# ПРО СТІЙКІСТЬ МАКСИМУМА ПОСЛІДОВНОСТІ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

*Олег СКАСКІВ*

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 20 лютого 2004 р.

Отримано умови стійкості максимального члена цілого ряду Діріхле.

**1. Вступ.** Через $D(\lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$ рядів Діріхле
$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}, \tag{1}$$
$\lambda=(\lambda_n)$ — фіксована послідовність, така що $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$. Для $x\in\mathbb{R}$ і $F\in D(\lambda)$ визначимо $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}:\ n\ge 0\}$ – максимальний член ряду (1). Для довільної послідовності комплексних чисел $(b_n)$, $b_n\neq 0$ $(n\ge 0)$, розглянемо ряди
$$B(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_ne^{z\lambda_n},\ B^-(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_n^{-1}e^{z\lambda_n}.$$
Якщо справджується умова
$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\ln(|b_n|+|b_n^{-1}|)}{\lambda_n}<+\infty, \tag{2}$$
то, очевидно, що одночасно $F\in D(\lambda)$, $B\in D(\lambda)$, $B^-\in D(\lambda)$.

Нехай $L-$ клас таких додатних неперервних на $[0;+\infty)$ функцій $l$, що $l(x)\uparrow+\infty$ $(x\to+\infty)$. Через $W$ позначимо клас таких функцій $w\in L$,

---

УДК 517.5. Автор частково підтриманий INTAS, проект 99-00089

що $\int\limits_1^{+\infty} x^{-2}w(x)dx < +\infty$. Для фіксованої функції $\Phi \in L$ через $L(\Phi)$ позначимо клас таких додатних неспадних на $[0;+\infty)$ функцій $\psi$, що

$$(\forall b > 0): \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^{b\Phi(t)} \frac{d\psi(u)}{u} = 0.$$

Для функції $F \in D(\lambda)$ її максимальний член $\mu(x,F)$ називається *стійким* (див. [1]), якщо за умови (2) при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега одночасно виконуються співвідношення

$$\ln\mu(x,F) = (1+o(1))\ln\mu(x,B) = (1+o(1))\ln\mu(x,B^-). \tag{3}$$

У статті [1] доведено, що за умови

$$\ln n = O(\ln\lambda_n) \quad (n \to +\infty), \tag{4}$$

для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in D(\lambda)$ його максимальний член $\mu(x,F)$ був стійким, необхідно і досить, щоб існувала функція $w \in W$, для якої

$$(\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0): \ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) \leq w(\lambda_n). \tag{5}$$

У статті [1] вказано також застосування цього твердження до дослідження зростання цілих рядів Діріхле на кривих.

У статті [4] знайдено необхідні і достатні умови стійкості $\mu(x,F)$ без апріорного обмеження (4) на показники. Для $w \in L$ означимо

$$B_w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)+z\lambda_n},\ B_w^-(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-w(\lambda_n)+z\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що із $B_w \in D(\lambda)$ випливає $\{F, B_w^-\} \subset D(\lambda)$, а за умови (5) і $\{B, B^-\} \subset D(\lambda)$, та для досить великих $x$

$\mu(x,B_w^-) \leq \mu(x,B) \leq \mu(x,B_w)$, $\mu(x,B_w^-) \leq \mu(x,B^-) \leq \mu(x,B_w)$,
$\mu(x,B_w^-) \leq \mu(x,F) \leq \mu(x,B_w)$.

Тому для $w \in L$, у випадку справедливості умов (5), співвідношення (3) випливають із співвідношень

$$\ln\mu(x,F) = (1+o(1))\ln\mu(x,B_w) = (1+o(1))\ln\mu(x,B_w^-). \tag{6}$$

У [4] доведено наступну теорему.

**Теорема А [4].** *Нехай $w \in L$, $B_{2w} \in D(\lambda)$. Якщо виконується умова* (5) *і, крім того,*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\ln\nu(t)}{t} < +\infty, \quad \nu(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)}dn(x), \tag{7}$$

*де $n(x) = \sum\limits_{\lambda_n \le x} 1-$ лічильна функція послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, то максимальний член $\mu(x, F)$ є стійким.*

У [4] також доведено, що умова (7) є й необхідною для стійкості максимального члена $\mu(x, F)$, а також, що з умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty \tag{8}$$

і того, що $w \in W$, випливає стійкість $\mu(x, F)$. Відзначимо, що умова (8) значно слабша, ніж умова (4).

У цій статті введемо і дослідимо поняття посиленої і ослабленої стійкості $\mu(x, F)$.

Для функції $F \in D(\lambda)$ максимальний член $\mu(x, F)$ називатимемо *посилено стійким* і відповідно *ослаблено стійким*, якщо співвідношення (6) виконуються при $x \to +\infty$ і відповідно при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0; +\infty)$ нульової лінійної щільності

$$DE = \limsup_{x \to +\infty} \frac{meas(E \cap [0, x])}{x} = 0,$$

де $meas\, E-$ міра Лебега вимірної множини $E$ на прямій.

Для функції $\psi \in L$ через $D_\psi(\lambda)$ позначимо клас таких функцій $F \in D(\lambda)$, що

$$|a_n| \le \exp\{-\lambda_n \psi(\lambda_n)\} \quad (n \ge n_0),$$

а для функції $\Phi \in L$ через $D(\lambda, \Phi)$ позначимо клас таких функцій, для яких

$$\ln M_0(x, F) \le x\Phi(x) = \Phi_0(x) \quad (x \ge x_0),$$

де $M_0(x, F) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{x\lambda_n}$. У випадку, коли $\Phi_0$ має неперервну похідну, яка зростає до $+\infty$ на $[x_0; +\infty)$, відомо (див. [6, с. 18]), що нерівність $\ln \mu(x, F) \le \Phi_0(x)$ виконується для всіх $x \ge x_0$ тоді і лише тоді, коли

$\ln|a_n| \le -\lambda_n\psi(\lambda_n)$ $(n \ge n_0)$, де $\psi(t) = \Psi_\Phi(\varphi_1(t))$, $\Psi_\Phi(t) = t - \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0'(t)}$, а функція $\varphi_1$ є оберненою до функції $\Phi_0'$.

Доведемо наступні теореми.

**Теорема 1.** *Нехай* $\psi \in L$, $w \in L$, $B_w \in D_\psi(\lambda)$, $\nu(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)}dn(x)$. *Якщо виконується умова*

$$\ln\nu(t) = O(\psi(t)) \qquad (t \to +\infty), \tag{9}$$

*то* $\mu(x, F)-$ *посилено стійкий.*

**Теорема 2.** *Нехай* $\Phi \in L$, $w \in L$, $B_w \in D(\lambda, \Phi)$, $\nu(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)}dn(x)$. *Якщо* $\ln\nu \in L(\Phi)$, *то* $\mu(x, F)-$ *ослаблено стійкий.*

Для доведення теорем розглянемо, як і в [4], додатні збіжні для всіх $x \ge 0$ інтеграли

$$I(x) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{tx}v(dt), \tag{10}$$

де $v-$ зліченно-адитивна міра на $[0; +\infty)$ з необмеженим носієм, $f(t) > 0$ $(t \in supp\ v)$. Для $x \ge 0$ визначимо $\mu_*(x) = \sup\{f(t)e^{tx} :\ t \in supp\ v\}$.

Теореми 1 і 2 отримаємо з наступних теорем.

**Теорема** $3^*$. *Нехай* $\psi \in L$ *і функція* $I$ *має вигляд* (10). *Якщо виконуються умови*

$$f(t) \le \exp\{-t\psi(t)\} \qquad (t \ge t_0), \tag{11}$$

$$\ln v([0; t]) = O(\psi(t)) \qquad (t \to +\infty), \tag{12}$$

*то при* $x \to +\infty$

$$\ln I(x) \le (1 + o(1)) \ln\mu_*(x). \tag{13}$$

**Теорема 4.** *Нехай функція* $I$ *має вигляд* (10) *і нехай* $\Phi \in L$. *Якщо виконуються умови* $v_0 \in L(\Phi)$ *з* $v_0(t) = v([0; t])$ *і* $\ln I(x) \le x\Phi(x)$ $(x \ge x_0)$, *то співвідношення (13) справджується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* $E$, $DE = 0$.

Теорему 4 отримано по суті в [2, с. 223–233] (див. також [3, с. 135], звідки також можна отримати подібне твердження).

**2. Доведення теореми** $3^*$**.** Нехай $v_0(t) = v([0;t])$, $t \geq 0$. Відзначимо спочатку, що з умови (12) випливає, що

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2/3t\psi(t)} v(dt) < +\infty.$$

Тому, позначивши через $t_1 = t_1(x)$ єдиний розв'язок рівняння $\psi(t) = 3x$, з нерівності (11) для $t \geq t_1$ отримаємо

$$f(t)e^{tx} \leq \exp\{-t\psi(t) + tx\} \leq \exp\{-2/3t\psi(t)\}$$

і, отже, при $x \to +\infty$

$$I(x) \leq \int\limits_0^{t_1} f(t)e^{tx} v(dt) + \int\limits_{t_1}^{+\infty} e^{-2/3t\psi(t)} v(dt) \leq \mu_*(x)v_0(t_1) + o(1). \qquad (14)$$

Якщо $v(\mathbb{R}_+) < +\infty$, то звідси випливає, що $I(x) = O(\mu_*(x))$ $(x \to +\infty)$. Залишається зауважити, що $\mu_*(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$. Якщо ж $v(\mathbb{R}_+) = +\infty$, то, очевидно, що $x = o(\ln \mu_*(x))$ $(x \to +\infty)$, і тоді, на підставі умови (12) з нерівності (14), отримуємо, що при $x \to +\infty$

$$\ln I(x) \leq \ln v_0(t_1) + \ln \mu_*(x) = O(x) + \ln \mu_*(x) = (1 + o(1)) \ln \mu_*(x).$$

Теорему $3^*$ доведено.

Аналіз наведеного доведення показує, що насправді встановлено наступне твердження, наслідком з якого є теорема $3^*$.

**Теорема 3.** *Нехай* $\psi \in L$, *функція* $I$ *має вигляд* (10), *виконуються умови* (12) *і*

$$(\exists b > 0): \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{bt\psi(t)} v(dt) < +\infty. \qquad (15)$$

*Тоді співвідношення* (13) *справджується при* $x \to +\infty$.

**Доведення теореми 3.** Справді, нехай $t_1-$ єдиний розв'язок рівняння $\psi(t) = x/b$. Тоді за умовою (15)

$$\int\limits_{t_1}^{+\infty} f(t)e^{tx} v(dt) \leq \int\limits_{t_1}^{+\infty} f(t)e^{bt\psi(t)} v(dt) = o(1) \quad (x \to +\infty),$$

тому знову маємо $I(x) \leq \mu_*(x)v_0(t_1) + o(1)$. Завершуємо доведення теореми 3 дослівним повторенням міркувань з попереднього доведення.

**3. Доведення теореми 1.** Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a_n > 0$ $(n \geq 0)$. Міркуємо подібно, як і в [4]. Нехай $a(t)-$ така неперервна невід'ємна на $[0; +\infty)$ функція, що $a(\lambda_n) = a_n$ і

$$\mu(x, F) = \sup\{a(t)e^{tx} : \ t \geq 0\}, \quad a(t) \leq \exp\{-t\psi(t)\} \ \ (t \geq 0).$$

Тоді

$$\mu(x, F) \leq F(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)+x\lambda_n} = \int\limits_0^{+\infty} a(t)e^{tx} d\nu(t) = B_w(x), \tag{16}$$

де $\nu(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{w(x)} dn(x)$, $n(x) = \sum\limits_{\lambda_n \leq x} 1$. За теоремою $3^*$ при $x \to +\infty$ виконується нерівність

$$\ln B_w(x) \leq (1 + o(1)) \sup\{\ln a(t) + tx : \ t \in supp\ \nu\} = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F).$$

Тому $\ln B_w(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ при $x \to +\infty$.

З іншого боку, $\mu(x, F) \leq \mu(x, B_w) \leq B_w(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тому $\ln \mu(x, B_w) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ при $x \to +\infty$.

Якщо тепер застосувати попередні міркування із заміною $F$ на $B_w^-$, а $B_w$ на $F$, то отримаємо друге із співвідношень (6). Справді, нехай $b(t)-$ така неперервна невід'ємна функція, що $b(\lambda_n) = a_n e^{-w(\lambda_n)}$ і

$$\mu(x, B_w^-) = \sup\{b(t)e^{tx} : \ t \geq 0\}, \quad b(t) \leq \exp\{-t\psi(t)\} \ \ (t \geq 0).$$

Тоді

$$\mu(x, B_w^-) \leq B_w^-(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n} = \int\limits_0^{+\infty} b(t)e^{tx} d\nu(t) = F(x). \tag{17}$$

За теоремою $3^*$ знову отримуємо, що при $x \to +\infty$

$$\ln \mu(x, B_w^-) \leq \ln F(x) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(x, B_w^-).$$

Залишається використати нерівності $\mu(x, B_w^-) \leq \mu(x, F) \leq F(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Теорему 1 доведено.

**4. Доведення теореми 2.** Як і вище, можна вважати, що $a_n > 0$ $(n \geq 0)$. Визначимо невід'ємні функції $a(t)$, $b(t)$ так, що $a(\lambda_n) = a_n$, $b(\lambda_n) = a_n e^{-w(\lambda_n)}$ і

$$\mu(x, F) = \sup\{a(t)e^{tx} : \ t \geq 0\}, \quad \mu(x, B_w^-) = \sup\{b(t)e^{tx} : \ t \geq 0\}.$$

Як і вище, отримуємо нерівності (16), (17). За умовою $B_w \in D(\lambda, \Phi)$, тому до інтегралів

$$B_w(x) = \int\limits_0^{+\infty} a(t)e^{tx}d\nu(t), \quad F(x) = \int\limits_0^{+\infty} b(t)e^{tx}d\nu(t)$$

можна застосувати теорему 4, бо за умовою $\ln\nu \in L(\Phi)$, де $\nu(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)}dn(x)$.

За теоремою 4 із (16) і (17) отримуємо, що при $x \to +\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності

$$\ln\mu(x, F) \le \ln B_w(x) \le (1 + o(1)) \ln\mu(x, F),$$

$$\ln\mu(x, B_w^-) \le \ln F(x) \le (1 + o(1)) \ln\mu(x, B_w^-).$$

Завершує доведення застосування нерівностей $\mu(x, F) \le \mu(x, B_w) \le B_w(x)$ і $\mu(x, B_w^-) \le \mu(x, F) \le F(x)$.

**5. Наслідки.** Зауважимо, що

$$\nu(t) = \int\limits_0^t e^{w(x)}dn(x) \le e^{w(t)}n(t) \quad (t \ge 0),$$

тому, $\ln\nu(t) \le w(t) + \ln n(t)$. З монотонності функції $1/t$ випливає, що

$$\int\limits_0^t \frac{d\ln\nu(x)}{x} \le \int\limits_0^t \frac{dw(t)}{t} + \int\limits_0^t \frac{d\ln n(t)}{t} + O(1) \quad (t \to +\infty).$$

Отже, якщо $w \in L(\Phi)$ і $\ln n(t) \in L(\Phi)$, то $\ln\nu \in L(\Phi)$. Очевидно також, що якщо $w(t) = O(\psi(t))$ і $\ln n(t) = O(\psi(t))$ $(t \to +\infty)$, то $\ln\nu(t) = O(\psi(t))$.

Тепер ми можемо отримати з теорем 1 і 2 наступні наслідки.

**Наслідок 1.** *Нехай $\psi \in L$, $w \in L$, $F \in D_\psi(\lambda)$ і виконуються умови*

$$w(t) = O(\psi(t)), \qquad \ln n(t) = O(\psi(t)) \quad (t \to +\infty). \tag{18}$$

*Тоді $\mu(x, F)-$ посилено стійкий.*

**Наслідок 2.** *Нехай $\Phi \in L$, $w \in L$, $F \in D(\lambda, \Phi)$. Якщо $w \in L(\Phi)$ і $\ln n(t) \in L(\Phi)$, то $\mu(x, F)-$ ослаблено стійкий.*

**Доведення наслідка 1.** З огляду на сказане вище, перевіримо, чи можна використати теорему 1.

Оскільки $w(t) = o(t\psi(t))$ $(t \to +\infty)$, то за умовою (18)

$$\ln a_n + w(\lambda_n) \le -(1 + o(1))\lambda_n \psi(\lambda_n) \quad (n \to +\infty),$$

звідки $\ln a_n + w(\lambda_n) \le -1/2\lambda_n\psi(\lambda_n)$ $(n \ge n_0)$. Крім того, за другою умовою (18)

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n)) = o(\lambda_n\psi(\lambda_n)) = o(-\ln a_n - w(\lambda_n)) \quad (n \to +\infty),$$

тому $B_w \in D_{1/2\psi}(\lambda)$ (див. [6, с. 12]). Пригадуючи сказане перед формулюванням наслідків, отримуємо, що до $F$ можна застосувати теорему 1. Наслідок 1 доведено.

**Доведення наслідка 2.** Із зауважень перед формулюванням наслідків випливає, що $\ln \nu \in L(\Phi)$, як тільки $w \in L(\Phi)$ і $\ln n(t) \in L(\Phi)$. Якщо $\psi \in L(\Phi)$, то, інтегруючи частинами, переконуємось, що

$$(\forall b > 0): \ \psi_0(b\Phi(t)) = o(t\Phi(t)) \quad (t \to +\infty).$$

Звідси, враховуючи умови $w \in L(\Phi)$ і $\ln n(t) \in L(\Phi)$, отримаємо, що

$$(\forall b > 0): \ w(\lambda_n) = o(\lambda_n \varphi(b\lambda_n)) \quad (n \to +\infty), \tag{19}$$

$$\ln n = o\left(\lambda_n \varphi\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right) \qquad (n \to +\infty), \tag{20}$$

де $\varphi$– обернена функція до $\Phi$.

Крім того, за умовою $F \in D(\lambda, \Phi)$ і нерівністю Коші, для всіх $n \ge n_1$ при $x = \varphi(\lambda_n)$ маємо

$$\ln a_n \le \ln \mu(x, F) - x\lambda_n \le \ln M_0(x, F) - x\lambda_n \le x\Phi(x) - x\lambda_n \le \frac{\lambda_n \varphi(\lambda_n/2)}{2}.$$

Використовуючи (19) при $b = 1/2$, звідси отримуємо, що

$$\ln a_n + w(\lambda_n) \le -(1/2 + o(1))\lambda_n \varphi(\lambda_n/2), \tag{21}$$

звідки, на основі (20), дістанемо $\ln n = o(-\ln a_n - w(\lambda_n))$ $(n \to +\infty)$, і, отже, $B_w \in D(\lambda)$ (див. [6, с. 12]).

З (19), крім того, для всіх досить великих $n$ маємо $\ln a_n + w(\lambda_n) \le 1/2 \ln a_n$, тому для всіх досить великих $x$ отримуємо

$$\ln \mu(x, B_w) \le \frac{1}{2} \max\{\ln a_n + 2x\lambda_n : \ n \ge 0\} \le x\Phi(2x). \tag{22}$$

Застосуємо тепер до $B_w$ наступне твердження (теорема 1 із [5]), яке сформулюємо у вигляді леми.

**Лема.** *Нехай* $\psi \in L$, $F \in D(\lambda)$,

$$(\exists K > 0): \ |a_n| \le \exp\{-\lambda_n \psi(K\lambda_n)\} \quad (n \ge n_0). \tag{23}$$

*Якщо виконується умова*

$$(\forall \eta > 0): \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\psi(\eta R)} \sum_{0<\lambda_n\le R} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \tag{24}$$

*то рівність*

$$\ln M_0(x,F) = (1+o(1)) \ln \mu(x,F)$$

*виконується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини нульової лінійної щільності.*

З нерівності (21) випливає, що для функції $B_w$ умова (23) виконується, якщо $\psi(t) = \frac{1}{3}\varphi(\frac{1}{2}t)$. Враховуючи, що $\frac{1}{n} \ge \ln(n+1) - \ln n$ $(n \ge 1)$, отримуємо, що для $R = \frac{1}{\eta}\Phi(r)$

$$\frac{1}{\psi(\eta R)} \sum_{\lambda_n\le R} \frac{1}{n\lambda_n} \le \frac{1}{r} \int\limits_0^{\Phi(r)/\eta} \frac{d\ln n(t)}{t}.$$

Звідси, враховуючи умову $\ln n(t) \in L(\Phi)$, отримуємо, що (24) також виконується для $\psi(t) = \frac{1}{3}\varphi(\frac{1}{2}t)$. Тому при $x \to +\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності $\ln M_0(x,B_w) = (1+o(1))\ln\mu(x,B_w)$. Звідси, зокрема, випливає, що для всіх досить великих $x$ виконується нерівність $\ln M_0(x,B_w) \le 2\ln\mu(2x,B_w)$. Застосовуючи до останньої нерівності нерівність (22), для всіх досить великих $x$ отримаємо

$$\ln M_0(x,B_w) \le 4x\Phi(4x).$$

Для того, щоб переконатись у коректності застосування теореми 2 з функцією $\Phi_1(x) = 4\Phi(4x)$ замість функції $\Phi$, досить зауважити, що $\psi_0 \in L(\Phi)$ тоді і тільки тоді, коли $\psi_0 \in L(\Phi_1)$, де $\Phi_1(x) = C_1\Phi(C_2x)$ з деякими додатними сталими $C_1, C_2$. Наслідок 2 доведено.

**6. Заключні зауваження.** Можна довести, що отримані у цій статті твердження є непокращуваними. Так, зокрема, правильне наступне твердження, яке вказує на непокращуваність (необхідність) умови (12) для справедливості при $x \to +\infty$ співвідношення (13) в класі функцій вигляду (10).

**Теорема 5.** *Нехай $\psi \in L$. Для кожної міри $v$, для якої умова* (12) *не виконується, існують функція вигляду* (10), *для якої виконується умова* (11), *стала $d > 0$ і послідовність $x_k \to +\infty$ такі, що*

$$\ln F(x_k) \geq (1 + d) \ln \mu_*(x_k) \qquad (k \geq 1).$$

Міркуючи подібно, як і в [4], звідси неважко встановити непокращуваність умови (9) у теоремі 1. Подібні твердження є правильними і стосовно умов $\ln \nu \in L(\Phi)$, $v_0 \in L(\Phi)$ відповідно з теорем 2 і 4. Описані у цьому пункті твердження залишаємо у цій статті поза розглядом.


[1] *Гайсин А.М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370, № 6. – С.735–737.

[2] *Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле. – Дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 299 с.

[3] *Скасків О.Б., Тракало О.М.* Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа // Мат. студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 125–146.

[4] *Скасків О.Б., Тракало О.М.* Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. (подано до друку)

[5] *Шеремета М.Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 2. – С. 215–226.

[6] *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.


## ON STABILITY OF THE MAXIMUM OF THE SEQUENCE OF THE LINEAR FUNCTIONS


*Oleh SKASKIV*

Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine



The conditions of the stability of the maximum term of the entire Dirichlet series are established.