УЗАГАЛЬНЕНЕ РІВНЯННЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА ДЛЯ ГАЗУ ЕНСКОҐА

©*2012 р. Ігор ГАП'ЯК*[1], *Віктор ГЕРАСИМЕНКО*[2]

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 60, Київ 01601
[2] Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ 01601

e-mail: *gapjak@ukr.net, gerasym@imath.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 9 квітня 2012 р.

Побудовано узагальнене кінетичне рівняння Фоккера-Планка, яким описується еволюція стану виділеної частинки в оточенні нескінченного числа частинок, що взаємодіють як пружні кулі. За допомогою методу кінетичних кластерних розкладів кумулянтів груп операторів систем скінченного числа пружних куль встановлено еквівалентність опису еволюції станів на основі узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка і побудованих маргінальних функціоналів від його розв'язку та на основі задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ.

1 Вступ

Однією з відкритих проблем теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок залишається проблема строгого обґрунтування виведення кінетичних рівнянь для виділеної частинки, яка взаємодіє з системою нескінченної кількості частинок, зокрема, кінетичного рівняння Фоккера-Планка і на основі цього пояснити природу стохастичності

УДК: 517.9+531.19+530.145; MSC 2010: 35Q20; 47J35

Ключові слова і фрази: рівняння Фоккера-Планка; ієрархія рівнянь ББГКІ; кумулянт груп операторів; газ Енскоґа

систем статистичної механіки [1]. Відзначимо також широке застосування рівняння Фоккера-Планка до опису кінетичних процесів різноманітної природи [2]–[4].

Як відомо, за допомогою феноменологічних аргументів кінетичне рівняння Фоккера-Планка вперше було сформульовано в роботах [5], [6]. На основі методів теорії збурень один з підходів до строгого обґрунтування кінетичного рівняння Фоккера-Планка бере свої витоки з праць М.М. Боголюбова [7], [8].

В сучасних роботах основний підхід до дослідження зазначеної проблеми ґрунтується на побудові скейлінґової (дифузійної) границі розв'язку еволюційних рівнянь, якими описується еволюція стану виділеної частинки в оточенні частинок (термостаті) [9], зокрема, розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) [10], [11] такої системи, побудованого за допомогою теорії збурень. Строгі результати з обґрунтування кінетичного рівняння Фоккера-Планка в скейлінґовій границі для частинок, які взаємодіють як пружні кулі (газ Енскоґа [12]) отримано в роботах [13], [14]. Огляд строгих результатів для квантових систем частинок наведено в роботі [15].

Мета цієї роботи полягає в математичному описі еволюції стану системи пружних куль, яка складається з виділеної частинки і оточення, а саме, системи нефіксованого числа пружних куль. В роботі побудовано замкнене еволюційне рівняння для функції розподілу виділеної частинки, яке є узагальненням кінетичного рівняння Фоккера-Планка. За допомогою сформульованих кластерних розкладів кумулянтів груп операторів, якими визначається кожний член розкладу непертурбативного розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ системи пружних куль, встановлено, що всі можливі стани системи описуються в термінах маргінальних функціоналів від розв'язку задачі Коші для узагальненого рівняння Фоккера-Планка.

Таким чином, в роботі доведено, що еволюція всіх можливих станів нескінченної системи пружних куль, яка розглядається, може бути описана за допомогою побудованого узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка без будь-яких апроксимацій. Зауважимо, що відомі кінетичні рівняння типу рівняння Фоккера-Планка описують асимптотики розв'язку задачі Коші для узагальненого рівняння Фоккера-Планка в скейлінґових границях.

В роботі також доведено теорему про існування розв'язку узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка в просторі інтегрованих функцій та досліджено його властивості.

2 Еволюція частинки в оточенні системи багатьох частинок

Розглянемо систему багатьох частинок, яка складається із виділеної частинки і оточення — системи нефіксованої кількості частинок. Якщо частинки оточення знаходяться в рівноважному стані, тоді вживається термін — виділена частинка в термостаті [13]. Будемо вважати, що частинки взаємодіють між собою як пружні кулі з діаметром σ. Нехай виділена частинка з масою M характеризується фазовими змінними $(q,p) \equiv x \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, а частинки із оточення мають однакову масу m і характеризуються фазовими координатами $(q_i,p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geq 1$. Для такої системи частинок множина конфігурацій $\mathbb{W}_{1+n} \equiv \big\{(q,q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{R}^{3(1+n)} \big| |q_i - q_j| < \sigma$ хоча б для однієї пари (i,j) : $i \neq j \in (1,\ldots,n)$ та $|q - q_j| < \sigma$, якщо $j \in (1,\ldots,n)\big\}$ є множиною заборонених конфігурацій.

Еволюція всіх можливих станів системи, яка складається із виділеної частинки і системи нефіксованої кількості частинок оточення, описується послідовністю маргінальних ($(1+s)$-частинкових) функцій розподілу $F(t) = (1, F_{1+0}(t,x), F_{1+1}(t,x,x_1), \ldots, F_{1+s}(t,\ x,x_1,\ldots,x_s), \ldots)$, яка є розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ [10]

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1+0}(t) = \mathcal{L}_{1+0} F_{1+0}(t) + \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1 \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1) F_{1+1}(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1+s}(t) = \mathcal{L}_{1+s} F_{1+s}(t) + \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},s+1) F_{1+s+1}(t) + \\ + \sum_{i=1}^{s} \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,s+1) F_{1+s+1}(t),$$

$$F_{1+s}(t)_{|t=0} = F^0_{1+s}, \quad s \geq 0. \tag{2}$$

Якщо $t > 0$, тоді в ієрархії еволюційних рівнянь (1)-(2) оператор $\mathcal{L}_{1+s}$

визначається дужкою Пуассона невзаємодіючих частинок з граничною умовою на границі заборонених конфігурацій $\partial\mathbb{W}_{1+s}$ [10]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+s}F_{1+s}(t) \doteq -\langle \frac{p}{M}, \frac{\partial}{\partial q}\rangle_{|\partial\mathbb{W}_{1+s}} F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s)- \\ -\sum_{i=1}^{s}\langle \frac{p_i}{m}, \frac{\partial}{\partial q_i}\rangle_{|\partial\mathbb{W}_{1+s}} F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s), \quad s\geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

де символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено скалярний добуток. Оператори $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,s+1)$ і $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},s+1)$ визначаються відповідно такими формулами:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{s}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{s+1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(i,s+1)F_{1+s+1}(t) \doteq \\ &\quad \doteq \sigma^2\sum_{i=1}^{s}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_+} dp_{s+1}d\eta\,\langle\eta,(\frac{p_i}{m}-\frac{p_{s+1}}{m})\rangle\times \\ &\quad \times\big(F_{1+s+1}(t,x,x_1,\ldots,q_i,p_i^\star,\ldots,x_s,q_i-\sigma\eta,p_{s+1}^\star)- \\ &\quad - F_{1+s+1}(t,x,x_1,\ldots,x_s,q_i+\sigma\eta,p_{s+1})\big), \quad s\geq 1, \\ &\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_{s+1}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},s+1)F_{1+s+1}(t) \doteq \\ &\quad \doteq \sigma^2\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}} dp_{s+1}d\eta\,\langle\eta,(\frac{p}{M}-\frac{p_{s+1}}{m})\rangle\times \\ &\quad \times\big(F_{1+s+1}(t,q,p^*,x_1,\ldots,x_s,q-\sigma\eta,p_{s+1}^*)- \\ &\quad - F_{1+s+1}(t,x,x_1,\ldots,x_s,q+\sigma\eta,p_{s+1})\big), \quad s\geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\mathbb{S}^2_+ \doteq \{\eta\in\mathbb{R}^3 \big| |\eta|=1, \langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle>0\}$ і $\mathbb{S}^2_{0,+} \doteq \{\eta\in\mathbb{R}^3 \big| |\eta|=1, \langle\eta,(mp-Mp_{s+1})\rangle>0\}$. Імпульси $p_i^\star$, $p_{s+1}^\star$ і p^*, p_{s+1}^* визначаються відповідно такими виразами:

$$\begin{aligned} &p_i^\star \doteq p_i-\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle\,, \\ &p_{s+1}^\star \doteq p_{s+1}+\eta\,\langle\eta,(p_i-p_{s+1})\rangle\,; \\ &p^* \doteq p-\frac{2Mm}{M+m}\eta\,\langle\eta,(\frac{p}{M}-\frac{p_{s+1}}{m})\rangle, \\ &p_{s+1}^* \doteq p_{s+1}+\frac{2Mm}{M+m}\eta\,\langle\eta,(\frac{p}{M}-\frac{p_{s+1}}{m})\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

Для $t < 0$ генератор ієрархії рівнянь ББГКІ визначається відповідним оператором [10].

Надалі будемо розглядати початкові дані (2) для яких стани виділеної частинки і оточення є статистично незалежними, тобто в початковий момент часу для маргінальних функцій розподілу виконується така умова (умова хаосу [10])

$$F_{1+s}(t)_{|t=0} = F^0_{1+0}(x)F^0_{0+s}(x_1,\ldots,x_s)\prod_{i=1}^{s}\mathcal{X}_2(q,q_i), \quad s \geq 0, \tag{6}$$

де $\mathcal{X}_2(q,q_i)$ — функція Хевісайда дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2$ двох пружних куль.

Для визначення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (1), (6) наведемо необхідні для цього поняття. Нехай $L^1_{1+n} \equiv L^1(\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}))$ — простір функцій f_{1+n} визначених на фазовому просторі $1+n$ частинок, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1,\ldots,x_n$ і не симетричними відносно перестановок аргументу x та аргументів $x_1,\ldots,x_n$, дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій $\mathbb{W}_{1+n}$, з такою нормою: $\|f_{1+n}\| = \int dx dx_1 \ldots dx_n |f_{1+n}(x,x_1,\ \ldots,x_n)|$. Підпростору $L^1_{1+n,0} \subset L^1_{1+n}$ належать неперервно диференційовані функції з компактними носіями.

В просторі L^1_{1+n} визначена така група сильно неперервних операторів:

$$S_{1+n}(t,\mathfrak{t},1,\ldots,n)f_{1+n}(x,x_1,\ldots,x_n) \doteq \tag{7}$$
$$\doteq \begin{cases} f_{1+n}\big(\mathtt{X}(t,x,x_1,\ldots,x_n),\mathtt{X}_1(t,x,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\mathtt{X}_n(t,x,x_1,\ldots,x_n)\big), \\ \qquad\qquad (x,x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n})) \setminus \mathcal{M}^0_{1+n}, \\ 0, \qquad\quad (q,q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{W}_{1+n}, \end{cases}$$

де $\mathtt{X}_i(t)$ — фазова траєкторія i-ї частинки оточення і $\mathtt{X}(t)$ — фазова траєкторія виділеної частинки [11]. Зауважимо, що фазові траєкторії системи пружних куль визначено не для всіх початкових даних (множина $\mathcal{M}^0_{1+n}$ [11]), а майже скрізь на фазовому просторі $(\mathbb{R}^{3(1+n)} \times (\mathbb{R}^{3(1+n)} \setminus \mathbb{W}_{1+n}))$. Генератор ізометричної групи еволюційних операторів (7) співпадає з оператором Ліувілля (3).

Якщо $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+s} \in L^1(\mathbb{R}^{3s} \times (\mathbb{R}^{3s} \setminus \mathbb{W}_s))$, то непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (1),

(6) є послідовністю функцій розподілу $F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s)$, $s\geq 0$, які зображуються такими розвиненнями [16]:

$$F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s)=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)F^0_{1+0}(x)\times\\ \times F^0_{0+s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})\prod_{i=1}^{s+n}\mathcal{X}_2(q,q_i), \tag{8}$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$ — кумулянт $(n+1)$-го порядку груп операторів (7)

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)=\\ =\sum_{\mathtt{P}:\,(\{\mathfrak{t},Y\},\,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathtt{P}}S_{|\theta(X_i)|}(-t,\theta(X_i)), \tag{9}$$

і використано такі позначення: $\{\mathfrak{t},Y\}$ — множина, яка складається з одного елемента $(\mathfrak{t},Y)$, де $Y\equiv(1,\ldots,s)$, тобто $|\{\mathfrak{t},Y\}|=1$, $\sum_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями $\mathtt{P}$ множини $(\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)\equiv(\{\mathfrak{t},Y\},s+1,\ldots,s+n)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\in(\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)$, які взаємно не перетинаються, θ — відображення декластиризації, яке визначається згідно формули: $\theta(\{Y\},X\setminus Y)=X$.

Нехай $F^0_{1+0}\in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ і початкові функції розподілу оточення належить класу інтегрованих функцій таких, що $\sup_{n\geq 0}\alpha^{-n}\|F^0_{0+n}\|_{L^1_n}<+\infty$, де $\alpha>0$ — параметр. Тоді за умови: $\alpha<e^{-1}$, ряд (8) збігається за нормою простору L^0_{1+s} для довільного $t\in\mathbb{R}^1$. Якщо $F^0_{1+0}\in L^1_{1,0}$ і $F^0_{0+s+n}\in L^1_{s+n,0}$, послідовність функцій розподілу (8) — сильний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (1),(6) і для довільних початкових даних — це слабкий розв'язок [16].

Еволюційні рівняння (1) для одновимірного газу Енскоґа досліджено в роботі [17].

Оскільки при кінетичному описі еволюції виділеної частинки її початкові стани характеризуються одночастинковою функцією розподілу, задача Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ не є цілком визначеною початковою задачею, тому що початкові дані для кожної невідомої $1+s$-частинкової функції розподілу ($s\geq 1$) не є незалежними. Внаслідок цього природно виникає можливість переформулювати початкову задачу для ієрархії рівнянь ББГКІ як нову задачу Коші для кінетичного рівняння для одночастинкової функції розподілу виділеної частинки і послідовності явно визначених функціоналів від розв'язку такої початкової задачі.

3 Основний результат: узагальнене кінетичне рівняння Фоккера-Планка

Враховуючи те, що початкові дані (6) визначаються одночастинковою функцією розподілу виділеної частинки і послідовністю функцій розподілу оточення на дозволених конфігураціях, тоді стани, які визначаються послідовністю $F(t) = (1, F_{1+0}(t,x),\ F_{1+1}(t,x,x_1), \ldots,$ $F_{1+s}(t,x,\ x_1,\ldots,x_s),\ldots)$ маргінальних функцій розподілу (8), можуть бути представлені в термінах послідовності $F(t \mid F_1(t)) = (1, F_{1+0}(t,x),$ $F_{1+1}(t,x,x_1 \mid F_{1+0}(t)),\ldots,F_{1+s}(t,x,\ x_1,\ldots,x_s \mid F_{1+0}(t)),\ldots)$ маргінальних функціоналів стану $F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s \mid F_{1+0}(t))$, $s \geq 1$, які явно визначаються через розв'язок $F_{1+0}(t,x)$ кінетичного рівняння для виділеної частинки. Еволюційне рівняння для функції розподілу виділеної частинки $F_{1+0}(t,x)$ в роботі названо узагальненим кінетичним рівнянням Фоккера-Планка.

Якщо $t \geq 0$, то функція розподілу виділеної частинки $F_{1+0}(t,x)$ є розв'язком задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_{1+0}(t,x) = -\langle\frac{p}{M},\frac{\partial}{\partial q}\rangle F_{1+0}(t,x)+\\
&+\sigma^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}}dp_1 d\eta\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\ldots dx_{n+1}\langle\eta,\big(\frac{p}{M}-\frac{p_1}{m}\big)\rangle\times\\
&\times\big(\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t}^*,1^*_-\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,q,p^*)-\\
&-\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1_+\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,x)\big),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$F_{1+0}(t,x)|_{t=0} = F^0_{1+0}(x). \tag{11}$$

Твірний еволюційнійний оператор $(1+n)$-го порядку інтегралу зіткнень визначається таким виразом:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t}^\sharp,1^\sharp_\mp\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,q,p^\sharp)\doteq\\
&\doteq n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\ldots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}\frac{1}{(n-m_1-\ldots-m_k)!}\times\\
&\times\mathfrak{A}_{1+n-m_1-\ldots-m_k}(t,\{\mathfrak{t}^\sharp,1^\sharp_\mp\},2,\ldots,1+n-m_1-\ldots-m_k)\times\\
&\times F^0_{0+1+n-m_1-\ldots-m_k}(q\mp\sigma\eta,p^\sharp_1,x_2,\ldots,x_{1+n-m_1-\ldots-m_k})\times\\
&\times\prod_{i_1=2}^{1+n-m_1-\ldots-m_k}\mathcal{X}_2(q,q_{i_1})\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t}^\sharp)\prod_{j=1}^{k}\big(\frac{1}{m_j!}\times\\
&\times\mathfrak{A}_{1+m_j}(-t,\mathfrak{t}^\sharp,2+n-m_j-\ldots-m_k,\ldots,1+n-\\
&-m_{j+1}-\ldots-m_k)F^0_{0+m_j}(x_{2+n-m_j-\ldots-m_k},\ldots,x_{1+n-m_{j+1}-\ldots-m_k})\times\\
&\times\prod_{i_2=2+n-m_j-\ldots-m_k}^{1+n-m_{j+1}-\ldots-m_k}\mathcal{X}_2(q,q_{i_2})\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t}^\sharp)\big)F_{1+0}(t,q,p^\sharp),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

де індекси $(\mathfrak{t}^\sharp,1^\sharp_\mp)$ у кумулянтах груп операторів (7) означають, що еволюційні оператори (7) з такими індексами діють на відповідні фазові точки $(q,p^\sharp)$ і $(q\mp\sigma\eta,p^\sharp_1)$.

Для $t<0$ узагальнене кінетичне рівняння Фоккера-Планка має такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_{1+0}(t,x)=-\langle\frac{p}{M},\frac{\partial}{\partial q}\rangle F_{1+0}(t,x)+\\
&+\sigma^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}}dp_1d\eta\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\ldots dx_{n+1}\langle\eta,\big(\frac{p}{M}-\frac{p_1}{m}\big)\rangle\times\\
&\times\big(\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1_-\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,x)-\\
&-\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t}^*,1^*_+\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,q,p^*)\big),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, визначаються формулою (12).

Маргінальні функціонали стану $F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s|F_{1+0}(t))$ з послідовності $F(t\mid F_1(t))$ зображуються такими розкладами:

$$
\begin{aligned}
&F_{1+s}\big(t,x,x_1,\ldots,x_s\mid F_1(t)\big)\doteq\\
&\doteq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\,\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)F_{1+0}(t,x),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, визначаються аналогічно до формули (12) і будуть побудовані в наступному розділі.

Зауважимо, що в термінах маргінальних функціоналів стану (14) інтеграл зіткнень узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка зображується у такому вигляді:

$$\mathcal{I}_{GFPE} = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2_{0,+}} dp_1 d\eta \, \langle \eta, (\frac{p}{M} - \frac{p_1}{m}) \rangle \times \tag{15}$$
$$\times \big(F_{1+1}(t, q, p^*, q - \sigma\eta, p_1^* \mid F_{1+0}(t)) - F_{1+1}(t, x, q + \sigma\eta, p_1 \mid F_{1+0}(t)) \big).$$

Таким чином, в наступних розділах буде доведено еквівалентність опису еволюції станів за допомогою задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (1),(6) і задачею Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка (10),(11) та послідовністю маргінальних функціоналів стану (14).

4 Кінетичні кластерні розклади кумулянтів груп операторів

Сформулюємо перетворення для кумулянтів (9) груп операторів (7) пружних куль, які дозволяли б виразити розклади маргінальних функцій розподілу (8) при $s \geq 1$ в термінах розкладу для одночастинкової функції розподілу виділеної частинки.

Визначимо розклади для кумулянтів (9) груп операторів (7) і початкових функцій розподілу оточення (кінетичні кластерні розклади) у такому вигляді:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) F^0_{0+s+n}(x_1, \ldots, x_{s+n}) \prod_{i=1}^{s+n} \mathcal{X}_2(q, q_i) F^0_{1+0}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \mathfrak{V}_{1+n-k}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1, \ldots, s+n-k) \times \tag{16}$$
$$\times \mathfrak{A}_{1+k}(-t, \mathfrak{t}, s+n-k+1, \ldots, s+n) F^0_{0+k}(x_{s+n-k+1}, \ldots, x_{s+n}) \times$$
$$\times \prod_{i=s+n-k+1}^{s+n} \mathcal{X}_2(q, q_i) F^0_{1+0}(x), \quad n \geq 0,$$

де $\mathcal{X}_2(q, q_i)$ — функція Хевісайда дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{W}_2$ двох пружних куль. Відзначимо, що кластерні розклади (16) дозволяють врахувати в кінетичному рівнянні початкові кореляції, які властиві початковим станам (6) системи пружних куль.

Зауважимо, що структура кінетичних кластерних розкладів (16) може бути обґрунтована аналогічно кластерним розкладам, які використані для виведення узагальненого рівняння Енскоґа [18], і є наслідком еквівалентності методів опису станів в термінах розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ (1), тобто послідовності $F(t) = (1, F_{1+0}(t,x), F_{1+1}(t,x,x_1), \ldots, F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s), \ldots)$, та в термінах послідовності $F(t \mid F_{1+0}(t)) = (1, F_{1+0}(t,x), F_{1+1}(t,x,x_1 \mid F_{1+0}(t)), \ldots, F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots, \ldots x_s \mid F_{1+0}(t)), \ldots)$, де $F_{1+0}(t)$ визначається розкладом (8) у випадку $s = 0$, та функціоналів $F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s \mid F_{1+0}(t))$, $s \geq 1$, — маргінальних функціоналів стану (14).

Наведемо приклади сформульованих кінетичних кластерних розкладів (16)

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_1(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}) F^0_{0+s}(x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} \mathcal{X}_2(q, q_i) F^0_{1+0}(x) = \\
&\qquad = \mathfrak{V}_1(t, \{\mathfrak{t}, Y\}) \mathfrak{A}_1(-t, \mathfrak{t}) F^0_{1+0}(x), \\
&\mathfrak{A}_2(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1) F^0_{0+s+1}(x_1, \ldots, x_{s+1}) \prod_{i=1}^{s+1} \mathcal{X}_2(q, q_i) F^0_{1+0}(x) = \\
&\qquad = \mathfrak{V}_2(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1) \mathfrak{A}_1(-t, \mathfrak{t}) F^0_{1+0}(x) + \\
&\qquad + \mathfrak{V}_1(t, \{\mathfrak{t}, Y\}) \mathfrak{A}_2(-t, \mathfrak{t}, s+1) F^0_{0+1}(x_{s+1}) \mathcal{X}_2(q, q_{s+1}) F^0_{1+0}(x).
\end{aligned}$$

Розв'язки наведених рекурентних співвідношень визначаються такими розкладами:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_1(t, \{\mathfrak{t}, Y\}) = \mathfrak{A}_1(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}) F^0_{0+s}(x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} \mathcal{X}_2(q, q_i) \mathfrak{A}_1(t, \mathfrak{t}), \\
&\mathfrak{V}_2(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1) = \\
&\quad = \mathfrak{A}_2(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}, s+1) F^0_{0+s+1}(x_1, \ldots, x_{s+1}) \prod_{i=1}^{s+1} \mathcal{X}_2(q, q_i) \mathfrak{A}_1(t, \mathfrak{t}) - \\
&\quad - \mathfrak{A}_1(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}) F^0_{0+s}(x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} \mathcal{X}_2(q, q_i) \mathfrak{A}_1(t, \mathfrak{t}) \mathfrak{A}_2(-t, \mathfrak{t}, s+1) \times
\end{aligned}$$

$$\times F^0_{0+1}(x_{s+1})\mathcal{X}_2(q,q_{s+1})\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t}).$$

В загальному випадку розв'язок рекурентних співвідношень (16), тобто еволюційний оператор $(1+n)$-го порядку $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geq 0$, зображується таким розкладом ($s \geq 1, n \geq 0$):

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y) \doteq \\
&\doteq n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\ldots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}\frac{1}{(n-m_1-\ldots-m_k)!}\times \\
&\times \mathfrak{A}_{1+n-m_1-\ldots-m_k}(-t,\{\mathfrak{t},Y\},s+1,\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_k)\times \\
&\times F^0_{0+s+n-m_1-\ldots-m_k}(x_1,\ldots,x_{s+n-m_1-\ldots-m_k})\times \\
&\times \prod_{i_1=1}^{s+n-m_1-\ldots-m_k}\mathcal{X}_2(q,q_{i_1})\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t})\prod_{j=1}^{k}\big(\frac{1}{m_j!}\mathfrak{A}_{1+m_j}(-t,\mathfrak{t},s+1+n- \\
&-m_j-\ldots-m_k,\ldots,s+n-m_{j+1}-\ldots-m_k)\times \\
&\times F^0_{0+m_j}(x_{s+1+n-m_j-\ldots-m_k},\ldots,x_{s+n-m_{j+1}-\ldots-m_k})\times \\
&\times \prod_{i_2=s+1+n-m_j-\ldots-m_k}^{s+n-m_{j+1}-\ldots-m_k}\mathcal{X}_2(q,q_{i_2})\mathfrak{A}_1(t,\mathfrak{t})\big).
\end{aligned} \tag{17}$$

Це твердження доводиться за індукцією [18].

Таким чином, твірні еволюційні оператори (17) маргінальних функціоналів стану (14) і, отже, коефіцієнти узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка (10) визначаються початковими кореляціями, пов'язаними зі забороненими конфігураціями пружних куль, і початковим станом частинок оточення, функції розподілу якого грають роль своєрідних кореляцій.

5 Виведення кінетичного рівняння Фоккера-Планка

В цьому розділі за допомогою кінетичних кластерних розкладів (16) кумулянтів груп операторів систем скінченої кількості частинок побудуємо узагальнене кінетичне рівняння Фоккера-Планка (10) для виділеної пружної кулі, яка взаємодіє з випадковою (нефіксованою) кількістю пружних куль оточення.

Оскільки функція розподілу виділеної частинки для початкового стану (6) визначається незалежною початковою функцією розподілу виділеної частинки, встановимо еволюційне рівняння, якому задовольняє така функція, тобто побудуємо еволюційне рівняння для функції розподілу, яка представляється розкладом (8) у випадку $s = 0$,

$$\begin{aligned} F_{1+0}(t,x) = &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_1 \ldots dx_n \, \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n)\times \\ &\times F^0_{1+0}(x) F^0_{0+n}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}(q, q_i), \end{aligned} \tag{18}$$

де використано позначення з формули (9).

Оскільки для кумулянтів (9) груп операторів (7) в сенсі збіжності за нормою простору інтегрованих функцій $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ справедливі такі рівності [16],[19]:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \, \mathfrak{A}_1(-t, \mathfrak{t}) f_{1+0}(x) = \mathcal{L}_{1+0} f_{1+0}(x), \\ &\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1 \, \mathfrak{A}_2(-t, \mathfrak{t}, 1) f_{1+1}(x, x_1) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_2 \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}, 1) f_{1+1}(x, x_1), \\ &\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^{3n}\times\mathbb{R}^{3n}} dx_1 \ldots dx_n \, \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \mathfrak{t}, 1, \ldots, n) f_{1+n}(x, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &n \geq 2, \end{aligned}$$

де $f_{1+k} \in L^1_{1+k,0}$, $k = (0, 1, n)$ і оператори $\mathcal{L}_{1+0}$ і $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}, 1)$ визначаються відповідними формулами (3), тоді в результаті диференціювання за змінною часу виразу (18) в сенсі поточкової збіжності простору $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ отримуємо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} F_{1+0}(t,x) = -\langle \frac{p}{M}, \frac{\partial}{\partial q} \rangle F_{1+0}(t,x) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dx_1 \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}, 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2 \ldots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{\mathfrak{t}, 1\}, \\ &2, \ldots, n+1) F^0_{1+0}(x) F^0_{0+n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} \mathcal{X}_2(q, q_i). \end{aligned} \tag{19}$$

Представимо другий член у правій частині цієї рівності в термінах функції розподілу виділеної частинки (18). Для цього розкладемо кумулянт (9) груп операторів (7) та початкові функції розподілу оточення в кластерний розклад (16) у випадку $s = 1$. В результаті пересумування отриманого виразу за індексами n і k справедлива рівність

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_2\ldots dx_{n+1}\,\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{\mathfrak{t},1\},2,\ldots,n+1)\times\\
&\times F^0_{1+0}(x)F^0_{0+n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\prod_{i=1}^{n+1}\mathcal{X}_2(q,q_i)=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{n+k}} dx_2\ldots dx_{n+1+k}\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1\},\\
&2,\ldots,n+1)\mathfrak{A}_{1+k}(-t,\mathfrak{t},n+2,\ldots,1+n+k)F^0_{1+0}(x)\times\\
&\times F^0_{0+k}(x_{2+n},\ldots,x_{1+n+k})\prod_{i=2+n}^{1+n+k}\mathcal{X}_2(q,q_i).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Остаточно внаслідок рівностей (19) і (20) та згідно означення (3) оператора $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)$ справедлива така рівність:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_{1+0}(t,x)=-\langle\frac{p}{M},\frac{\partial}{\partial q}\rangle F_{1+0}(t,x)+\\
&+\sigma^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}}dp_1d\eta\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\ldots dx_{n+1}\langle\eta,\big(\frac{p}{M}-\frac{p_1}{m}\big)\rangle\times\\
&\times\big(\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t}^*,1^*_-\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,q,p^*)-\\
&-\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},1_+\},2,\ldots,n+1)F_{1+0}(t,x)\big),
\end{aligned}
$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ визначається згідно формули (12). Ряд в правій частині цієї рівності збігається за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ за умови: $\alpha < e^{-4}$, де $\sup_{n\geq 0}\alpha^{-n}\|F^0_{0+n}\|_{L^1_n} < +\infty$ (умова на коефіцієнти інтегралу зіткнень). В наступному розділі такий факт буде доведено в загальному випадку.

Отриману рівність будемо трактувати як еволюційне рівняння для функції розподілу виділеної частинки і будемо називати узагальненим кінетичним рівнянням Фоккера-Планка.

Розглянемо структуру узагальненого фоккер-планківського інтегралу зіткнень (15), а саме, перший член його розкладу

$$\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE}=\sigma^2\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}}dp_1d\eta\langle\eta,\big(\frac{p}{M}-\frac{p_1}{m}\big)\rangle\big(\mathfrak{V}_1(t,\{\mathfrak{t}^*,1^*_-\})F_{1+0}(t,q,p^*)-$$
$$-\mathfrak{V}_1(t,\{\mathfrak{t},1_+\})F_{1+0}(t,x)\big).$$

Оскільки для групи операторів $S_2(-t,\mathfrak{t},1)$ справедливе рівняння Дюамеля [19]

$$S_2(-t,\mathfrak{t},1)f_2(x,x_1)=S_1(-t,\mathfrak{t})S_1(-t,1)f_2(x,x_1)+$$
$$+\int_0^t d\tau S_1(-t+\tau,\mathfrak{t})S_1(-t+\tau,1)\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)S_2(-\tau,\mathfrak{t},1)f_2(x,x_1),$$

де оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1)$ визначається формулою (4) на $f_2\in L^1_{1+1,0}$, тоді вираз $\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE}$ зображується в такій формі:

$$\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE}=\sigma^2\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2_{0,+}}dp_1d\eta\langle\eta,\big(\frac{p}{M}-\frac{p_1}{m}\big)\rangle\times$$
$$\times\Big(S_1(-t,1^*_-)F^0_{0+1}(q-\sigma\eta,p^*_1)F_{1+0}(t,q,p^*)-$$
$$-S_1(-t,1_+)F^0_{0+1}(q+\sigma\eta,p_1)F_{1+0}(t,x)+$$
$$+\int_0^t d\tau\big(S_1(-t+\tau,\mathfrak{t}^*)S_1(-t+\tau,1^*_-)\times$$
$$\times\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t}^*,1^*_-)S_2(-\tau,\mathfrak{t}^*,1^*_-)F^0_{0+1}(q-\sigma\eta,p^*_1)S_1(t,\mathfrak{t}^*)F_{1+0}(t,q,p^*)-$$
$$-S_1(-t+\tau,\mathfrak{t})S_1(-t+\tau,1_+)\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{t},1_+)S_2(-\tau,\mathfrak{t},1_+)\times$$
$$\times F^0_{0+1}(q+\sigma\eta,p_1)S_1(t,\mathfrak{t})F_{1+0}(t,x)\big)\Big).$$

Таким чином, перший член розкладу інтегралу зіткнень $\mathcal{I}^{(0)}_{GFPE}$ узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка формально співпадає з інтегралом зіткнень кінетичного рівняння Фоккера-Планка, побудованого в роботі Боголюбова [1] методами теорії збурень.

Зауважимо, що в марківській апроксимації узагальнений фоккерпланківський інтеграл зіткнень в просторово однорідному випадку має більш загальну структуру ніж канонічний інтеграл зіткнень рівняння Фоккера-Планка [4].

Нехай $F^0_{1+0}\in L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ і початкові функції розподілу оточення належить класу інтегрованих функцій таких, що $\sup_{n\geq 0}\alpha^{-n}\|F^0_{0+n}\|_{L^1_n}$

$< +\infty$, де $\alpha > 0$ — параметр (інтерпретується як густина системи [16]). Тоді для розв'язку задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка (10),(11) в просторі $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Якщо $\alpha < e^{-4}$, то для $t \in \mathbb{R}$ розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння Фоккера-Планка* $(10),(11)$ $\big((13),(11)\big)$ *визначається таким розвиненням:*

$$F_{1+0}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_1 \dots dx_n \, \mathfrak{A}_{1+n}(-t) F^0_{1+0}(x) \times \\ \times F^0_{0+n}(x_1,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_2(q,q_i), \tag{21}$$

де оператори $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$, $n \geq 0$, — кумулянти (9) *груп операторів* (7)*. Для початкових даних $F^0_{1+0} \in L^1_0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+n} \in L^1_0(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ формулою* (21) *визначається сильний (класичний) розв'язок, а для довільних початкових даних $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і $F^0_{0+n} \in L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ — це слабкий (узагальнений) розв'язок.*

Ідея доведення цієї теореми аналогічна доведенню теореми про існування розв'язку у випадку узагальненого кінетичного рівняння Енскоґа [18],[20].

6 Маргінальні функціонали стану

Послідовність маргінальних функцій розподілу (8) у випадку $s \geq 1$ представимо за допомогою кінетичних кластерних розкладів (16) у формі функціоналу відносно функції розподілу виділеної частинки (21).

Дійсно, використовуючи розклади (16) кумулянтів (9) із виразів (8) у випадку $s \geq 1$, в результаті пересумування за індексами сумування n і k справедлива така рівність:

$$F_{1+s}(t,x,x_1,\dots,x_s) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \, \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) F^0_{1+0}(x) \times$$

$$\times F^0_{0+s+n}(x_1,\ldots,x_{s+n})\prod_{i=1}^{s+n}\mathcal{X}_2(q,q_i)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\,\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^k}dx_{s+n+1}\ldots dx_{s+n+k}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\mathfrak{t},$$

$$s+n+1,\ldots,s+n+k)F^0_{1+0}(x)F^0_{0+k}(x_{s+n+1},\ldots,x_{s+n+k})\prod_{i=s+n+1}^{s+n+k}\mathcal{X}_2(q,q_i).$$

Враховуючи в отриманому виразі означення (18) функції розподілу $F_{1+0}(t,x)$, остаточно встановлюємо рівності

$$F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\,\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{\mathfrak{t},Y\},X\setminus Y)F_{1+0}(t,x)=$$

$$=F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s|F_{1+0}(t)),\quad s\geq 1,$$

де $(1+n)$-го порядку твірний еволюційний оператор $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ визначається згідно формули (17) як розв'язок кластерних розкладів (16).

Таким чином, вище фактично доведено, що за умов, при яких існують функціонали (14), маргінальні функції розподілу (8) у випадку $s\geq 1$ і маргінальні функціонали стану (14) еквівалентні тоді і тільки тоді, якщо твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)$, $n\geq 0$, задовольняють кінетичним кластерним розкладам (16).

Зауважимо, що за допомогою маргінальних функціоналів стану (14) визначаються середні значення (математичні сподівання) спостережуваних. Наприклад, середнє значення $(1+s)$-арної маргінальної спостережуваної $B^{(1+s)}=(0,\ldots,0,b_{1+s}(x,x_1,\ldots,x_{1+s}),\,0,\ldots)$ визначається за формулою [10]

$$\langle B^{(1+s)}\rangle(t)=\frac{1}{(1+s)!}\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{1+s}}dxdx_1\ldots dx_s b_{1+s}(x,x_1,\ldots,x_s)\times$$

$$\times F_{1+s}(t,x,x_1,\ldots,x_s\mid F_{1+0}(t)),$$

де функція розподілу $F_{1+0}(t,x)$ — розв'язок задачі Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка (10),(11) $\big((13),(11)\big)$.

Підкреслимо, що побудовані функціонали від розв'язку узагальненого кінетичне рівняння Фоккера-Планка фактично описують усі можливі кореляції, які виникають в процесі кінетичної еволюції виділеної пружної кулі в оточенні нескінченної кількості пружних куль.

Встановимо умову збіжності рядів (14) для маргінальних функціоналів стану. Нехай $F^0_{1+0} \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ і початкові функції розподілу оточення належить класу інтегрованих функцій таких, що $c \equiv \sup_{n\geq 0} \alpha^{-n} \|F^0_{0+n}\|_{L^1_n} < +\infty$, де $\alpha > 0$ — параметр, який інтерпретується як густина системи [16].

Оскільки для кумулянтів (9) груп операторів (7) системи пружних куль має місце оцінка [16]

$$\int dx dx_1 \ldots dx_{s+n} \big|(\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) f_{1+s+n})(x, x_1, \ldots, x_{s+n})\big| \leq$$
$$\leq n! e^{n+2} \big\|f_{1+s+n}\big\|_{L^1_{1+s+n}},$$

тоді для $(1+n)$-го порядку твірного еволюційного оператора (17) справедлива така нерівність:

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{1+s+n}} dx dx_1 \ldots dx_{s+n} \big|\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{\mathfrak{t}, Y\}, X \setminus Y) F_{1+0}(t, x)\big| \leq$$
$$\leq n! c^2 \alpha^s \big\|F_{1+0}(t)\big\|_{L^1_1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m_1=1}^{n} \ldots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}} e^{n-m_1-\ldots-m_k+2} \times$$
$$\times \alpha^{n-m_1-\ldots-m_k} \prod_{j=1}^{k} e^{m_j+2} \alpha^{m_j} =$$
$$= n! c^2 \alpha^s \big\|F_{1+0}(t)\big\|_{L^1_1} e^{n+2} \alpha^n \sum_{k=0}^{n} e^{2k} \sum_{m_1=1}^{n} \ldots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}} 1.$$

Внаслідок останньої нерівності і справедливості оцінки

$$\sum_{m_1=1}^{n} \ldots \sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}} 1 = \frac{(n-k+1)\ldots(n-1)n}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq e^n,$$

для маргінального функціоналу стану (14) справедлива така оцінка:

$$\big\|F_{1+s}\big(t \mid F_{1+0}(t)\big)\big\|_{L^1_{1+s}} \leq \big\|F_{1+0}(t)\big\|_{L^1_1} c^2 e^2 \alpha^s \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n} \alpha^n \sum_{k=0}^{n} e^{2k} =$$

$$= \big\|F_{1+0}(t)\big\|_{L^1_1} c^2 e^2 \alpha^s \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n} \alpha^n \frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2} \leq \big\|F_{1+0}(t)\big\|_{L^1_1} c^2 e^3 \alpha^s \sum_{n=0}^{\infty} (e^4\alpha)^n.$$

В результаті ряд (14) збігається за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^{3(s+1)} \times \mathbb{R}^{3(s+1)})$, якщо $\alpha < e^{-4}$.

Таким чином, в цьому і попередньому розділах доведено основний результат роботи, а саме, якщо початковий стан визначається послідовністю функцій розподілу (6), тоді задача Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ виділеної частинки та оточення, які взаємодіють як пружні кулі, в просторі інтегрованих функцій еквівалентна задачі Коші для узагальненого рівняння Фоккера-Планка і послідовності явно визначених маргінальних функціоналів стану.

7 Висновки

Для системи пружних куль, яка складається з виділеної частинки і оточення, доведено еквівалентність опису еволюції станів за допомогою задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (1),(6) і задачею Коші для узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка (10) та послідовністю явно визначених маргінальних функціоналів (14) від розв'язку такого кінетичного рівняння. Таким чином, встановлено, що на узагальненому кінетичному рівнянні Фоккера-Планка (10) ґрунтується альтернативний підхід до опису еволюції станів виділеної частинки в оточенні системи багатьох частинок.

Маргінальні функціонали стану (14) описують усі можливі кореляції, які виникають в процесі еволюції виділеної частинки, взаємодіючої з нескінченною кількістю частинок (пружних куль).

Зауважимо, що стани частинок з оточення, які характеризуються інтегрованими функціями, описують системи скінченої середньої кількості частинок. Для опису еволюції станів виділеної частинки в оточенні системи нескінченної кількості частинок розв'язок (21) узагальненого кінетичного рівняння Фоккера-Планка (10) має бути обґрунтований для початкових даних частинок оточення, які належать до більш загальних банахових просторів, наприклад, простору обмежених функцій, якому належать рівноважні стани [10]. В цьому випадку кожний член розкладу для розв'язку (21) і для маргінальних функціоналів стану (14) містить розбіжні інтеграли [10]. Встановлена кумулянтна (9) структура розв'язку узагальненого рівняння Фоккера-Планка і твірних еволюційних операторів (17) маргінальних функціоналів стану дозволяють в цьому випадку регуляризувати відповідні розбіжні вирази.

Розвинутий підхід може бути застосований до проблеми виведення кінетичних рівнянь немарківського типу з динаміки систем багатьох частинок, які дозволяють описати ефекти пам'яті дифузійного руху макроскопічних частинок в рідинах або в плазмових системах.

[1] *Боголюбов Н.Н.* О стохастических процессах в динамических системах // Физика елементарных частиц и атомного ядра — 1978. — **9**, Вып.4. — С. 501–579.

[2] *Chandrasekhar S.* Stochastic Problems in Physics and Astronomy // Rev. Mod. Phys. — 1943. **15**. — P. 1–89.

[3] *Климонтович Ю.Л.* Нелинейное броуновское движение // Успехи физ. н. — 1994. — **164**, №8. — С. 811–844.

[4] *Risken H.* The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications. — Springer; 3rd ed., 1996. — 488 p.

[5] *Fokker A. D.* Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld // Ann. Phys. — 1914. — **43**. — P. 810–820.

[6] *Planck M.* Ueber einen Satz der statistichen Dynamik und eine Erweiterung in der Quantumtheorie // Sitzungberichte der Preussischen Akadademie der Wissenschaften — 1917. — P. 324–341.

[7] *Крилов М.М., Боголюбов М.М.* Про рівняння Фоккера-Планка, що виводяться в теорії пертирбацій методом, основаним на спеціаль-

них властивостях пертирбаційного гамільтоніана // Записки кафедри математичної фізики Інституту буд. механіки АН УРСР. — 1939. — **4**. — С. 5–80.

[8] *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. — К.: Изд-во АН УССР, 1945. — 139 с.

[9] *Spohn H.* Large Scale Dynamics of Interacting Particles. — Springer, 1991. — 350 p.

[10] *Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya.* Many-particle Dynamics and Kinetic Equations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 252 p.

[11] *Петрина Д.Я., Герасименко В.И.* Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // Успехи мат. н. — 1990. — **45**, Вып. 3. — С. 135–182.

[12] *Bellomo N., Lachowicz M., Polewczak J., Toscani G.* Mathematical topics in nonlinear kinetic theory II: the Enskog equation. — Singapore: World Sci., 1991. — 224 p.

[13] *Лебовиц Л., Синай Я., Чернов Н.* Динамика масивного поршня, погруженного в идеальный газ // Успехи мат. н. — 2002. — **57**, Вып. 6. — С. 3–85.

[14] *Синай Я.Г.* Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц // ТМФ. — 1999. — **121**, №1. — С. 110–116.

[15] *Erdös L.* Classical and quantum Brownian motion // Ann. Henri Poincaré. — 2007. — **8**, — P. 621–685.

[16] *Gerasimenko V.I., Ryabukha T.V., Stashenko M.O.* On the structure of expansions for the BBGKY Hierarchy Solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — **37**, №42. — P. 9861–9872.

[17] *Гап'як І.В.* Динаміка виділеної частинки в нескінченночастинковій системі // Вісник Київського нац. універ. Математика. Механіка. — 2011. — №26. — С. 10–17.

[18] *Gapyak I.V., Gerasimenko V.I.* On rigorous derivation of the Enskog kinetic equation // arXiv:1107.5572. — 2011. — 28 p.

[19] *Petrina D.Ya.* Stochastic Dynamics and Boltzmann Hierarchy. — Kyiv: Inst. of Mathematics, 2008. — 338 p.

[20] *Гап'як І.В., Герасименко В.І.* Узагальнене кінетичне рівняння Енскоґа // Допов. НАН України. — 2012. — №3. — С. 7–13.

THE GENERALIZED FOKKER-PLANCK EQUATION FOR THE ENSKOG GAS

Igor GAPYAK[1], *Viktor GERASIMENKO*[2]

[1] Taras Shevchenko National University
60 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine
[2] Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3 Tereshchenkivska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *gapjak@ukr.net, gerasym@imath.kiev.ua*

The generalized Fokker-Planck kinetic equation for the trace particle, interacting with infinite particle surroundings as hard spheres, is constructed. Using the method of kinetic cluster expansions of the cumulants of groups of the operators of finitely many hard spheres, we establish an equivalence of the description of the evolution of states by the generalized Fokker-Planck kinetic equation and constructed marginal functionals of its solution and by the Cauchy problem of the BBGKY hierarchy.