ФІНАЛЬНО НЕПЕРЕРВНІ РОЗРИВНІ ФУНКЦІЇ НА ІНДУКТИВНИХ ГРАНИЦЯХ

©2012 р. Оксана ГАЙДУКЕВИЧ-РАТУШНА,
Володимир МАСЛЮЧЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського 2, Чернівці 58012

e-mail: *mathan@chnu.cv.ua*

Редакція отримала статтю 4 травня 2012 р.

На просторі $\mathcal{K} = \operatorname{limind} \mathcal{K}_n$ всіх неперервних фінітних функцій $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ побудовано розривну функцію $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, звуження якої на кожен компакт K в $\mathcal{K}$ неперервне.

1 Вступ

У праці [1] відома теорема Скорца-Драґоні була перенесена на функції Каратеодорі $f\colon T \times X \to Y$, де T — простір із скінченною регулярною борелівською мірою μ, а X — пряма границя послідовності просторів X_n з другою аксіомою зліченності. Частинний випадок цього результату, коли X — це простір $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей, було розглянуто у праці [2]. Розвиток результату з [1] (але тільки для радонових мір) подав у праці [3] А. Бузіад, який отримав аналог теореми Скорца-Драґоні у тому випадку, коли X — це $k_\mathbb{R}$-простір і $\aleph_0$-простір. Зокрема, під дію результату Бузіада підпадають прямі границі послідовностей метризовних сепарабельних просторів X_n [3, зауваження 3.5], а значить, і простір $\mathbb{R}^\infty$.

УДК: 515.98, 517.51; MSC 2010: 54C10, 26B05
Ключові слова і фрази: неперервна фінітна функція, фінально неперервна розривна функція

Простір $\mathcal{K}$ фінітних неперервних функцій $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [4, с. 49] є строгою індуктивною границею послідовності сепарабельних банахових просторів $\mathcal{K}_n = \{x \in \mathcal{K} : \operatorname{supp} x \subseteq [-n; n]\}$ з максимум-нормою. Але ця границя не є прямою [5], а отже, він не підпадає під дію результату з [1]. Після виходу праці [3] постало природне питання: чи підпадає простір $\mathcal{K}$ під дію результату Бузіада з [3]? Виявляється, що ні. Доведення цього факту і є предметом даної публікації. Ми показуємо, що $\mathcal{K}$ не є $k_{\mathbb{R}}$-простором, будуючи приклад розривної функції $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, звуження $f|_K$ якої на кожний компактний підпростір K простору $\mathcal{K}$ неперервне. Насправді ми отримуємо загальніший результат, де замість $\mathcal{K}$ фігурують індуктивні границі $X = \operatorname{limind} X_n$ певного типу.

2 Одна властивість ε-відокремних множин

Підмножина S метричного простору (X, d) називається *ε-відокремною*, якщо для довільних різних s і t з множини S виконується нерівність $d(s,t) \geq \varepsilon$.

Лема 2.1. *Нехай (X, d) — метричний простір, F — зліченна підмножина X, причому $F = A \sqcup B$, де множина A скінченна, а B δ-відокремна. Тоді і вся множина F є ε-відокремною для деякого $\varepsilon > 0$.*

Доведення. Нехай $A = \{x_1, \dots, x_N\}$, $B = \{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$, причому $x_m \neq x_n$ при $m \neq n$. Покажемо, що для довільного $k \in \{1, \dots, N\}$ існує $\varepsilon_k > 0$ таке, що для довільного $n \neq k$ виконується нерівність $d(x_n, x_k) \geq \varepsilon_k$. Нехай це не так, тобто знайдеться такий номер $k = 1, \dots, N$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $n \neq k$, що $d(x_n, x_k) < \varepsilon$. Розглянемо додатне число $\delta_k = \min\{d(x_n, x_k) : n \leq N, n \neq k\}$ і покладемо $\eta_j = \dfrac{\delta_k}{2^j}$. За припущенням, для кожного $j \in \mathbb{N}$ існує такий номер $n_j \neq k$, що $d(x_{n_j}, x_k) < \eta_j$. Оскільки $\eta_j < \delta_k$, то $n_j > N$ для будь-якого j. З іншого боку, $\eta_j \to 0$ при $j \to \infty$, а $d(x_{n_j}, x_k) < \eta_j$ для кожного j. Тому і $d(x_{n_j}, x_k) \to 0$, а значить, $x_{n_j} \to x_k$. Звідси випливає, що і $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \to 0$ при $i, j \to \infty$, адже $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, x_k) + d(x_{n_j}, x_k)$. В такому разі, існує такий номер j_0, що $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \delta$ для довільних $i, j \geq j_0$. Але це суперечить тому, що множина B є δ-відокремною. Отже, наше припущення не вірне.

Покладемо $\varepsilon = \min\{\delta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}$. Тоді $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ при $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Справді, візьмемо такі довільні m і n, що $m \neq n$. Якщо $n \leq N$, то $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_n \geq \varepsilon$. Так само, якщо $m \leq N$, то $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_m \geq \varepsilon$. Якщо ж m і $n > N$, то $d(x_m, x_n) \geq \delta \geq \varepsilon$. □

3 Побудова дискретних сімей куль

Нехай X — топологічний простір. Нагадаємо, що сім'я $(A_s)_{s \in S}$ множин A з X називається *дискретною*, якщо для довільної точки $x \in X$ існує такий окіл U цієї точки, що множина $\{s \in S : A_s \cap U \neq \varnothing\}$ складається не більше, ніж з одного елемента.

Для метричного простору (X, d) символом $U_\delta(x_0)$ будемо позначати відкриту кулю з центром в точці x_0 радіуса δ. Крім того, $d(x, E) = \inf\limits_{u \in E} d(x, u)$ — це відстань від точки x до непорожньої множини E в X.

Лема 3.1. *Нехай (X, d) — метричний простір, S — ε-відокремна підмножина X і E — замкнена в X множина така, що $S \cap E = \varnothing$. Тоді існує така дискретна сім'я куль $(U_{\delta_s}(s) : s \in S)$, що її тіло $G = \bigcup\limits_{s \in S} U_{\delta_s}(s)$ не перетинається з множиною E.*

Доведення. Оскільки множина E замкнена і $S \cap E = \varnothing$, то для кожного $s \in S$ маємо, що $d(s, E) > 0$. Покладемо $\delta_s = \min\left\{d(s, E), \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$. Покажемо, що сім'я $(U_{\delta_s}(s) : s \in S)$ шукана.

Позначимо $U_s = U_{\delta_s}(s)$ і $\eta = \dfrac{\varepsilon}{4}$. Візьмемо довільне $x \in X$ і припустимо, що $U_\eta(x) \cap U_s \neq \varnothing$ і $U_\eta(x) \cap U_t \neq \varnothing$ для деяких s, $t \in S$, $s \neq t$. Тоді існують елементи $y \in U_\eta(x) \cap U_s$ і $z \in U_\eta(x) \cap U_t$. В такому разі

$$d(s, t) \leq d(s, y) + d(y, x) + d(x, z) + d(z, t) < \delta_s + \eta + \eta + \delta_t \leq 4\eta = \varepsilon,$$

що суперечить ε-відокремності множини S. Таким чином, окіл $U_\eta(x)$ точки x може перетинатися з множиною U_s щонайбільше для одного індексу s, що і дає нам дискретність сім'ї $(U_s : s \in S)$.

Візьмемо довільне $s \in S$ і покажемо, що $U_s \cap E = \varnothing$. Справді, для кожного $x \in E$ маємо, що $d(s, x) \geq d(s, E) \geq \delta_s$, а для $x \in U_s$ маємо, що $d(s, x) < \delta_s$, звідки бачимо, що $U_s \cap E = \varnothing$. Тому і $G \cap E = \varnothing$. □

4 Фінально замкнені множини в індуктивних границях

Нагадаємо деякі означення щодо індуктивних границь [4, §5]. Нехай X — векторний простір над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел і $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, де $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність лінійних підпросторів простору X. Нехай на кожному просторі X_n задано локально опуклу топологію $\mathcal{T}_n$. Розглянемо послідовінсть тотожних вкладень $j_n\colon X_n \to X$. Ця послідовність породжує на X дві природні топології: *фінальну топологію* $\mathcal{S}$, яка є найсильнішою з усіх топологій на X, для яких всі відображення j_n є неперервними, і *індуктивну топологію* $\mathcal{T}$, яка є найсильнішою з локально опуклих топологій на X, для яких всі відображення j_n є неперервними. Топологія $\mathcal{S}$ складається з усіх тих підмножин G простору X, що $G \cap X_n$ — відкрита множина в $(X_n, \mathcal{T}_n)$ для кожного n. Такі множини ми називатимемо *фінально відкритими*, а їх доповнення — *фінально замкненими*. Простір $(X, \mathcal{S})$ називається *прямою границею* послідовності просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$. Локально опуклий простір $(X, \mathcal{T})$ називається *індуктивною границею* послідовності просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, а у випадку, коли $\mathcal{T}_{n+1}|_{X_n} = \mathcal{T}_n$ — *строгою індуктивною границею.*

Теорема 4.1. *Нехай X — векторний простір над полем $\mathbb{K}$, який є об'єднанням строго зростаючої послідовності своїх лінійних підпросторів X_n, $\|\cdot\|$ — норма на X, $\|\cdot\|_n$ — звуження норми $\|\cdot\|$ на X_n, $\mathcal{T}_n$ — топологія на X_n, породжена нормою $\|\cdot\|_n$, $\mathcal{T}$ — відповідна індуктивна топологія на X, і простір X_1 нескінченновимірний. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують число $\varepsilon_n > 0$ і ε_n-відокремна множина F_n в нормованому просторі X_{n+1} такі, що $F_n \subseteq X_{n+1} \setminus X_n$, $0 \notin F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ і $0 \in \overline{F}$, де $\overline{F}$ — замикання множини F у просторі $(X, \mathcal{T})$.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 1 [5], для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ візьмемо такий елемент $x_n \in X_{n+1} \setminus X_n$, що $\|x_n\| = 1$. В нескінченновимірному просторі X_1 за лемою Рісса існує послідовність елементів $x_{1,k}$ така, що $\|x_{1,k}\| = 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $\|x_{1,k} - x_{1,j}\| \geq 1/2$ при $k \neq j$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ покладемо $x_{n,k} = (1/n)x_{1,k}$, $y_{n,k} = x_{n,k} + (1/k)x_n$

і розглянемо множини $F_n = \{y_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $F_n \subseteq X_{n+1} \setminus X_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що множина F_n є ε_n-відокремною для деякого $\varepsilon_n > 0$. Нехай $N = 8n$. Розглянемо різні номери k і j, які $\geq N$. Тоді

$$\|y_{n,k} - y_{n,j}\| \geq \|x_{n,k} - x_{n,j}\| - \frac{1}{k}\|x_n\| - \frac{1}{j}\|x_n\| \geq 1/(2n) - 1/k - 1/j \geq 1/(4n).$$

Отже, множина $B_n = \{y_{n,k} : k \geq N\}$ є $1/(4n)$-відокремною. Далі, оскільки множина $A_n = F_n \setminus B_n = \{y_{n,k} : k < N\}$ скінченна, то за лемою 2.1 існує таке число $\varepsilon_n > 0$, що множина F_n є ε_n-відокремною. Покладемо $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Оскільки $y_{n,k} \notin X_1$ для довільних номерів n і k, а $0 \in X_1$, то $0 \notin F$. В доведенні теореми 4.1 [5] показано, що 0 належить замиканню $\overline{F}$ множини F у просторі $(X, \mathcal{T})$. Таким чином, множина F шукана. $\square$

Потрібну множину можна будувати трохи інакше. А саме, розглянемо елементи $y_{n,k}$, визначені вище, і покладемо $F_n = \{y_{n,k} : k \geq 8n\}$. Як ми вже зазначали, множина F_n є ε_n-відокремною, де $\varepsilon_n = \dfrac{1}{4n}$. Покладемо $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Як і раніше, $0 \notin F$. Покажемо, що $0 \in \overline{F}$.

Нехай $E = \{e = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} : (\forall k)(\varepsilon_k > 0)\}$. Для кожного n розглянемо одиничну кулю $V_n = \{x \in X_n : \|x\| \leq 1\}$ у просторі X_n. Кожній послідовності $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ покладемо у відповідність множину $U_e = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_1 V_1 + \dots + \varepsilon_n V_n)$. Відомо [4, с. 47], що система $\{U_e : e \in E\}$ утворює базу околів нуля в просторі $(X, \mathcal{T})$. Отже, досить показати, що $U_e \cap F \neq \varnothing$ для кожного $e \in E$.

Візьмемо $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ і знайдемо елемент $x \in U_e \cap F$. Спочатку беремо такий номер m, що $\dfrac{1}{m} \leq \varepsilon_1$. Тоді $x_{m,k} = \dfrac{1}{m} x_{1,k} \in \varepsilon_1 V_1$ для кожного k. Далі візьмемо такий номер $j > 8m$, що $\dfrac{1}{j} \leq \varepsilon_m$. Тоді, очевидно, $\dfrac{1}{j} x_m \in \varepsilon_m V_m$. В такому разі $y_{m,j} = \frac{1}{m} x_{1,j} + \frac{1}{j} x_m \in \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_m V_m \subseteq U_e$. Разом з тим $y_{m,j} \in F_m \subseteq F$, отже, елемент $x = y_{m,j}$ і є шуканим. Тому $U_e \cap F \neq \varnothing$.

5 Фінально неперервні розривні функції

Нехай X — індуктивна границя послідовності своїх підпросторів X_n. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається *фінально неперервною*, якщо всі її звуження $f|_{X_n}$ неперервні.

Теорема 5.1. *Нехай векторний простір X, норма $\|\cdot\|$ на X, і послідовність його підпросторів X_n — такі ж, як і в теоремі* 4.1*, причому простори X_n замкнені в нормованому просторі $(X, \|\cdot\|)$. Тоді на індуктивній границі $(X, \mathcal{T})$ існує фінально неперервна розривна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність ε_n-відокремних множин, побудована в теоремі 4.1, і $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Оскільки $F_n \subseteq X_{n+1} \setminus X_n$, то $F_n \cap X_n = \varnothing$ для кожного n. Так само, $0 \notin F_n$ для кожного n. Розглянемо метрику $d(x,y) = \|x - y\|$ на просторі X. Застосовуючи лему 3.1 до ε_n-відокремної множини $S = F_n$ і замкненої множини $E = X_n$, визначимо для кожного номера n таку дискретну сім'ю відкритих куль $U_{n,s} = U_{\delta_{n,s}}(s)$ у метричному просторі (X, d), де s пробігає множину F_n, що її тіло $G_n = \bigcup\limits_{s \in F_n} U_{n,s}$ не перетинається з множиною X_n. Далі, на метричному просторі (X, d) для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $s \in F_n$ побудуємо таку неперервну функцію $\varphi_{n,s}\colon X \to [0;1]$, що $\varphi_{n,s}(s) = 1$ і $\varphi_{n,s}(x) = 0$, якщо $x \in X \setminus U_{n,s}$. Для $x \in X$ покладемо $f_n(x) = \sum\limits_{s \in F_n} \varphi_{n,s}(x)$. Покажемо, що функція $f_n\colon X \to [0;1]$ визначена і неперервна на метричному просторі (X, d). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$. Оскільки сім'я $(U_{n,s} : s \in F_n)$ дискретна, то існує окіл U точки x_0, який перетинається щонайбільше з однією множиною з цієї сім'ї. Якщо маємо $U \cap U_{n,s} \neq \varnothing$ для деякого $s \in F_n$, то $U \cap U_{n,t} = \varnothing$ при $t \neq s$, отже, $f_n(x) = \varphi_{n,s}(x)$ на U. Таким чином, f визначена в U і $f_n|_U = \varphi_{n,s}|_U$. Оскільки U — це окіл точки x_0 і $\varphi_{n,s}$ неперервна на (X, d), то і f_n неперервна в точці x_0. Якщо ж $U \cap G_n = \varnothing$, то $f_n(x) = 0$ на U, отже, і в цьому випадку f_n визначена і неперервна в точці x_0. Зауважимо, що $f_n(x) = 0$ на $X \setminus G_n$, зокрема, $f_n(x) = 0$ на X_n, адже $X_n \subseteq X \setminus G_n$, і $f_n(x) \geq 0$ для кожного $x \in X$. Покладемо $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Покажемо, що f визначена на X. Для довільного $x \in X$ існує такий номер m, що $x \in X_m$. При $n > m$ маємо, що $x \notin G_n$, а отже, $f_n(x) = 0$. Тому $f(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Звуження $f|_{X_n} = (f_1 + \cdots + f_n)|_{X_n}$ неперервне для кожного $n \in \mathbb{N}$ як скінченна сума неперервних функцій, отже, функція f є фінально неперервною. Покажемо, що f розривна в точці $x = 0$. Оскільки $0 \notin G_n$ для кожного номера n, то $f(0) = 0$. Візьмемо довільний окіл нуля U в просторі $(X, \mathcal{T})$. З того, що $0 \in \overline{F}$ отримуємо, що $F \cap U \neq \varnothing$. Нехай $s \in F \cap U$. Існує такий номер $n \in \mathbb{N}$, що $s \in F_n$, звідки $f_n(s) = 1$. Тому $f(s) \geq f_n(s) \geq 1$. Таким чином, ми отримуємо, що в кожному околі U точки 0 існує така точка $s_U \in F \cap U$, що $|f(s_U) - f(0)| = |f(s_U)| \geq 1$, що і дає нам розривність функції f в точці 0. Отже, функція f і є шуканою. □

Нагадаємо, що гаусдорфовий топологічний простір X називається $k_{\mathbb{R}}$-простором, якщо кожна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, звуження якої $f|_K$ на кожний компакт $K \subseteq X$ неперервне, сама є неперервною [6].

Наслідок 5.1. *Простір* $(X, \mathcal{T})$ *з теореми* 5.1 *не є* $k_{\mathbb{R}}$*-простором.*

Доведення. Розглянемо побудовану в теоремі 5.1 фінально неперервну розривну функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$ і візьмемо довільну компактну множину K у локально опуклому просторі $(X, \mathcal{T})$. Ця множина буде обмеженою в топологічному векторному просторі X [4, п. 52, твердження 2 і 3]. Тоді, за теоремою Д'єдонне-Шварца [4, п. 64, т. 3] множина K міститься в деякому дограничному просторі X_n.

Оскільки наша індуктивна границя строга, то, як відомо [4, п. 63, т. 2], звуження $\mathcal{T}|_{X_n}$ індуктивної топології $\mathcal{T}$ на простір X_n збігається з його нормованою топологією $\mathcal{T}_n$, отже, $\mathcal{T}|_K = \mathcal{T}_n|_K$. За побудовою, звуження $f|_{X_n} : (X_n, \mathcal{T}_n) \to \mathbb{R}$ неперервне, отже, таким буде і звуження $f|_K\colon (K, \mathcal{T}|_K) \to \mathbb{R}$. Таким чином, звуження функції f на кожну компактну підмножину простору $(X, \mathcal{T})$ є неперервним, а сама функція f розривна в точці $x = 0$, що і доводить твердження. □

Наслідок 5.2. *Простір* $\mathcal{K} = \operatorname{limind} \mathcal{K}_n$ *фінітних неперервних функцій* $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не є* $k_{\mathbb{R}}$*-простором.*

Доведення. Отримується з наслідку 5.1 при $X = \mathcal{K}$, $X_n = \mathcal{K}_n$ і $\|x\| = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$. □

[1] *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Прямі границі і властивість Скорца-Драґоні // Допов. НАН України. — 2001. — №5. — С. 10–13.

[2] *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К.* Нові узагальнення теореми Скорца-Драґоні // Укр. мат. ж. — 2000. — **52**, №7. — С. 881–888.

[3] *Bouziad A.* Luzin measurability of Caratheodory type mappings // Top. and Appl. — 2007. — **154**. — P. 287–301.

[4] *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. — Чернівці: Рута, 2002. — 72 с.

[5] *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К.* Побудова фінально замкнених і не замкнених множин в індуктивних границях // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. — 2005. — **269**, Математика. — С. 11–12.

[6] *Архангельский А.В.* Об R-факторных отображениях пространств со счетной базой // Докл. АН СССР. — 1986. — **287**, №1. — С. 14–17.

FINALLY CONTINUOUS DISCONTINUOUS FUNCTIONS ON INDUCTIVE LIMITS

Oksana HAIDUKEVYCH-RATUSHNA, Volodymyr MASLYCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubyns'kyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine
e-mail: *mathan@chnu.cv.ua*

We construct a discontinuous function $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ which defined on the space $\mathcal{K} = \operatorname{limind} \mathcal{K}_n$ of all continuous finite functions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that its restriction on each compact K in $\mathcal{K}$ is continuous.