mathbf{Y}$ *існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій строго монотонний час* ψ *такий, що* $\mathbf{Y} = Y_\psi$.

Зауважимо, що в теоремі 5.2 єдиність з точністю до еквівалентності хронологізацій означає, що якщо на лінійно упорядкованих множинах $\mathbb{T}_1$ і $\mathbb{T}_2$ визначені (відповідно) строго-монотонні часи ψ_1 і ψ_2 такі, що $\mathbf{Y} = Y_{\psi_1} = Y_{\psi_2}$, то хронологізації $(\mathbb{T}_1, \psi_1)$ і $(\mathbb{T}_2, \psi_2)$ є еквівалентними.

Доведення. **1.** Нехай $\mathbf{Y}$ — чітко-неповторна і монотонно-зв'язна одночасність на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Покладемо:

$$\mathbf{T} := \mathbf{Y}.$$

Для $t, \tau \in \mathbf{T} = \mathbf{Y}$ будемо вважати, що $t \leq \tau$ тоді і тільки тоді, коли

$$t = \tau \text{ або } \tau \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} t.$$

Згідно із зауваженням 5.2, $\overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}$ є строгим лінійним порядком на $\mathbf{Y}$. Отже, відношення $\leq$ є нестрогим (оберненим) лінійним порядком, породженим строгим порядком $\overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}$. Тому для $t, \tau \in \mathbf{T}$ справедлива рівносильність:

$$t < \tau \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad \tau \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} t, \tag{9}$$

де $t < \tau$ означає, що $t \le \tau$ і $t \ne \tau$. Отже, $(\mathbf{T}, \le)$ — лінійно упорядкована множина. Покладемо:

$$\psi(t) := t, \quad t \in \mathbf{T} = \mathbf{Y}.$$

Оскільки $\mathbf{T} = \mathbf{Y}$, то для $t \in \mathbf{T} \quad \psi(t) = t \in \mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$.

2. Доведемо, що ψ є часом на $\mathcal{M}$.

(а) Оскільки $\mathbf{Y}$ — одночасність, то для довільного $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ існує множина $t_x \in \mathbf{Y} = \mathbf{T}$ така, що $x \in t_x$. Тоді будемо мати $\psi(t_x) = t_x \ni x$. Отже, перша умова означення часу виконується.

(б) Нехай $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$ і $x \ne y$. Оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є чіткою, то існують $t_x, t_y \in \mathbf{Y} = \mathbf{T}$ такі, що $x \in t_x$, $y \in t_y$ і $t_y \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, t_x$. Тоді, згідно (9), $t_x < t_y$. При цьому, оскільки $\psi(t) = t$, $t \in \mathbf{T}$:

$$x \in \psi(t_x); \quad y \in \psi(t_y).$$

Тому друга умова означення часу також виконується, отже, відображення ψ є часом.

3. Доведемо, що час ψ є строго монотонним.

(а) Нехай $x \in \psi(t_x)$, $y \in \psi(t_y)$, $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$. Тоді $t_y \leftarrow(\mathrm{m})\, t_x$. Тому $t_y \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, t_x$, тобто, згідно з (9), $t_x < t_y$.

(б) Припустимо, що час ψ не є невпинним. Тоді існують $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \le t \le t_2 \;\; \psi(t) = \psi(t_1)$. Зокрема це означає, що $\psi(t_2) = \psi(t_1)$. Тому, оскільки $\psi(\tau) = \tau$, $\tau \in \mathbf{T}$, $\; t_2 = t_1$, що суперечить нерівності $t_1 < t_2$. Отже, припущення невірне. Тому час ψ є строго монотонним.

4. Доведемо, що такий час ψ єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій. Нехай $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — інший строго монотонний час, такий, що $Y_{\psi_1} = \mathbf{Y}$, де $(\mathbf{T}_1, \le_1)$ — лінійно упорядкована множина. Тоді, за лемою 5.2, лінійно упорядковані (за строгим порядком) множини $(\mathbf{T}_1, >_1)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\right)$ — порядково ізоморфні і відображення $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{Y}$ є порядковим ізоморфізмом між цими лінійно упорядкованими множинами, де $>_1$ — відношення, обернене до відношення $<_1$, тобто до строгого порядку, породженого відношенням $\le_1$. Тому множини $(\mathbf{T}_1, \le_1)$ і $(\mathbf{Y}, \le) = (\mathbf{T}, \le)$ також є порядково ізоморфні з порядковим ізоморфізмом ψ_1. Крім того, для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ маємо:

$$\psi_1(t) = \psi\left(\psi_1(t)\right),$$

тобто за означенням 5.3, $\left(\left(\mathbf{T}_1, \leq_1\right), \psi_1\right) \upuparrows \left(\left(\mathbf{T}, \leq\right), \psi\right)$. □

Означення 5.8. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — час на $\mathcal{M}$.*

*Відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ будемо називати **хронометричним** процесом (для часу ψ), якщо:*

1) Для довільного $t \in \mathbf{T}$ $\quad \mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$.

2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$;

*Час ψ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ будемо називати **внутрішнім**, якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.*

Зміст терміну "внутрішній час" полягає в тому, що якщо час на примітивній мінливій множині є внутрішнім, його можна "поміряти" в межах цієї примітивної мінливої множини, використовуючи хронометричний процес в якості "годинника", а стани хронометричного процесу в якості індикаторів моментів часу.

Лема 5.3. *Породжуючий час чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності є внутрішнім тоді і тільки тоді, коли він є строго монотонним.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\mathbf{Y}$ — чітко-неповторна і монотонно-зв'язна одночасність на $\mathcal{M}$ і $\psi : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ — час, що породжує $\mathbf{Y}$ (тобто $\mathbf{Y} = Y_\psi$).

1) Припустимо, що час ψ є внутрішнім. Тоді для часу ψ існує хронометричний процес $\mathbf{h} : \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$.

1.a) Доведемо, що час ψ є монотонним. Нехай $x_1 \in \psi\left(t_1\right)$, $x_2 \in \psi\left(t_2\right)$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$. Тоді $\psi\left(t_2\right) \leftarrow(\mathrm{m})\, \psi\left(t_1\right)$, тобто $\psi\left(t_2\right) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, \psi\left(t_1\right)$. Звідси, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною, за твердженням 5.4, $\psi\left(t_1\right) \neq \psi\left(t_2\right)$, тобто $t_1 \neq t_2$. Доведемо, що $t_1 < t_2$. Припустимо супротивне. Тоді, оскільки $t_1 \neq t_2$, маємо $t_2 < t_1$. Тому, оскільки $\mathbf{h}$ —

хронометричний процес, то $\mathbf{h}(t_1) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \mathbf{h}(t_2)$. Звідси, враховуючи, що, за означенням 5.8, $\mathbf{h}(\mathbf{T}) \sqsubseteq \mathbf{Y}$, використовуючи твердження 5.3, отримуємо $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi(t_2)$, що неможливо, оскільки, одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною, і, за доведеним вище, $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi(t_1)$. Отже, припущення — невірне. Тому $t_1 < t_2$. Монотонність часу ψ доведено.

1.б) Доведемо, що час ψ є невпинним. Припустимо супротивне. Тоді існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$. Тоді, зокрема, $\psi(t_2) = \psi(t_1)$. Але, оскільки $\mathbf{h}$ — хронометричний процес і $t_1 < t_2$, то $\mathbf{h}(t_2) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \mathbf{h}(t_1)$. Звідси, згідно з твердженням 5.3, $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi(t_1)$. Отже, згідно з твердженням, 5.4, $\psi(t_2) \neq \psi(t_1)$, що суперечить отриманому вище. Отже, час ψ справді є невпинним, тобто, враховуючи отримане в пункті 1.а), — строго монотонним.

2) Припустимо тепер, що час ψ є строго монотонним. За лемою 5.2, строго лінійно упорядковані множини $(\mathbf{T}, >)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}\right) = \left(\mathbf{Y}, \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})}\right)$ є порядково ізоморфними, і відображення $\psi : \mathbf{T} \mapsto \mathbf{Y}$ є порядковим ізоморфізмом між ними. Тому для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ умови $t_1 < t_2$ і $\psi(t_2) \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow(\mathrm{m})} \psi(t_1)$ рівносильні (де $Y_\psi = \mathbf{Y} = \psi(\mathbf{T})$). Звідси випливає, що відображення $\mathbf{h}(t) = \psi(t)$, $t \in \mathbf{T}$ є хронометричним процесом для часу ψ. Тому час ψ є внутрішнім. $\square$

З леми 5.3 та теореми 5.2 випливає наступна теорема.

Теорема 5.3. *Для довільної чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності* $\mathbf{Y}$ *існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час* ψ *такий, що* $\mathbf{Y} = Y_\psi$.

Філософський зміст теореми 5.3 полягає в тому, що неповторність картин навколишньої дійсності, можливість бачити зміни, що відбуваються в послідовних одночасних станах та зв'язність різних картин навколишньої дійсності ланцюгами змін (трансформацій) однозначно породжують хід "внутрішнього" часу у "нашому" світі.

Зауваження 5.3. *Надалі примітивні мінливі множини будемо позначати каліграфічними великими буквами. Нехай $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \phi)$ — примітивна мінлива множина. Де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \trianglelefteq)$ — лінійно упорядкована множина. Введемо наступні позначення:*

$$\mathfrak{B}s(\mathcal{P}) := \mathfrak{B}s(\mathcal{M}); \quad \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}; \quad \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T}; \quad \leq_{\mathcal{P}} := \trianglelefteq; \quad \psi_{\mathcal{P}} := \phi.$$

Також будемо використовувати позначення $\geq_{\mathcal{P}}$,$<_{\mathcal{P}}$,$>_{\mathcal{P}}$ для позначення оберненого, строгого та строгого оберненого порядку, породженого нестрогим порядком $\leq_{\mathcal{P}}$. Множину $\mathfrak{B}s(\mathcal{P})$ будемо називати базовою множиною*, або множиною* всіх елементарних станів *примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. Елементи множини $\mathfrak{B}s(\mathcal{P})$ будемо називати* елементарними станами $\mathcal{P}$*, а відношення $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$ будемо називати* напрямним відношенням змін $\mathcal{P}$*. Множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ будемо називати* множиною моментів часу $\mathcal{P}$*. Відношення $\leq_{\mathcal{P}}$,$<_{\mathcal{P}}$,$\geq_{\mathcal{P}}$,$>_{\mathcal{P}}$ будемо називати відповідно відношеннями нестрогого, строго, нестрогого оберненого і строгого оберненого* часового порядку *на $\mathcal{P}$. Відображення $\psi_{\mathcal{P}} : \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) :\mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{P})}$ будемо називати часом на $\mathcal{P}$. У випадку, коли зрозуміло, про яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$, $\leq_{\mathcal{P}}$, $<_{\mathcal{P}}$, $\geq_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$, $\psi_{\mathcal{P}}$ символ $\mathcal{P}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.*

6 Системи абстрактних траєкторій і примітивні мінливі множини, породжені ними.

Означення 6.1. *Нехай M — довільна непорожня множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина.*

1. *Відображення $r : \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ будемо називати абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ (де $\mathfrak{D}(r)$ — область визначення абстрактної траєкторії r).*

2. *Системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M будемо називати довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M таку, що*

$$\bigcup_{r\in\mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$$

(де $\mathfrak{R}(r)$ — область значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 6.1. *Для довільної системи $\mathcal{R}$ абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина примітивна мінлива множина $\mathcal{P}$ така, що:*

1) $\mathfrak{B}s(\mathcal{P}) = M$; $\quad \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbf{T}$, $\quad \leq_{\mathcal{P}} = \leq$.

2) *Для довільних $x, y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{P})$ умова $y \leftarrow x$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_{x,y} \in \mathcal{R}$ та елементи $t, \tau \in \mathfrak{D}(r)$ такі, що $x = r(t)$, $y = r(\tau)$ і $t \leq \tau$.*

3) *Для довільних $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{P})$ і $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ умова $x \in \psi_{\mathcal{P}}(t)$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_x \in \mathcal{R}$ така, що $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $x = r(t)$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{R}$ — довільна система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Визначимо на множині M бінарне відношення $\underset{\mathcal{R}}{\twoheadleftarrow}$ та відображення $\varphi_{\mathcal{R}} : \mathbf{T} \mapsto 2^M$:

$$\begin{aligned}\underset{\mathcal{R}}{\twoheadleftarrow} = \{&(y, x) \in M \times M \mid \\ &\exists r \in \mathcal{R}\, \exists t, \tau \in \mathfrak{D}(r) : \; x = r(t), \; y = r(\tau), \; t \leq \tau\}.\end{aligned}$$

$$\varphi_{\mathcal{R}}(t) = \bigcup_{r \in \mathcal{R},\, t \in \mathfrak{D}(r)} \{r(t)\} = \{r(t) \mid r \in \mathcal{R}, \; t \in \mathfrak{D}(r)\}.$$

Зокрема, $\varphi_{\mathcal{R}}(t) = \emptyset$, якщо не існує траєкторій $r \in \mathcal{R}$ таких, що $t \in \mathfrak{D}(r)$.

Неважко перевірити, що трійка $\mathcal{P} = \left(\left(M, \underset{\mathcal{R}}{\twoheadleftarrow}\right), (\mathbf{T}, \leq), \varphi_{\mathcal{R}}\right)$ є примітивною мінливою множиною, яка, задовольняє умови 1),2),3) даної теореми.

Навпаки, якщо примітивна мінлива множина $\mathcal{P}_1$ задовольняє умови 1), 2), 3) даної теореми, то з першої умови випливає, що $\mathfrak{B}s(\mathcal{P}_1) = M$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{P}_1) = \mathbf{T}$, $\leq_{\mathcal{P}_1} = \leq$, а другої та третьої умов випливають рівності $\underset{\mathcal{P}_1}{\leftarrow} = \underset{\mathcal{R}}{\twoheadleftarrow}$ та $\psi_{\mathcal{P}_1} = \varphi_{\mathcal{R}}$. Отже, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$. $\square$

Означення 6.2. *Нехай* $\mathcal{R}$ — *довільна система абстрактних траєкторій з* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *в* M*. Примітивну мінливу множину* $\mathcal{P}$*, яка задовольняє умови* 1),2),3) *теореми* 6.1*, будемо називати примітивною мінливою множиною,* ***породженою системою абстрактних траєкторій*** $\mathcal{R}$ *і будемо позначати її через* $\mathcal{A}tp(\mathcal{R})$*:*

$$\mathcal{A}tp(\mathcal{R}) := \mathcal{P}.$$

Таким чином, системи абстрактних траєкторій дають досить простий спосіб конструювання примітивних мінливих множин. Можна довести, що даний спосіб є універсальним, тобто будь-яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ можна подати у вигляді $\mathcal{P} = \mathcal{A}tp(\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — деяка система абстрактних траєкторій.

[1] Проблемы Гильберта (Сборник под ред. Александрова П.С.). — М.: Наука, 1969. — 240 с.

[2] *Гладун А.Д.* Шестая проблема Гильберта. // Потенциал. — 2006. — №3 (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).

[3] *Petunin Yu.I., Klyushin D.A.* A structural approach to solving the 6th Hilbert problem // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2005. — №71. — P. 165–179.

[4] *McKinsey J.C.C., Sugar A.C., Suppes P.* Axiomatic foundations of classical particle mechanics // J. of Rational Mechanics and Analysis. — 1953. — №2. — P. 253–272.

[5] *Schutz John W.* Foundations of special relativity: kinematic axioms for Minkowski space-time // Lecture Notes in Mathematics. — **361**. — Berlin-New York: Springer-Verlag, 1973. — 314 p.

[6] *da Costa N.C.A., Doria F.A.* Suppes predicates for classical physics // The Space of Mathematics. — Berlin-New York: De-Gruyter, 1992. — Proceedings of the International Symposium on Structures in Mathematical Theories. San Sebastian, Spain, 1990. — P. 168–191.

[7] *Adonai S. Sant'Anna.* The definability of physical concepts // Bol. Soc. Parana. Mat. (3s.). — 2005. — **23**, №1-2. — P. 163–175.

[8] *Куратовский К., Мостовский К.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 417 с.

[9] *Биркгоф Г.* Теория решёток. — М.: Наука, 1984. — 567 с.

[10] *Карнаух Т.О., Ставровський А.Б.* Вступ до дискретної математики. — Київ: ВПЦ "Київський університет", 2006. — 109 с.

PRIMITIVE CHANGEABLE SETS AND THEIR PROPERTIES

Yaroslav GRUSHKA

Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 3 Tereshchenkivska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *grushka@imath.kiev.ua*

In the present paper the concept of primitive changeable set is introduced and the properties of these sets are investigated. Primitive changeable sets are necessary to construct the more general theory of changeable sets. Subject of the paper is closely connected with the famous sixth Hilbert problem.