НЕОДНОРІДНІ ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ НА ПІВПРЯМІЙ, ПОРОДЖЕНІ ТВІРНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ З КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ФЕЛЛЕРА-ВЕНТЦЕЛЯ

Роман ШЕВЧУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

e-mail: *r.v.shevchuk@gmail.com*

Редакція отримала статтю 12 серпня 2011 р.

За допомогою аналітичного методу побудовано мультиплікативну сім'ю операторів, яка описує неоднорідний дифузійний процес на півпрямій із заданою на її межі достатньо загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля.

1 Вступ

У даній статті знайдено інтегральне зображення мультиплікативної сім'ї операторів, що описує неоднорідний дифузійний процес на півпрямій з крайовою умовою Феллера-Вентцеля ([1, 2]), яка містить члени, що відповідають за такі властивості процесу в точці нуль, як його відбиття, обрив та повернення в середину області стрибками. Шукану сім'ю операторів побудовано аналітичним методом за допомогою розв'язку відповідної нелокальної крайової задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами (питання

УДК: 519.21; MSC 2000: 60J60

Ключові слова і фрази: аналітичний метод, мультиплікативна сім'я операторів, неоднорідний дифузійний процес, крайова умова Феллера-Вентцеля

Робота підтримана ДФФД і РФФД, грант №Ф40.1/023

про зв'язок теорії марковських процесів із задачами аналізу детально висвітлено в працях [3]–[5]). При цьому ми використовуємо метод класичної теорії потенціалу ([5, гл. II, §3], [6, гл. IV]).

Зауважимо, що подібна задача досліджувалася аналогічним методом в роботі [7] для випадку однорідного дифузійного процесу при відсутності в крайовій умові Феллера-Вентцеля доданка, що відповідає за обрив процесу після його виходу на межу області. Крім того, проблема існування напівгрупи Феллера для багатовимірного дифузійного процесу з нелокальною крайовою умовою Вентцеля розглядалася в роботах [8, 9] і вивчалася там за допомогою методів функціонального аналізу. Що стосується розглядуваної тут крайової задачі, то вона в такій постановці розглядається вперше.

2 Постановка задачі та деякі допоміжні факти

Нехай $D = \{x : \ x > 0\}$ — область на прямій $\mathbb{R}$, $\partial D = \{0\}$ — межа області D, $\overline{D} = D \cup \{0\}$ — замикання D і T — деяке додатне число. Якщо Γ — множина $\overline{D}$ або $\mathbb{R}$, то $C_b(\Gamma)$ — банахів простір всіх дійсних функцій $f(x)$, заданих на Γ, обмежених і неперервних на Γ, з нормою

$$\|f\| = \sup_{x\in\Gamma} |f(x)|,$$

а $C^{(2)}_{\text{рівн}}(\Gamma)$ — множина всіх функцій f, обмежених і рівномірно неперервних на Γ разом з похідними перших двох порядків.

Припустимо, що для $(s,x) \in [0,T] \times \overline{D}$ визначені деякі функції $a(s,x)$ та $b(s,x)$, що задовольняють умови:

1) існують сталі b і B такі, що $0 < b \le b(s,x) \le B$ для всіх $(s,x) \in [0,T] \times \overline{D}$;

2) функція $a(s,x)$ обмежена в області $[0,T] \times \overline{D}$;

3) для всіх $s, s' \in [0,T], \ x, x' \in \overline{D}$ виконується нерівністі:

$$|b(s,x) - b(s',x')| \le c\left(|s-s'|^{\frac{\alpha}{2}} + |x-x'|^{\alpha}\right),$$

$$|a(s,x) - a(s',x')| \le c\left(|s-s'|^{\frac{\alpha}{2}} + |x-x'|^{\alpha}\right),$$

де c і α — додатні сталі, $0 < \alpha < 1$.

За допомогою функцій $a(s,x)$ і $b(s,x)$ визначимо диференціальний оператор другого порядку A_s, який діє на $C^{(2)}_{\text{рівн}}(\overline{D})$:

$$A_s\varphi(x) = \frac{1}{2}b(s,x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + a(s,x)\frac{d\varphi}{dx}(x). \tag{1}$$

Будемо вважати, що A_s породжує у внутрішніх точках D деякий неоднорідний дифузійний процес з коефіцієнтом переносу $a(s,x)$ і коефіцієнтом дифузії $b(s,x)$.

Припустимо, крім цього, що для $s \in [0,T]$ в точці $x = 0$ задані функції $q(s)$ і $\gamma(s)$, а на D задана невід'ємна міра $\mu(s,\cdot)$, і для них виконані такі умови:

а) функції $q(s)$ і $\gamma(s)$ неперервні на відрізку $[0,T]$, до того ж $q(s) > 0$, $\gamma(s) \geq 0$ для всіх $s \in [0,T]$;

б) для довільних обмеженої, вимірної на $\overline{D}$ функції f і числа $\delta > 0$ функції $F_\delta(s) = \int\limits_0^\delta yf(y)\mu(s,dy)$ та $G_\delta(s) = \int\limits_\delta^\infty f(y)\mu(s,dy)$ неперервні на відрізку $[0,T]$.

Ставиться задача побудувати мультиплікативну сім'ю операторів T_{st}, $0 \leq s < t \leq T$, яка описує неоднорідний процес Феллера на $\overline{D}$, такий, що його генератор $\widetilde{A}_s$ визначений на функціях $\varphi \in C^{(2)}_{\text{рівн}}(\overline{D})$, таких, що

$$-q(s)\varphi'(0) + \gamma(s)\varphi(0) + \int\limits_D [\varphi(0) - \varphi(y)]\mu(s,dy) = 0, \tag{2}$$

і для них $\widetilde{A}_s\varphi = A_s\varphi$.

Зауважимо, що рівність (2) є окремим випадком крайової умови Феллера-Вентцеля ([1, 2]), де коефіцієнти q, γ та міра μ відповідають за такі продовження дифузійного процесу після його потрапляння в точку нуль, як відбиття, обрив та стрибки в середину області D відповідно.

Для дослідження сформульованої проблеми ми використовуємо аналітичний метод. За такого підходу шукану сім'ю операторів T_{st}, $0 \leq s < t \leq T$, можна знайти за допомогою розв'язку $u(s,x,t)$ наступної параболічної крайової задачі:

$$\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial s} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 u(s,x,t)}{\partial x^2} + a(s,x)\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial x} = 0, \\ 0 \le s < t \le T,\ x \in D, \tag{3}$$

$$\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x), \quad x \in D, \tag{4}$$

$$-q(s)\frac{\partial u(s,0,t)}{\partial x} + \gamma(s)u(s,0,t) + \int\limits_D [u(s,0,t) - u(s,y,t)]\mu(s,dy) = 0, \\ 0 \le s < t \le T, \tag{5}$$

де $\varphi \in C_b(\overline{D})$ — задана функція.

Класичну розв'язність задачі (3)–(5) встановимо методом граничних інтегральних рівнянь. Для цього, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, а функції $a(s,x)$ та $b(s,x)$ визначені на $[0,T]\times\mathbb{R}$ і в цій області задовольняють властивості 1)-3). З цих властивостей випливає, що для рівняння (3) в області $[0,T]\times\mathbb{R}$ існує фундаментальний розв'язок, тобто існує така функція $G(s,x,t,y)$, задана при $0 \le s < t \le T,\ x, y \in \mathbb{R}$, яка:

- неперервна за сукупністю змінних;
- при фіксованих $t \in (0,T],\ y \in \mathbb{R}$, як функція аргументів $(s,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$, задовольняє рівняння (3);
- для довільної обмеженої неперервної функції $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}$ задовольняє умову
$$\lim_{s\uparrow t}\int\limits_{\mathbb{R}} G(s,x,t,y)\varphi(y)dy = \varphi(x),$$
якими б не були $t \in (0,T],\ x \in \mathbb{R}$.

Нагадаємо (див. [4, Додаток, §6], [5, гл. II, §2], що функція $G(s,x,t,y)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна по s, двічі неперервно диференційовна по x і для неї виконуються нерівності $(0 \le s < t \le T,\ x, y \in \mathbb{R})$

$$|D_s^r D_x^p G(s,x,t,y)| \le c(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{6}$$

де r і p — цілі невід'ємні числа, для яких $2r + p \le 2$; D_s^r — символ частинної похідної по s порядку r; D_x^p — символ частинної похідної по

x порядку p ; c, h — додатні сталі. До того ж, $G(s,x,t,y)$ зображується у вигляді

$$G(s,x,t,y) = Z_0(s,x,t,y) + Z_1(s,x,t,y), \tag{7}$$

де

$$Z_0(s,x,t,y) = [2\pi b(t,y)(t-s)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b(t,y)(t-s)}\right\}, \tag{8}$$

а для функції $Z_1(s,x,t,y)$ справджуються нерівності

$$|D_s^r D_x^p Z_1(s,x,t,y)| \leq c(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left\{-h\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{9}$$

де $0 \leq s < t \leq T,\ x, y \in \mathbb{R},\ 2r+p \leq 2,\ c$ і h — додатні сталі, α — стала, з умови 3).

Розв'язок задачі (3)–(5) будемо називати класичним, якщо для всіх $t \in (0,T]$ він належить до класу

$$C^{1,2}([0,t) \times D) \cap C([0,t] \times \overline{D}). \tag{10}$$

3 Основні результати

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів оператора* A_s *з* (1) *виконані умови* 1)–3)*, а функції* $q(s)$*,* $\gamma(s)$ *та міра* $\mu(s,dy)$*, що входять до рівності* (2)*, задовольняють умови* а), б)*. Тоді, якщо* $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$*, то задача* (3)–(5) *має класичний розв'язок, який зображується у вигляді* ($0 \leq s < t \leq T,\ x \in \overline{D}$)

$$u(s,x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(s,x,t,y)\varphi(y)dy + \int_s^t G(s,x,\tau,0)V(\tau,t,\varphi)d\tau, \tag{11}$$

де $V(s,t,\varphi)$ *— розв'язок деякого інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Крім того, цей розв'язок задовольняє нерівність*

$$|u(s,x,t)| \leq c\|\varphi\|, \tag{12}$$

де $0 \leq s < t \leq T,\ x \in \overline{D},\ c$ *— деяка додатна стала.*

Доведення. Розв'язок задачі (3)–(5) будемо шукати у вигляді (11). Для доданків у правій частині цієї рівності введемо позначення:

$$u_0(s,x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(s,x,t,y)\varphi(y)dy,$$

$$u_1(s,x,t) = \int\limits_s^t G(s,x,\tau,0)V(\tau,t,\varphi)d\tau.$$

Нагадаємо, що в теорії параболічних рівнянь функція u_0 називається потенціалом Пуассона, а функція u_1 — потенціалом простого шару.

Припустимо a priori, що невідома щільність $V(s,t,\varphi)$ у потенціалі u_1 неперервна для $s \in [0,t)$. Підставляючи вираз для $u(s,x,t)$ з (11) в умову (5) і використовуючи при цьому формулу стрибка для потенціалу простого шару (див. наприклад, [5, гл. II, §3]), отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно V

$$V(s,t,\varphi) = \int\limits_s^t K(s,\tau)V(\tau,t,\varphi)d\tau + \psi(s,t,\varphi), \quad 0 \le s < t \le T, \tag{13}$$

де

$$\begin{gathered}
K(s,\tau) = b(s,0)\Big(\tfrac{\partial Z_1}{\partial x}(s,0,\tau,0) - \gamma_0(s)G(s,0,\tau,0) - \\
- \int\limits_D \left[G(s,0,\tau,0) - G(s,y,\tau,0)\right]\mu_0(s,dy)\Big), \\
\psi(s,t,\varphi) = b(s,0)\Big(\tfrac{\partial u_0(s,0,t)}{\partial x} - \gamma_0(s)u_0(s,o,t) - \\
- \int\limits_D \left[u_0(s,0,t) - u_0(s,y,t)\right]\mu_0(s,dy)\Big), \\
\gamma_0(s) = \tfrac{\gamma(s)}{q(s)}, \quad \mu_0(s,dy) = \tfrac{\mu(s,dy)}{q(s)}.
\end{gathered}$$

Зауважимо, що оскільки функція $q(s)$ додатна, неперервна на відрізку $[0,T]$, то для функції γ_0 та міри μ_0 виконуються властивості а), б).

При побудові оцінок для ядра $K(s,\tau)$ та функції $\psi(s,t,\varphi)$, певну складність становить лише оцінювання інтегральних членів, що входять до їх виразів. Оцінки для всіх інших доданків легко встановлюються з використанням нерівностей (6) та (9). Розглянемо спочатку функцію $\psi(s,t,\varphi)$, і відповідний інтеграл по мірі μ_0 позначимо через

$I(s,t,\varphi)$. Подамо цей інтеграл у вигляді

$$I(s,t,\varphi)=\int\limits_{D}\left[u_0(s,0,t)-u_0(s,y,t)\right]\mu_0(s,dy)=$$

$$=\int\limits_0^1\mu_0(s,dy)\int\limits_{\mathbb{R}^1}[G(s,y,t,z)-G(s,0,t,z)]\varphi(z)dz+$$

$$+\int\limits_1^\infty\mu_0(s,dy)\int\limits_{\mathbb{R}^1}[G(s,y,t,z)-G(s,0,t,z)]\varphi(z)dz=I_1+I_2. \tag{14}$$

У виразі для I_1 розглянемо різницю $G(s,y,t,z)-G(s,0,t,z)$ і розпишемо її за формулою Лагранжа

$$G(s,y,t,z)-G(s,0,t,z)=\left.\frac{\partial G(s,x,t,z)}{\partial x}\right|_{x=\theta y}\cdot y,$$

де θ — деяке число з інтервалу $(0,1)$. Далі, використовуючи нерівність (6) при $r=0$ і $p=1$, отримуємо оцінку

$$|G(s,y,t,z)-G(s,0,t,z)|\le c\cdot y(t-s)^{-1}\exp\left\{-h\frac{(x-z)^2}{t-s}\right\}\Bigg|_{x=\theta y}\le$$

$$\le c\cdot y(t-s)^{-1}\left[\exp\left\{-h\frac{(y-z)^2}{t-s}\right\}+\exp\left\{-h\frac{z^2}{t-s}\right\}\right]. \tag{15}$$

Враховуючи (15) і умову б), знаходимо оцінку для I_1:

$$|I_1|\le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

де c — деяка додатна стала. Надалі позначення c буде використовуватись для всіх додатних сталих, конкретні значення яких нас не цікавлять.

З оцінки (6) при $r=0,\ p=0$ і умови б) відразу випливає, що для I_2 справджується нерівність

$$|I_2|\le c\|\varphi\|. \tag{17}$$

Об'єднуючи (16) і (17), знаходимо оцінку для інтеграла I:

$$|I(s,t,\varphi)|\le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}},\quad 0\le s<t\le T. \tag{18}$$

Звідси та з нерівностей (6), застосованих до решти членів, що входять до виразу для функції ψ, випливає наступна оцінка

$$|\psi(s,t,\varphi)| \le c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 \le s < t \le T, \tag{19}$$

де c_0 — деяка додатна стала.

Розглянемо ядро $K(s,\tau)$ рівняння (13). Запишемо його у вигляді

$$K(s,\tau) = K_1(s,\tau) + K_2(s,\tau), \quad 0 \le s < \tau < t \le T, \tag{20}$$

де

$$K_1(s,\tau) = b(s,0)\bigg(\frac{\partial Z_1}{\partial x}(s,0,\tau,0) - \gamma_0(s)G(s,0,\tau,0) -$$
$$- \int\limits_{\delta}^{\infty}[G(s,0,\tau,0) - G(s,y,\tau,0)]\mu_0(s,dy) -$$
$$- \int\limits_{0}^{\delta}[Z_1(s,0,\tau,0) - Z_1(s,y,\tau,0)]\mu_0(s,dy)\bigg),$$
$$K_2(s,\tau) = -b(s,0)\int\limits_{0}^{\delta}[Z_0(s,0,\tau,0) - Z_0(s,y,\tau,0)]\mu_0(s,dy).$$

Тут δ — довільне додатне число. Застосовуючи ті самі міркування, що й при оцінюванні функції ψ, знаходимо наступні оцінки для K_1 та K_2:

$$|K_1(s,\tau)| \le c_1(\delta)(\tau-s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}, \quad |K_2(s,\tau)| \le c_1(\delta)(\tau-s)^{-1}, \tag{21}$$

де $c_1(\delta)$ — додатна стала, що залежить від вибору δ.

Зважаючи на неінтегровну особливість ядра $K(s,\tau)$, ми не можемо стверджувати, що рівняння (13) має розв'язок. Доведемо, що розв'язок цього рівняння все ж таки існує і його можна знайти за допомогою методу послідовних наближень, тобто подати у вигляді суми функціонального ряду

$$V(s,t,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{(k)}(s,t,\varphi), \quad 0 \le s < t \le T, \tag{22}$$

де

$$V^{(0)}(s,t,\varphi)=\psi(s,t,\varphi),\quad V^{(k)}(s,t,\varphi)=\int\limits_s^t K(s,\tau)V^{(k-1)}(\tau,t,\varphi)d\tau,$$
$k=1,2,\ldots.$

Знайдемо оцінку для $V^{(1)}(s,t,\varphi)$. Для цього проведемо наступні перетворення:

$$V^{(1)}(s,t,\varphi)=\int\limits_s^t K(s,\tau)V^{(0)}(\tau,t,\varphi)d\tau=\int\limits_s^t K_1(s,\tau)V^{(0)}(\tau,t,\varphi)d\tau+$$
$$+\int\limits_s^t K_2(s,\tau)V^{(0)}(\tau,t,\varphi)d\tau=V_1^{(1)}+V_2^{(1)}. \tag{23}$$

З нерівностей (19) та (21) отримуємо оцінку для першого доданка у виразі (23):

$$\left|V_1^{(1)}(s,t,\varphi)\right|\le c_0c_1(\delta)\|\varphi\|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}(t-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}, \tag{24}$$

де $c_0,\ c_1(\delta)$ — сталі з (19) і (21) відповідно.

Оцінимо $V_2^{(1)}(s,t,\varphi)$.

$$\left|V_2^{(1)}\right|\le c_0B\|\varphi\|\tfrac{1}{\sqrt{2\pi b}}\Big|\int\limits_s^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}d\tau\times$$
$$\times\int\limits_0^\delta\left(\exp\left\{\tfrac{-y^2}{2b\cdot(\tau-s)}\right\}-1\right)\mu_0(s,dy)\Big|=c_0B\|\varphi\|\tfrac{1}{\sqrt{2\pi b}}\times$$
$$\times\Big|\int\limits_s^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}d\tau\int\limits_0^\delta\mu_0(s,dy)\int\limits_0^1\tfrac{\partial}{\partial\theta}\exp\left\{\tfrac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-s)}\right\}d\theta\Big|=$$
$$=c_0B\|\varphi\|\tfrac{1}{2b\sqrt{2\pi b}}\Big|\int\limits_s^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-s)^{-\frac{3}{2}}d\tau\times$$
$$\times\int\limits_0^\delta y\mu_0(s,dy)\int\limits_0^1 y\exp\left\{\tfrac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-s)}\right\}d\theta\Big|=c_0B\|\varphi\|\tfrac{1}{2b\sqrt{2\pi b}}\times$$
$$\times\Big|\int\limits_0^\delta y\mu_0(s,dy)\int\limits_0^1 ye^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(t-s)}}d\theta\int\limits_s^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-s)^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(t-s)}\frac{t-\tau}{\tau-s}}d\tau\Big|=$$
$$=c_0B\|\varphi\|\tfrac{1}{2b\sqrt{2\pi b}(t-s)}\left|\int\limits_0^\delta y\mu_0(s,dy)\int\limits_0^1 ye^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(t-s)}}d\theta\int\limits_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(t-s)}\cdot z}dz\right|\le$$
$$\le c_0B\|\varphi\|\tfrac{1}{2b\sqrt{t-s}}\int\limits_0^\delta y\mu_0(s,dy)\int\limits_0^1\theta^{-\frac{1}{2}}d\theta\le c_0c_2(\delta)\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

де c_0 — стала з (19), $c_2(\delta) = \frac{B}{b} \max\limits_{s\in[0,T]} \int\limits_0^\delta y\mu_0(s, dy)$. Відзначимо, що існування максимуму функції $F_\delta(s) = \int\limits_0^\delta y\mu_0(s, dy)$ на відрізку $[0, T]$ випливає з властивості б) міри μ_0. Крім того, згідно з твердженням теореми Діні для множини функцій, залежних від параметра, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta_0 > 0$, для якого справджується нерівність: $c_2(\delta_0) = \frac{B}{b} \max\limits_{s\in[0,T]} F_{\delta_0}(s) \le \varepsilon$. Виберемо $\delta = \delta_0$ у такий спосіб, щоб $c_2(\delta_0) < 1$ і позначимо $c_1 = c_1(\delta_0),\ c_2 = c_2(\delta_0)$.

Об'єднуючи (24) і (25), знаходимо оцінку для $V_1(s, t, \varphi)$:

$$\left|V^{(1)}(s,t,\varphi)\right| \le c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\left[c_1\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}(t-s)^{\frac{\alpha}{2}} + c_2\right], \qquad (26)$$

Методом математичної індукції встановлюємо нерівність:

$$\left|V^{(k)}(s,t,\varphi)\right| \le c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{k} C_k^m \cdot a^{(k-m)}c_2^m, \quad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (27)$$

де

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad a^{(m)} = \frac{\left(c_1 T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^m \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m\alpha}{2}\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Враховуючи (27), маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|V^{(k)}(s,t,\varphi)\right| \le c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{(k-m)}c_2^m =$$

$$= c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}\sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m}^m c_2^m =$$

$$= c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)} \cdot \frac{1}{(1-c_2)^{k+1}} =$$

$$= c_0\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c_1}{1-c_2}T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{1+k\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{1-c_2}\ . \qquad (28)$$

Оцінка (28) забезпечує рівномірну збіжність ряду (22) при $0 \le s < t \le T$. Це означає, що функція $V(s,t,\varphi)$ існує, до того ж вона є неперервною для $s \in [0,t)$ і для неї справджується нерівність:

$$|V(s,t,\varphi)| \le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 \le s < t \le T. \tag{29}$$

Відзначимо, що наше припущення a priori щодо V підтверджено. З нерівностей (6) і (29) випливає існування розв'язку задачі (3)–(5), який зображується у вигляді (11) і для нього виконується оцінка (12). Використовуючи співвідношення (6)–(9) і оцінку (29), доводимо, що побудований розв'язок $u(s,x,t)$ належить до класу (10). □

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, то задача* (3)–(5) *не може мати більш, ніж один класичний розв'язок.*

Доведення. Нехай $u^{(1)}(s,x,t)$ та $u^{(2)}(s,x,t)$ — розв'язки задачі (3)–(5) з класу (10). Тоді функція $u(s,x,t) = u^{(1)}(s,x,t) - u^{(2)}(s,x,t)$ є розв'язком наступної параболічної другої крайової задачі:

$$\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial s} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 u(s,x,t)}{\partial x^2} + a(s,x)\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial x} = 0,$$
$$0 \le s < t \le T, \ x \in D, \tag{30}$$

$$\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = 0, \quad x \in D, \tag{31}$$

$$\frac{\partial u(s,0,t)}{\partial x} - \gamma_0(s)u(s,0,t) = \upsilon(s,t), \quad 0 \le s < t \le T, \tag{32}$$

де

$$\upsilon(s,t) = \int_D \Big[\big(u^{(1)}(s,0,t) - u^{(2)}(s,0,t)\big) - \\ - \big(u^{(1)}(s,y,t) - u^{(2)}(s,y,t)\big)\Big]\mu_0(s,dy).$$

Тут функція γ_0 та міра μ_0 ті ж самі, що й в доведенні теореми 1. Ще раз відзначимо, що вони мають властивості а), б). Оскільки функції $u^{(1)}$ та $u^{(2)}$ належать до класу (10), то, враховуючи властивість б) міри μ_0, можна стверджувати, що функція $\upsilon(s,t)$ неперервна для $s \in [0,t)$ і для неї виконується оцінка

$$|\upsilon(s,t)| \le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отже, існує єдиний розв'язок задачі (30)–(32) і він зображується у вигляді (див. [10, гл. V])

$$u(s,x,t) = \int_s^t G(s,x,\tau,0)V(\tau,t)d\tau,$$

де функція V однозначно визначається з умови (32). Це означає, що для $u^{(1)} - u^{(2)}$ справедливе зображення

$$u^{(1)}(s,x,t) - u^{(2)}(s,x,t) = \int_s^t G(s,x,\tau,0)V(\tau,t)d\tau. \tag{33}$$

Тоді, з (32), (33) і формули стрибка для потенціалу простого шару, для функції V отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (13) у якому функція $\psi \equiv 0$. Враховуючи те, що єдиним розв'язком цього рівняння є $V(s,t) \equiv 0$, з (33) отримуємо

$$u^{(1)}(s,x,t) \equiv u^{(2)}(s,x,t),$$

що й треба було довести. $\square$

Розглянемо двопараметричну сім'ю операторів T_{st}, $0 \le s < t \le T$, які діють на множині $C_b(\mathbb{R})$:

$$T_{st}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} G(s,x,t,y)\varphi(y)dy + \int_s^t G(s,x,\tau,0)V(\tau,t,\varphi)d\tau, \tag{34}$$

де функція V є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра другого роду (13).

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді двопараметрична сім'я лінійних операторів* T_{st}, $0 \le s < t \le T$, *визначена рівністю* (34), *описує неоднорідний процес Феллера на* $\overline{D}$ *такий, що в* D *він збігається з дифузійним процесом, керованим оператором* A_s *з* (1), *а його поведінка на* ∂D *визначається крайовою умовою* (2). *Якщо* $P(s,x,t,dy)$ — *перехідна ймовірність цього процесу, то для всіх* $\varphi \in C_b(\overline{D})$ *справедлива рівність*

$$T_{st}\varphi(x) = \int_{\overline{D}} P(s,x,t,dy)\varphi(y). \tag{35}$$

Доведення. Для довення теореми достатньо показати ([4, с. 79, теорема 2.1]), що сім'я лінійних операторів $T_{st},\ 0 \le s < t \le T$, в просторі $C_b(\mathbb{R})$ має такі властивості:

i) Якщо $\varphi_n \in C_b(\mathbb{R})$ при $n = 1, 2, \dots,\ \sup\limits_{n,\,x} |\varphi_n(x)| < \infty$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, то для всіх $0 \le s < t \le T,\ x \in \overline{D}$ виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} T_{st}\varphi_n(x) = T_{st}\varphi(x)$;

ii) оператори T_{st} стискуючі, тобто $|T_{st}\varphi(x)| \le \|\varphi\|$, для всіх $0 \le s < t \le T,\ x \in \overline{D}$;

iii) якщо $\varphi(x) \ge 0$ для всіх $x \in \overline{D}$, то й $T_{st}\varphi(x) \ge 0$, для всіх $0 \le s < t \le T,\ x \in \overline{D}$;

iv) сім'я операторів T_{st} є мультиплікативною, тобто для всіх $0 \le s < u < t \le T$, $x \in \overline{D}$ виконується співвідношення

$$T_{st}\varphi(x) = T_{su}T_{ut}\varphi(x). \tag{36}$$

Властивість i), що є наслідком теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, свідчить про те, що оператори T_{st} є неперервними не тільки відносно сильної збіжності φ_n до φ при $n \to \infty$, а й такої, про яку йдеться в умові i). Враховуючи дану властивість, не обмежуючи загальності, всі наступні міркування будемо проводити в припущенні, що функція φ фінітна.

Доведемо, що сім'я операторів T_{st} є стискуючою. Для цього зафіксуємо довільне $t \in (0, T]$ і для будь-якої фінітної функції $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, позначимо через M та m — максимум та мінімум $T_{st}\varphi(x)$ в області $(s, x) \in [0, t] \times \overline{D}$ відповідно. Припустимо, що $M > \|\varphi\|$. Тоді, згідно з принципом максимуму (див. [10, гл. II, §1, 2]), значення M досягається при $(s, x) \in (0, t) \times \{0\}$. Зафіксуємо $s_0 \in (0, t)$, для якого $T_{s_0 t}\varphi(0) = M$. Тоді, враховуючи теорему 14 з [10, с. 69], бачимо, що виконання крайової умови (2) при $s = s_0$ є неможливим. Отримана суперечність вказує на те, що $M \le \|\varphi\|$. Аналогічно показуємо, що $m \ge -\|\varphi\|$. Отже, для всіх $0 \le s < t \le T,\ x \in \overline{D}$ виконується нерівність: $|T_{st}\varphi(x)| \le \|\varphi\|$, що й треба було довести.

Властивість iii) доводиться аналогічно до ii) з використанням принципу максимуму.

Для доведення iv) зауважимо, що функція $T_{su}T_{ut}\varphi(x),\ 0 \le s < u < t \le T,\ x \in \overline{D}$, є розв'язком задачі (3)–(5) з класу (10) і цей розв'язок єдиний, що й забезпечує виконання рівності (36).

З умов i)–iv) випливає твердження теореми. □

[1] *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — **77**. — P. 1–31.

[2] *Вентцель А.Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // ДАН СССР. Математика. — 1956. — **111**, №2. — С. 269–272.

[3] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы и связанные с ними задачи анализа // УМН. — 1960. — **15**, №2(92) — С. 3—24

[4] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 432 с.

[5] *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. — К.: Інститут математики НАН України, 1995.

[6] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[7] *Кончук П.П., Копитко Б.І.* Про напівгрупу операторів Феллера, яка описує процес дифузії на півпрямій з нелокальною граничною умовою // Математичний вісник НТШ. — 2007. — **4**. — С. 129–138.

[8] *Скубачевский А.Л.* О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов // Докл. АН. — 1995. — **341**, № 2. — С. 173–176.

[9] *Taira K., Favini A. Romanelli S.* Feller semigroups and degenerate elliptic operators with Wentzell boundary conditions // Studia Math. — 2001. — **145**, № 1. — P. 17–53.

[10] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 428 с.

INHOMOGENEOUS DIFFUSION PROCESSES ON A HALF-LINE, GENERATED BY THE DIFFERENTIAL OPERATOR WITH FELLER-WENTZEL BOUNDARY CONDITION

Roman SHEVCHUK

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

e-mail: *r.v.shevchuk@gmail.com*

Using analytical method, we construct a multiplicative operator family, which describes an inhomogeneous diffusion process, on a half-line, with a rather general Feller-Wentzel boundary condition.