ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СПАРЕНИХ МНОЖИН ЗНАЧЕНЬ ТА СПАРЕНИХ МНОЖИН ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Оксана БАРАН

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060

e-mail: *boe13@ukr.net*

Редакція отримала статтю 10 квітня 2012 р.

Для гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду досліджено деякі властивості спарених множин значень та відповідних їм спарених множин елементів, які є багатовимірними узагальненнями результатів, встановлених Л. Лорентцен для неперервних дробів.

1 Вступ. Основні означення

При дослідженні збіжності неперервних дробів важливе місце займають критерії збіжності, які базуються на множинах значень та відповідних їм множинах елементів. Перші ідеї дослідження збіжності неперервних дробів за допомогою множин значень та відповідних їм множин елементів було запропоновано У. Скоттом і Г. Уоллом у 1941 році [1]. Дослідження продовжили У. Трон [2], У. Джоунс [2], Л. Ланге [3] та інші. Багато нових ознак збіжності на основі запропонованого підходу отримали Л. Лорентцен [4]–[8] та Х. Воделанд [7]–[8].

УДК: 517.524; MSC 2010: 11A55, 11J70, 11K50, 30B70, 40A15
Ключові слова і фрази: гіллястий ланцюговий дріб, множина значень, множина елементів

У роботах Л. Лорентцен [4, 5] особлива увага приділяється вивченню спарених множин значень та відповідних їм спарених множин елементів для неперервних дробів.

Для гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), які є багатовимірними узагальненнями неперервних дробів, ознаки збіжності для простих та спарених областей елементів досліджували Д. Боднар [9], Е. Болтарович [10], Т. Антонова [11, 12], В. Гладун [12, 13], О. Баран [14], для двовимірних неперервних дробів — Х. Кучмінська [15], Т. Антонова і О. Сусь [16].

Розглянемо ГЛД з комплексними елементами вигляду

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $i_0 = N$ — максимальна кількість гілок розгалуження. Розіб'ємо множину всіх мультиіндексів елементів (1)

$$I := \left\{ i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k, 1 \le i_q \le i_{q-1}, q = \overline{1,k}, k = 1, 2, \ldots \right\}$$

на підмножини, які попарно не перетинаються:

$$I_j^p := \{i(k) : i_k = p, j = 1 + (k+1) \; mod \; 2\}, \quad p = \overline{1,N}, j = 1, 2.$$

Розглянемо множини

$$\mathbf{V}_i := \left\{ V_i^1, V_i^2, \ldots, V_i^N \right\}, \quad i = 0, 1;$$

$$\mathbf{E}_j := \left\{ E_j^1, E_j^2, \ldots, E_j^N \right\}, \quad j = 1, 2,$$

де $V_i^p \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ задані, $E_j^p \subseteq \mathbb{C}$ визначаються співвідношеннями:

$$E_j^p := \left\{ a \in \mathbb{C} : \frac{a}{1 + \sum\limits_{s=1}^{p} V_{j \; mod \; 2}^s} \subseteq V_{1-j \; mod \; 2}^p \right\}, \quad p = \overline{1,N}. \tag{2}$$

Зауважимо, що $\sum\limits_{s=1}^{p} V_j^s = \left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_j^s \backslash \{\infty\} \right) \cup \{\infty\}$, якщо $\infty \in V_j^s$ принаймні для одного s.

Означення 1.1. *Множини* $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$ *називаються спареними множинами значень для дробу* (1), *а множини* $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle$ — *спареними множинами елементів, що відповідають множинам* $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$, *якщо* $a_{i(k)} \in E_j^{i_k}$, $i(k) \in I_j^{i_k}$, $j = 1 + (k+1)\ mod\ 2$.

Задамо оператор проекції

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{V}_j) := \left\{V_j^1, V_j^2, \ldots, V_j^k, \emptyset, \ldots, \emptyset\right\}, j = 0, 1, k = \overline{1, N}.$$

Для дробово-лінійного відображення

$$s_{i(k)}(\mathcal{P}_{i_k}(\mathbf{V}_j)) := \frac{a_{i(k)}}{1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_j^{i_{k+1}}}$$

матимемо, що

$$s_{i(k)}(\mathcal{P}_{i_k}(\mathbf{V}_j)) \subseteq V_{1-j}^{i_k},$$

де $a_{i(k)} \in E_{2-j}^{i_k}$, $i(k) \in I_{2-j}^{i_k}$, $j = k\ mod\ 2$.

Нехай $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ — деяка множина. Надалі будемо використовувати такі позначення: $int(A)$ — внутрішня частина множини A, ∂A — межа A, $\overline{A}$ — замикання A, $W(A) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash A$ — доповнення множини A. Також позначимо $B(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ при $a \in \mathbb{C}$ і $r > 0$, $d(a, A)$ — евклідова відстань між точкою $a \in \mathbb{C}$ і множиною $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$.

2 Властивості спарених множин значень та спарених множин елементів

Теорема 2.1. *Нехай* $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$ — *спарені множини значень для дробу* (1), $-1 \notin \left\{ \bigcup\limits_{p=\overline{1,N}, j=0,1} \left(\sum\limits_{s=1}^{p} \overline{V}_j^s \right) \right\}$, *послідовність елементів* $\{a_{i(k)}\}$, $i(k) \in I$, *є обмеженою. Тоді* $\left\langle \widehat{\mathbf{V}}_0, \widehat{\mathbf{V}}_1 \right\rangle$ *є обмеженими спареними множинами значень ГЛД* (1), *де*

$$\widehat{\mathbf{V}}_j := \left\{\widehat{V}_j^1, \widehat{V}_j^2, \ldots, \widehat{V}_j^N\right\}, \qquad \widehat{V}_j^p := V_j^p \cap B(0, R_j^p),$$

$$R_{1-j}^p \geq \frac{M}{L_j^p}, \qquad M := \sup_{i(k) \in I} |a_{i(k)}|, \qquad L_j^p := d\left(-1, \sum_{s=1}^{p} \overline{V}_j^s\right),$$

$p = \overline{1, N}$, $j = 0, 1$.

Доведення. Оцінюємо вираз

$$\left|\frac{a_{i(k)}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_j^{i_{k+1}}}\right| \leq \frac{\sup\limits_{i(k)\in I} |a_{i(k)}|}{d\left(-1, \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} \overline{V}_j^{i_{k+1}}\right)} = \frac{M}{L_j^{i_k}} \leq R_{1-j}^{i_k},$$

де $i(k) \in I$, $j = k \; mod \; 2$. Отже,

$$s_{i(k)}(\mathcal{P}_{i_k}(\mathbf{V}_j)) = \frac{a_{i(k)}}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_j^{i_{k+1}}} \subseteq \widehat{V}_{1-j}^{i_k}$$

для $i(k) \in I$ та $j = k \; mod \; 2$.

Маємо, що

$$s_{i(k)}(\mathcal{P}_{i_k}(\widehat{\mathbf{V}}_j)) \subseteq s_{i(k)}(\mathcal{P}_{i_k}(\mathbf{V}_j)) \subseteq \widehat{V}_{1-j}^{i_k},$$

$i(k) \in I$, $j = k \; mod \; 2$. Отже, $\left\langle \widehat{\mathbf{V}}_0, \widehat{\mathbf{V}}_1 \right\rangle$ є обмеженими спареними множинами значень дробу (1). З останнього співвідношення видно, що множини $\widehat{V}_j^p$ є непорожніми і обмеженими. □

В загальному важко описати множини елементів $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle$, що відповідають заданим множинам значень $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$. Л. Ланге [17] дав означення областей c-збіжності для неперервних дробів $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1}$, $a_k = -c_k^2$, $c_k \in \mathbb{C}$, а Л. Лорентцен [4] досліджувала умови задання спарених множин елементів через області c-збіжності та через спарені множини значень дробу.

Нехай $\langle \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \rangle$ — множини такі, що

$$\mathbf{C}_j := \left\{ C_j^1, C_j^2, \ldots, C_j^N \right\}, \quad j = 1, 2,$$

$$C_j^p := \left\{ c \in \mathbb{C} : -c^2 \in E_j^p \right\}, \quad p = \overline{1, N}, j = 1, 2.$$

Будемо використовувати запис: $E_j^p = -\left(C_j^p\right)^2$, $p = \overline{1, N}, j = 1, 2$.

Позначимо $W_j^p = W\left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_j^s\right) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_j^s\right)$, $p = \overline{1, N}, j = 0, 1$.

Припустимо, що

$$V_j^p \cap \left(-1 - \sum_{s=1}^{p} V_{1-j}^s \right) = \emptyset, \tag{3}$$

де $p = \overline{1, N}$, $j = 0, 1$. Тоді виконуються наступні співвідношення між множинами значень дробу (1):

$$V_j^p \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \backslash \left(-1 - \sum_{s=1}^{p} V_{1-j}^s \right) = -1 - W_{1-j}^p,$$

$p = \overline{1, N}$, $j = 0, 1$.

Теорема 2.2. *Нехай* $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$ *— спарені множини значень дробу* (1), $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle := \langle -\mathbf{C}_1^2, -\mathbf{C}_2^2 \rangle$ *— відповідні спарені множини елементів, де* $-\mathbf{C}_j^2 := \left\{ -\left(C_j^1\right)^2, -\left(C_j^2\right)^2, \ldots, -\left(C_j^N\right)^2 \right\}$, $j = 1, 2$. *Якщо для множин значень виконуються умови* (3), *тоді множини* C_j^p *задовольняють співвідношення* $C_j^p \subseteq \left(1 + \overline{W}_{j \bmod 2}^p\right) \cap \left(-1 - \overline{W}_{j \bmod 2}^p\right)$, *де* $p = \overline{1, N}$, $j = 1, 2$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $j = 1$, p — довільне натуральне число, $1 \leq p \leq N$.

Нехай $c \in C_1^p$ і припустимо, що $c \notin -1 - \overline{W}_1^p$. Тоді $w := -1 - c \notin \overline{W}_1^p$ і тому $w \in int \left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s \right)$. Для заданого $w = -1 - c$ отримаємо, що $\dfrac{-c^2}{1+w} = c \notin -1 - \overline{W}_1^p$. З іншого боку, враховуючи (2), маємо, що $\dfrac{-c^2}{1 + \sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s} \subseteq V_0^p$. Оскільки V_0^p задовольняє співвідношення (3), то $V_0^p \subseteq -1 - W_1^p \subseteq -1 - \overline{W}_1^p$. Звідси випливає, що $c \in -1 - \overline{W}_1^p$, а це суперечить припущенню.

Нехай $c \notin 1 + \overline{W}_1^p$. Тоді $w := -1 + c \notin \overline{W}_1^p$ і тому $w \in int \left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s \right)$. Для заданого $w = -1 + c$ маємо, що $\dfrac{-c^2}{1+w} = -c \notin -1 - \overline{W}_1^p$. З іншого боку, враховуючи (2), отримаємо, що $\dfrac{-c^2}{1 + \sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s} \subseteq V_0^p$. Оскільки V_0^p

задовольняє співвідношення (3), то $V_0^p \subseteq -1 - W_1^p \subseteq -1 - \overline{W}_1^p$. Звідси випливає, що $-c \in -1 - \overline{W}_1^p$, а це суперечить припущенню. Отже, для $C_1^p, p = \overline{1,N}$, теорема доведена.

Випадок для $C_2^p, p = \overline{1,N}$, доводиться аналогічно. $\square$

В частковому випадку, коли $V_i^p = -1 - \overline{W}_{1-i}^p$, $p = \overline{1,N}$, $i = 0,1$, з теореми 2.2 випливає, що $C_j^p \subseteq \overline{V}_{j-1}^p \cap \left(-\overline{V}_{j-1}^p\right) \setminus \{\infty\}$, $p = \overline{1,N}$, $j = 1,2$.

Для того, щоб отримати в останньому співвідношенні рівність, необхідно додати ще кілька умов на множини значень.

Теорема 2.3. *Нехай* $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$ *— спарені множини значень дробу* (1), *де* V_i^p, $p = \overline{1,N}$, $i = 0,1$, *— області, обмежені жордановими кривими,* $V_i^p \subseteq \mathbb{C}$, $0 \in V_i^p$, $-1 \notin \sum\limits_{s=1}^{p} \overline{V}_i^s$, $\infty \in \partial V_i^p$ *та виконуються співвідношення*

$$V_i^p := \mathbb{C} \setminus \left(-1 - \sum_{s=1}^{p} \overline{V}_{1-i}^s \right) \neq \emptyset, p = \overline{1,N}, i = 0,1.$$

$\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle := \langle -\mathbf{C}_1^2, -\mathbf{C}_2^2 \rangle$ *— відповідні спарені множини елементів, де* $-\mathbf{C}_j^2 := \left\{ -\left(C_j^1\right)^2, -\left(C_j^2\right)^2, \ldots, -\left(C_j^N\right)^2 \right\}$, $j = 1,2$. *Якщо для будь-якої точки* $\zeta \in \partial V_i^p \setminus \{\infty\}$ *виконуються умови*

$$\left(\frac{\zeta^2}{\partial V_i^p} \right) \cap \partial V_i^p = \{\zeta\}, \quad p = \overline{1,N}, i = 0,1, \tag{4}$$

тоді для множин C_j^p *виконуються співвідношення*

$$C_j^p = \overline{V}_{j-1}^p \cap \left(-\overline{V}_{j-1}^p\right) \setminus \{\infty\}, \quad p = \overline{1,N}, j = 1,2.$$

Доведення. Зауважимо, що $\partial V_i^p = -1 - \partial \left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_{1-i}^s \right)$, $p = \overline{1,N}$, $i = 0,1$. Достатньо показати, що $\overline{V}_{j-1}^p \cap \left(-\overline{V}_{j-1}^p\right) \subseteq C_j^p \cup \{\infty\}$, $p = \overline{1,N}$, $j = 1,2$.

Нехай $j = 1$, p — довільне натуральне число, $1 \leq p \leq N$. Із співвідношення (2) випливає, що $c \in C_1^p$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{-c^2}{1 + \sum\limits_{s=1}^{p} \overline{V}_1^s} \subseteq \overline{V}_0^p.$$

Нехай $\zeta \in \partial V_0^p \backslash \{\infty\}$. Тоді $\dfrac{-\zeta^2}{1+\partial\left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s\right)} = \dfrac{\zeta^2}{\partial V_0^p}$. З умов (4) випливає, що існує тільки одна точка дотику з ∂V_0^p. Із $\infty \in \partial\left(\sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s\right)$, випливає, що $\dfrac{-\zeta^2}{1+\infty} = 0 \in V_0^p$. Оскільки $\dfrac{-\zeta^2}{1+\sum\limits_{s=1}^{p}\overline{V}_1^s} \subseteq \overline{V}_0^p$, то $\partial V_0^p \subseteq C_1^p$ та $-\partial V_0^p \subseteq C_1^p$.

З умов (4) також випливає, що $\zeta_1^2 \neq \zeta_2^2$, якщо $\zeta_1 \neq \zeta_2$, де $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial V_0^p$. З того, що ∂V_0^p є жордановою кривою, випливає, що крива $\Gamma := -\left(\partial V_0^p\right)^2$ також є жордановою кривою в $\widehat{\mathbb{C}}$, яка проходить через ∞. Крива Γ ділить $\widehat{\mathbb{C}}$ на дві однозв'язні частини P_0 і P_1, де $0 \in P_0$ і $0 \notin P_1$. Нехай $v_1 \in \sum\limits_{s=1}^{p} V_1^s$ — довільно вибране. З того, що V_0^p є однозв'язною, ми повинні мати або $\dfrac{P_0}{1+v_1} \subseteq \overline{V}_0^p$, або $\dfrac{P_1}{1+v_1} \subseteq \overline{V}_0^p$. Оскільки $0 \in V_0^p$, тому $\dfrac{P_0}{1+v_1} \subseteq \overline{V}_0^p$. Таким чином, $\dfrac{P_0}{1+\sum\limits_{s=1}^{p}\overline{V}_1^s} \subseteq \overline{V}_0^p$, і звідси випливає, що $P_0 \subseteq E_1^p = -\left(C_1^p\right)^2$. Отже, $\overline{P}_0 = -\left(\overline{V}_0^p \cap \left(-\overline{V}_0^p\right)\right)^2$.

Випадок для $j = 2$, $p = \overline{1, N}$, доводиться аналогічно. □

Приклад 1. *Відомо* [9, теорема 1.5]*, що наступні множини є спареними множинами значень та відповідно спареними множинами елементів для дробу* (1)*:*

$$V_{i(k)} = V_{k\ mod\ 2}^{i_k} = \left\{ w \in \mathbb{C} : Re(we^{-i\alpha}) > -\frac{1}{2i_{k-1}}\cos\alpha \right\},$$

$$E_{i(k)} = E_{1+(k+1)\ mod\ 2}^{i_k} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| - Re(we^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2i_{k-1}}\cos^2\alpha \right\},$$

де $i(k) \in I$, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. *Множини значень* $V_l^{i_k}$, $i(k) \in I$, $l = k\ mod\ 2$, *задовольняють умови теореми* 2.2 *і*

$$C_{1+(k+1)\ mod\ 2}^{i_k} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |Re(we^{-i\alpha})| \leq \frac{1}{2i_{k-1}}\cos\alpha \right\}.$$

Приклад 2. *З* [9, теорема 1.5] *також випливає, що спареними множинами значень та відповідно спареними множинами елементів для дробу* (1) *є такі множини:*

$$V_{i(k)} = V^{i_k}_{k \; mod \; 2} = \left\{ w \in \mathbb{C} : Re(w) > -\frac{1}{2^{i_k}} \right\},$$

$$E_{i(k)} = E^{i_k}_{1+(k+1) \; mod \; 2} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| - Re(w) \leq \frac{1}{2^{2i_k - 1}} \right\},$$

де $i(k) \in I$. *Множини значень* $V^{i_k}_l$, $i(k) \in I$, $l = k \; mod \; 2$, *задовольняють умови теореми* 2.3 *і*

$$C^{i_k}_{1+(k+1) \; mod \; 2} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |Re(w)| \leq \frac{1}{2^{i_k}} \right\}.$$

[1] *Scott W. T., Wall H. S.* Value regions for continued fractions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1941. — **47**. — P. 580–585.

[2] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

[3] *Lange L. J.* On a family of twin convergence regions for continued fractions // Illinois J. Math. — 1966. — **10**. — P. 97–108.

[4] *Lorentzen L.* Convergence criteria for continued fractions K(an/1) based on value sets // Contemporary Math. — 1999. — **236**. — P. 205–255.

[5] *Lorentzen L.* Continued fractions with circular twin value sets // Trans. Amer. Math. Soc. — 2008. — **360**. — P. 4287–4304.

[6] *Lorentzen L., Ruscheweyh St.* Simple convergence sets for continued fractions K(an/1) // Math. Anal. and Appl. — 1993. — **179**, №2. — P. 349–370.

[7] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Applications. North-Holland: Studies in Computational Mathematics 3, 1992. — 606 p.

[8] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions. Volume 1: Convergence Theory. Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science. Atlantis Press, 2008. — 308 p.

[9] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 176 с.

[10] *Болтарович Е.А.* Аналог признака сходимости Лейтона-Уолла для ветвящихся цепных дробей // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов: Сб. науч. тр. — Киев: Наукова Думка, 1989. — С. 32–36.

[11] *Антонова Т.М.* Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами і їх парних частин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — **46**, №4. — С. 7–15.

[12] *Антонова Т.М., Гладун В.Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — **47**, №4. — С. 27–35.

[13] *Гладун В.Р.* Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — **46**, №4. — С. 16–26.

[14] *Баран О.Є.* Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — **52**, №4. — С. 73–80.

[15] *Кучмінська Х.Й.* Області елементів і області значень для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — **39**, №2. — С. 55–61.

[16] *Антонова Т.М., Сусь О.М.* Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — **50**, №3. — С. 94–101.

[17] *Lange L. J.* Strip convergence regions for continued fractions // In: Continued Fractions and Orthogonal Functions (eds.: S. Clement Cooper and W. J. Thron), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker. — 1994. — P. 211–231.

SOME PROPERTIES OF TWIN VALUE SETS AND TWIN ELEMENT SETS FOR SPECIAL FORM OF A BRANCHED CONTINUED FRACTION

Oksana BARAN

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 3b Naukova Str., L'viv 79060, Ukraine

e-mail: *boe13@ukr.net*

For special form of a branched continued fraction some properties of twin value sets and corresponding twin element sets which are results of multidimensional generalizations, established by L. Lorentzen for continued fractions are investigated.