НАПІВГРУПИ ЗСУВІВ В АЛГЕБРІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ ШВАРЦА ПОВІЛЬНОГО РОСТУ

©2011 р. *Сергій ШАРИН*

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *sharynsir@yahoo.com*

Редакція отримала статтю 5 вересня 2011 р.

Нехай $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ — простір неперервних поліномів на просторі $\mathcal{S}'_+$ розподілів Шварца повільного росту з носіями в $\mathbb{R}^d_+$, $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ — сильно спряжений до нього простір. У цій статті ми вивчаємо напівгрупи зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$, що діють в просторах $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, і явно виписуємо вигляд їх генераторів.

Вступ

Ряд сучасних проблем квантової теорії поля (див. наприклад [1]) потребують дослідження нелінійних узагальнень поняття розподілів типу Шварца чи ультрарозподілів типу Рум'є, що традиційно визначаються як лінійні неперервні функціонали над певними просторами гладких функцій. У роботах [2, 3] побудовано поліноміальне розширення ультрарозподілів Рум'є та досліджено відповідне поліноміальне перетворення Лапласа. При тому є істотним, що досліджувані поліноміальні ультрарозподіли мають додаткову алгебраїчну структуру. Як

УДК: 517.98; MSC 2000: 46G20, 46F25

Ключові слова і фрази: поліноми на нескінченновимірному просторі, повільно зростаючі розподіли Шварца, напівгрупа зсувів

Робота підтримана грантом ДФФД України № Ф35/531-2011

відомо, лінійні розподіли та ультрарозподіли не утворюють алгебри. Власне наявність множення в просторах поліноміальні ультрарозподілів відрізняє наш підхід від інших відомих узагальнень класичних просторів розподілів [4, 5, 6].

Нехай $\mathcal{S}'_+ := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)$ — простір розподілів Шварца повільного росту з носіями в $\mathbb{R}^d_+$, $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ — простір неперервних поліномів на $\mathcal{S}'_+$, $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ — його сильно спряжений простір. У даній статті, яка є продовженням праці [7], ми досліджуємо властивості топологічних алгебр $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. Елементи простору $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називаємо поліноміальними розподілами Шварца повільного росту. Їх можна розуміти як поліноміальне узагальнення лінійних розподілів Шварца повільного росту, оскільки $\mathcal{S}'_+ \subset \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. У теоремі 3.1 ми обчислюємо генератори узагальнених напівгруп зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$, що діють в просторах $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ та $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, а в теоремі 3.2 описуємо властивості цих генераторів, які є неперервними диференціюваннями на відповідних алгебрах.

1 Попередні відомості і означення

Всюди в статті ми будемо використовувати загальноприйняті позначення: $\mathbb{R}^d$ і $\mathbb{C}^d$ — дійсний і комплексний евклідовий d-вимірний простір відповідно, $\mathbb{R}^d_+ := [0,\infty) \times \cdots \times [0,\infty)$ — додатний конус в $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^d_+ := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$.

Для довільних векторів $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ і $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ з $\mathbb{R}^d$ запис $\mu \prec \nu$ означає $\mu_1 < \nu_1, \ldots, \mu_d < \nu_d$. Для будь-яких $\mu \prec \nu$ нехай $[\,\mu, \nu\,] := [\,\mu_1, \nu_1\,] \times \ldots \times [\,\mu_d, \nu_d\,]$ позначає d-вимірний паралелепіпед. У подальшому для будь-яких $t, \mu, \nu \in \mathbb{R}^d$ нехай $\nu \to \infty$ означає $\nu_i \to \infty$, $t \in [\,\mu, \nu\,]$ означає $t_i \in [\,\mu_i, \nu_i\,]$ для всіх $i = 1, \ldots, d$ і $|t| := \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_d^2}$.

Для довільного мультиіндекса $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ позначимо $|k| := k_1 + \cdots + k_d$, $\partial^k := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_d^{k_d}$, де $\partial_j^{k_j} := (-\mathfrak{i})^{k_j} \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$; якщо $k_j = 1$ ми писатимемо для простоти $\partial_j := \partial_j^1$ і $\partial := \partial_1 \cdots \partial_d$; для довільного $t \in \mathbb{R}^d$ позначимо $t^k := t_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot t_d^{k_d}$.

Нехай X, Y — локально опуклі (л.о.) комплексні векторні простори. Позначимо $\mathscr{L}(X, Y)$ простір всіх неперервних лінійних операторів з X в Y, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах в X. Для простоти писатимемо $\mathscr{L}(X)$ замість $\mathscr{L}(X, X)$.

Для позначення композиції операторів в $\mathscr{L}(X)$ ми будемо використовувати символ $\circ$. Для довільного $B \in \mathscr{L}(X)$ комутантом оператора B, який ми позначатимемо $\big[B\big]^c$, називається підмножина в $\mathscr{L}(X)$ всіх операторів, які комутують з B. Сильно спряжений простір до X ми будемо позначати $X' := \mathscr{L}(X, \mathbb{C})$. Дію функціоналу $f \in X'$ на елемент $x \in X$ ми будемо записувати $\big\langle\, f, x \,\big\rangle$, а відповідну двоїстість — $\big\langle\, X', X \,\big\rangle$.

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору X будемо використовувати позначення $\otimes^n X$ (відповідно $\otimes^n_s X$). Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) в проективній л.о. топології позначатимемо $\otimes_{\mathfrak{p}}$ (відповідно $\otimes_{s,\mathfrak{p}}$).

Всюди в роботі декартовий локально опуклий добуток симетричних тензорних степенів $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$ простору X ми будемо позначати символом $\mathop{\times}\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$, а пряму локально опуклу суму — $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X$; аналогічно для простору X'. Зауважимо, що елементи прямої суми містять лише скінченну кількість доданків.

Поліноми на локально опуклих просторах. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $\mathscr{L}(^nX, \mathbb{C})$ простір всіх неперервних n-лінійних функціоналів, визначених на декартовому степені $^nX := X \times \cdots \times X$. Розглянемо в $\mathscr{L}(^nX, \mathbb{C})$ підпростір $\mathscr{L}_s(^nX, \mathbb{C})$ тих функціоналів, які симетричні відносно перестановки змінних. Визначимо діагональне відображення як природне вкладення $\Delta_n : X \ni x \longmapsto (x, \ldots, x) \in {}^nX$. Відображення P називають неперервним n-однорідним поліномом, якщо знайдеться $F \in \mathscr{L}(^nX, \mathbb{C})$ таке, що $P(x) = F(\Delta_n(x))$. Простір усіх неперервних n-однорідних поліномів позначимо $\mathsf{P}_n(X)$. За означенням приймемо $\mathsf{P}_0(X) = \mathbb{C}$. Якщо розглянути природне вкладення $\otimes_n \colon X \times \ldots \times X \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \otimes^n_{\mathfrak{p}} X$, то ізоморфізм $(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} X)' \ni p_n \longmapsto P_n := p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in \mathsf{P}_n(X)$ однозначно визначає n-однорідний поліном як композицію

$$P_n(x) = \big\langle\, p_n, \otimes^n x \,\big\rangle, \quad \text{де } \otimes^n x := x \otimes \cdots \otimes x = (\otimes_n \circ \Delta_n)x, \quad x \in X. \tag{1}$$

Простір $\mathsf{P}(X) = \Big\{ P = \sum\limits_{n=0}^{m} P_n : P_n \in \mathsf{P}_n(X),\ m \in \mathbb{N} \Big\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X, називається простором неперервних поліномів на X; $\mathsf{P}(X)$ є топологічною алгеброю з одиницею відносно множення $P(x) \cdot Q(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum\limits_{m=0}^{n} P_m(x) \cdot Q_{n-m}(x)$.

Для детальнішого ознайомлення з основами теорії поліномів на нескінченновимірних просторах ми рекомендуємо книгу [8].

Символами $\mathsf{P}'(X)$, $\mathsf{P}'_n(X)$ ми будемо позначати сильно спряжені простори до $\mathsf{P}(X)$, $\mathsf{P}_n(X)$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $\mathsf{P}(X')$, $\mathsf{P}_n(X')$ і сильно спряжених до них просторів $\mathsf{P}'(X')$, $\mathsf{P}'_n(X')$ ми вважаємо визначеними для простору X'.

Багатопараметричні напівгрупи. Під d-параметричною напівгрупою (див. [9], [10]) обмежених лінійних операторів на банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ з генератором $(-\mathfrak{i}A)$, де $A = (A_1, \ldots, A_d)$, ми розуміємо відображення

$$U_t\colon \mathbb{R}^d_+ \ni (t_1, \ldots, t_d) = t \longmapsto e^{-\mathfrak{i}tA} := e^{-\mathfrak{i}(t_1A_1+\cdots+t_dA_d)} \in \mathscr{L}(E)$$

таке, що $e^{-\mathfrak{i}tA}\,|_{t=0} = I$ — одиничний оператор в E і $e^{-\mathfrak{i}(t+s)A} = e^{-\mathfrak{i}tA}e^{-\mathfrak{i}sA}$ для всіх $t, s \in \mathbb{R}^d_+$. Кожній напівгрупі $e^{-\mathfrak{i}tA}$ можна поставити у відповідність 1-параметричні напівгрупи $U_{t_j}: [0,\infty) \ni t_j \longmapsto U_{(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0)} = e^{-\mathfrak{i}t_jA_j} \in \mathscr{L}(E)$, $j = 1, \ldots, d$. При цьому $U_t = U_{t_1} \circ \ldots \circ U_{t_d}$, а напівгрупи U_{t_j} комутують одна з одною. Нехай $(-\mathfrak{i}A_j)$ — генератор напівгрупи U_{t_j}, який визначають наступним чином

$$-\mathfrak{i}A_jx = -\mathfrak{i}\lim_{t_j\to+0}\frac{U_{t_j}x - x}{t_j} = \partial_j U_{t_j}x\big|_{t_j=+0}, \qquad x \in \mathfrak{D}(A_j),$$

де $\mathfrak{D}(A_j)$ складається з усіх $x \in E$, для яких вказана границя існує. Напівгрупа U_t називається (C_0)-напівгрупою, якщо для всіх $x \in E$ справджується рівність $\lim\limits_{\mathbb{R}^d_+\ni t\to 0}\|U_tx - x\| = 0$.

2 Поліноміальне узагальнення розподілів Шварца повільного росту з носіями в $\mathbb{R}^d_+$

Нехай $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — множина нескінченно диференційованих функцій $\varphi(t)$, що спадають при $|t| \to \infty$ разом з усіма похідними швидше, ніж будь-яких степінь $|t|^{-1}$. Топологію в $\mathcal{S}$ введемо за допомогою зліченного набору норм

$$\|\varphi\|_m := \sup_{t\in\mathbb{R}^d}\sup_{|k|\le m}\left(1+|t|^2\right)^{\frac{m}{2}}|\partial^k\varphi(t)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Лінійна множина $\mathcal{S}$ із введеною топологією називається простором швидко спадних функцій Шварца [11].

Для кожного m позначимо через $\mathcal{S}_m := \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)$ поповнення $\mathcal{S}$ за нормою $\|\cdot\|_m$, тоді $\mathcal{S}_m$ — банаховий простір. Очевидно, що для довільної $\varphi \in \mathcal{S}$ виконуються нерівності $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \ldots$, крім того справедливі цілком неперервні вкладення $\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \ldots$, відносно яких $\mathcal{S}$ може бути представлений у вигляді л.о. проективної границі банахових просторів $\mathcal{S} \simeq \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{pr} \mathcal{S}_m$ (див. [11]).

Нехай $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — сильно спряжений до $\mathcal{S}$ простір розподілів Шварца повільного росту. Відомо [11, 12], що $\mathcal{S}$ є ядерним (F) простором, а $\mathcal{S}'$ — ядерним (DF) простором.

Розглянемо в $\mathcal{S}'$ замкнутий підпростір $\mathcal{S}'_+ := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)$ розподілів з носіями в $\mathbb{R}^d_+$. Простір $\mathcal{S}'_+$ є згортковою алгеброю з одиницею δ, де $\left\langle \delta, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \boldsymbol{\varphi}(0)$ — функціонал Дірака. Нехай $\mathcal{S}'^{\perp}_+ := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)^{\perp}$ — ортогональне доповнення $\mathcal{S}'_+$ відносно двоїстості $\left\langle \mathcal{S}', \mathcal{S} \right\rangle$, тоді фактор простір

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_+) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \big/ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)^{\perp} = \left\{ \boldsymbol{\varphi} := \varphi + \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)^{\perp} \colon \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_+) \right\} \tag{2}$$

є двоїстим до $\mathcal{S}'_+$. Для простоти писатимемо $\mathcal{S}_+ := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_+)$.

З теорії двоїстості та теорії ядерних просторів [12, 13] випливає, що $\mathcal{S}'_+$ є ядерним (DF) простором, а $\mathcal{S}_+$ — ядерним (F) простором. Зауважимо, що у цьому випадку правильними є топологічні ізоморфізми (див. [12, Теор. 9.9]) $(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+)' \simeq \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+$ і $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+ \simeq (\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+)'$.

Нехай $\vartheta_+ \colon \mathbb{R}^d \ni t \longmapsto \vartheta_+(t) := \vartheta(t_1) \cdots \vartheta(t_d)$ — характеристична функція конуса $\mathbb{R}^d_+$, де ϑ позначає звичайну функцію Хевісайда. Ядро оператора множення

$$\varTheta \colon \mathcal{S} \ni \varphi \longmapsto \vartheta_+ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{3}$$

збігається з $\mathcal{S}'^{\perp}_+$, яке, очевидно, є замкнутим ідеалом в $\mathcal{S}$. Отже, фактор простір $\mathcal{S}_+$ також є топологічною алгеброю і справедливим є ізоморфізм $\mathcal{S}_+ \simeq \varTheta[\mathcal{S}]$ топологічних алгебр. Якщо розширити оператор (3) на $L^2(\mathbb{R}^d)$, то отримаємо, що фактор простір $\mathcal{S}_+$ щільно вкладений у підпростір $L^2(\mathbb{R}^d_+) := \varTheta\left[L^2(\mathbb{R}^d)\right]$ і є мультиплікативною підалгеброю в $L^2(\mathbb{R}^d_+)$. Таким чином, будь-який елемент з $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$ можна розуміти як функцію $\vartheta_+ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ або як регулярний розподіл з $\mathcal{S}'_+$. Отже, двоїстість $\left\langle \mathcal{S}', \mathcal{S} \right\rangle$ породжує нову дуальність $\left\langle \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \right\rangle$ (див. [12, IV.4]).

Якщо звузити оператор Θ на $\mathcal{S}_m$, то отримаємо

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d_+) := \Theta[\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)] \simeq \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d) \big/ \left(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+)^\perp \cap \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d)\right). \tag{4}$$

Крім того, простір $\mathcal{S}_+$ можна записати у вигляді проективної границі

$$\mathcal{S}_+ \simeq \lim_{m\to\infty} \operatorname{pr} \mathcal{S}_{+m}, \tag{5}$$

відносно компактних вкладень $\mathcal{S}_{+m} \subset \mathcal{S}_{+\widetilde{m}}$, $m > \widetilde{m}$, де $\mathcal{S}_{+m} := \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^d_+)$.

Для довільного $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ позначимо $\boldsymbol{\partial}^k_+ := \boldsymbol{\partial}^{k_1}_1 \cdots \boldsymbol{\partial}^{k_d}_d$, $\boldsymbol{\partial}^{k_j}_j \boldsymbol{\varphi} := \vartheta_+ \partial^{k_j}_j \varphi$, де $\mathcal{S}_+ \ni \boldsymbol{\varphi} = \varphi + \mathcal{S}'^{\perp}_+$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Для $k = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^d_+$ нехай $\boldsymbol{\partial}_+ := \boldsymbol{\partial}_1 \cdots \boldsymbol{\partial}_d$, де $\boldsymbol{\partial}_j \boldsymbol{\varphi} := \vartheta_+ \partial_j \varphi$. Тоді узагальнені частинні похідні ∂^k_+ функціоналів з $\mathcal{S}'_+$ відносно дуальності $\left\langle \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \right\rangle$ можуть бути визначені звичайним способом $\left\langle \partial^k_+ f, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = (-1)^{|k|} \left\langle f, \boldsymbol{\partial}^k_+ \boldsymbol{\varphi} \right\rangle$, $f \in \mathcal{S}'_+$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$. Нехай $\partial_+ := \partial'_1 \cdots \partial'_d$, де $\partial'_j := -\boldsymbol{\partial}_j$ — оператори, спряжені до $\boldsymbol{\partial}_j$ відносно дуальної пари $\left\langle \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \right\rangle$, $j = 1, \ldots, d$.

Фактор топологія простору $\mathcal{S}_+$ може бути визначена за допомогою зліченного набору норм $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{+m} := \sup_{t\in\mathbb{R}^d_+} \sup_{|k|\le m} (1 + |t|^2)^{\frac{m}{2}} |\boldsymbol{\partial}^k_+ \boldsymbol{\varphi}(t)|$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, $\quad m \in \mathbb{Z}_+$.

Ідеал $\mathcal{S}'^{\perp}_+ \subset \mathcal{S}$ є інваріантним відносно зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$, тому діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_+ \ni \boldsymbol{\varphi} & \xrightarrow{T_s} & \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot + s) \in \mathcal{S}_+ \\ {\scriptstyle\Theta}\big\uparrow & & {\scriptstyle\Theta}\big\uparrow \\ \mathcal{S} \ni \varphi & \longrightarrow & \varphi(\,\cdot + s) \in \mathcal{S} \end{array}$$

визначає d-параметричну (C_0)-напівгрупу $T\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto T_s \in \mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$ зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^d_+$.

Умови $t \in \operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi}$ і $t - s \in \operatorname{supp}(T_s \boldsymbol{\varphi})$ еквівалентні. Таким чином, $\operatorname{supp}(T_s \boldsymbol{\varphi}) = (\operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi} - s) \cap \mathbb{R}^d_+$, де $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, $s \in \mathbb{R}^d_+$. Отже, нерівність $\|T_s \boldsymbol{\varphi}\|_{+m} \le \|\boldsymbol{\varphi}\|_{+m}$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$, правильна для всіх $s \in \mathbb{R}^d_+$. З регулярності проективної границі (5) випливає, що T є рівномірно обмеженою. Тому ця напівгрупа є рівномірно неперервною згідно з принципом рівномірної обмеженості. Вище наведені міркування можна підсумувати у вигляді наступного твердження.

Лема 2.1. *d-параметрична (C_0)-напівгрупа T є рівномірно неперервною на $\mathcal{S}_+$ і кожна похідна $\boldsymbol{\partial}_j$ є генератором відповідної 1-параметричної напівгрупи $[0, \infty) \ni s_j \longmapsto T_{s_j} := T_{(0,\ldots,0,s_j,0,\ldots,0)}$.*

Нехай $T'\colon \mathbb{R}^d_+ \ni s \longmapsto T'_s \in \mathscr{L}(\mathcal{S}'_+)$ позначає напівгрупу операторів, спряжених до T_s відносно дуальної пари $\langle\, \mathcal{S}'_+, \mathcal{S}_+ \,\rangle$.

Розглянемо простір $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ поліномів на $\mathcal{S}'_+$ і сильно спряжений до нього простір $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. Наведемо чотири твердження, які є наслідками доведених у роботі [3] теорем.

Наслідок 2.1. *Мають місце наступні топологічні ізоморфізми*

$$\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+ \overset{\Upsilon_{\mathcal{S}'_+}}{\simeq} \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+), \quad \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+ \overset{\Upsilon_{\mathcal{S}_+}}{\simeq} \mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+),$$

.

Кожен елемент $f = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$ на довільний $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$ діє за формулою

$$f(\boldsymbol{\varphi}) := \left\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n \,,\, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle\, f_n, \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \,\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n(\boldsymbol{\varphi}), \qquad (6)$$

де $P_n(\boldsymbol{\varphi})$ визначено формулою (1).

Елементи простору $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ ми називатимемо *поліноміальними розподілами Шварца повільного росту.* Їх можна розуміти як поліноми на просторі $\mathcal{S}_+$ в сенсі формули (6). Надалі, враховуючи ізоморфізм $\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}$, елементи $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ часто будемо записувати у вигляді $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$, де $f_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+ \simeq (\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+)'$, $f_0 \in \mathbb{C}^d$.

Наслідок 2.2. *Простори* $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *і* $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ *утворюють нову двоїстість* $\big\langle \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+), \mathsf{P}(\mathcal{S}'_+) \big\rangle$. *Причому, простір* $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ *неперервно і щільно вкладається в* $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$.

У просторі $\mathscr{L}\Big[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\Big]$ розглянемо підалгебру $\mathscr{L}_\Gamma\Big[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\Big]$ операторів, які залишають простори $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ інваріантними, тобто

$$\mathscr{L}_\Gamma\Big[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\Big] := \begin{pmatrix} \mathscr{L}[\otimes^0_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+] & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \mathscr{L}[\otimes^1_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+] & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathscr{L}[\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+] & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

де, очевидно, $\otimes^0_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+ = \mathbb{C}^d$ і $\otimes^1_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+ = \mathcal{S}_+$. Аналогічний сенс має позначення $\mathscr{L}_\Gamma\Big[\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+\Big]$.

Наслідок 2.3. *Пряма сума* $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+ = \big\{\varphi = \bigoplus\varphi_n\colon \varphi_n \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\big\}$ *є л.о. алгеброю відносно згортки* $\varphi\star\psi := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n}\varphi_m\otimes_s\psi_{n-m}\Big)$, *і відображення* $\big\{\bigoplus_n\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+,\star\big\}\xrightarrow{\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+}}\big\{\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+),\cdot\big\}$ *діє як ізоморфізм між згортковою і мультиплікативною алгебрами.*

Згортка простору $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$ може бути продовжена до згортки $f\star g := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\big(\sum\limits_{m=0}^{n}f_m\otimes_s g_{n-m}\big)$ в декартовому добутку $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\big(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+\big)$, який теж є згортковою алгеброю. Зауважимо, що одиницею цієї алгебри є елемент $1_p = (\mathbf{1},0,0,\dots)$, де $\mathbf{1} = (1,\dots,1)\in\mathbb{C}^d$, $1\in\mathbb{R}$. Множення алгебри $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ може бути єдиним чином продовжене до множення в $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, яке визначаємо формулою $(P\cdot Q)[\boldsymbol{\varphi}] = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n}P_m(\boldsymbol{\varphi})\cdot Q_{n-m}(\boldsymbol{\varphi})$, де $P = \bigtimes_n P_n$, $Q = \bigtimes_n Q_n \in \mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$, $P_n, Q_n \in \mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+)$.

Наслідок 2.4. *Простір* $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ *є топологічною алгеброю з одиницею і відображення* $\Big\{\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+,\star\Big\}\overset{\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}}{\simeq}\big\{\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+),\cdot\big\}$ *діє як ізоморфізм між згортковою і мультиплікативною алгебрами.*

3 Узагальнені напівгрупи зсувів вздовж $\mathbb{R}^d_+$

Нехай I_+ позначає одиничний оператор в $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+)$, а I'_+ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(\mathcal{S}'_+)$.

Теорема 3.1. (i) *Однопараметричні сім'ї* $\mathfrak{T}_j : 0 \le s_j \longmapsto \mathfrak{T}_{s_j}$, $j = 1,\dots,d$, *лінійних операторів, які визначені на згортковій алгебрі* $\Big\{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+,\star\Big\}$ *рівністю*

$$\big[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+}\mathfrak{T}_{s_j}\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}_+}(Q)\big](f) = Q(T'_{s_j}f),\quad Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}Q_n\in\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+),\quad f\in\mathcal{S}'_+,$$

де $Q_n = q_n\circ\otimes_n\circ\Delta_n\in\mathsf{P}_n(\mathcal{S}'_+)$, $q_n\in\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, *є одностайно неперервними* (C_0)*-напівгрупами алгебраїчних автоморфізмів. Їх генератори*

$\mathfrak{d}_j$ *належать підалгебрі* $\mathscr{L}_\Gamma\left[\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\right]$ *і на довільний елемент* $q=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}q_n\in\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+$, *де* $q=\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}_+}Q$, *діють за правилом*

$$\mathfrak{d}_jq=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathfrak{d}_jq_n,\quad \text{де}\quad \mathfrak{d}_jq_0:=0,\quad \mathfrak{d}_jq_n:=\sum_{k=1}^n {}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_jq_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тут ${}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j:=\underbrace{I_+\otimes\dots\otimes I_+\otimes\boldsymbol{\partial}_j}_{k}\otimes\underbrace{I_+\otimes\dots\otimes I_+}_{n-k}$.

(ii) *Однопараметричні сім'ї* $\mathfrak{T}'_j:0\le s_j\longmapsto\mathfrak{T}'_{s_j}$, $j=1,\dots,d$, *лінійних операторів, які на згортковій алгебрі* $\left\{\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+,\star\right\}$ *визначені рівністю*

$$\left[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}'_+}\mathfrak{T}'_{s_j}\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}'_+}(P)\right](\boldsymbol{\varphi})=P(T_{s_j}\boldsymbol{\varphi}),\quad P=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}P_n\in\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+),\quad \boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{S}_+,$$

де $P_n=p_n\circ\otimes_n\circ\Delta_n\in\mathsf{P}_n(\mathcal{S}_+)$, $p_n\in\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, *є одностайно неперервними* (C_0)*-напівгрупами алгебраїчних автоморфізмів. Їх генератори* $\mathfrak{d}'_j$ *належать підалгебрі* $\mathscr{L}_\Gamma\left[\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+\right]$ *і на довільний елемент* $p=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}p_n\in\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}'_+$, *де* $p=\widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}'_+}P$, *діють за правилом*

$$\mathfrak{d}'_jp=-\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathfrak{d}'_jp_n,\quad \text{де}\quad \mathfrak{d}'_jp_0:=0,\quad \mathfrak{d}'_jp_n:=\sum_{k=1}^n {}^n_k\partial'_jp_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тут позначено ${}^n_k\partial'_j:=\underbrace{I'_+\otimes\dots\otimes I'_+\otimes\partial'_j}_{k}\otimes\underbrace{I'_+\otimes\dots\otimes I'_+}_{n-k}$.

Доведення. З результатів роботи [14] випливає, що $\mathcal{S}_+\simeq\otimes^d_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}(\mathbb{R}^1_+)$, а, отже, і $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+\simeq\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\left(\otimes^d_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}(\mathbb{R}^1_+)\right)$ та $\mathcal{S}_{+m}\simeq\otimes^d_{\mathfrak{p}}\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^1_+)$, де $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1_+)$ визначається формулою (2), а $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^1_+)$ — формулою (4) при $d=1$. Простір $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1_+)$ можна представити як проективну границю $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1_+)\simeq\lim\mathrm{pr}_{m_i\to\infty}\mathcal{S}_{m_i}(\mathbb{R}^1_+)$ відносно цілком неперервних вкладень $\mathcal{S}_{m_i}(\mathbb{R}^1_+)\subset\mathcal{S}_{m_j}(\mathbb{R}^1_+)$, $m_i>m_j$. Використовуючи відому [15] властивість комутативності проективних границь із проективними тензорними добутками, з рівності (5) отримаємо

$$\begin{aligned}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\mathcal{S}_+&=\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\left(\lim_{m_1\to\infty}\mathrm{pr}\,S_{m_1}(\mathbb{R}^1_+)\otimes_{\mathfrak{p}}\dots\otimes_{\mathfrak{p}}\lim_{m_d\to\infty}\mathrm{pr}\,S_{m_d}(\mathbb{R}^1_+)\right)\\&=\lim_{m\to\infty}\mathrm{pr}\otimes^n_{s,\mathfrak{p}}\left(S_{m_1}(\mathbb{R}^1_+)\otimes_{\mathfrak{p}}\dots\otimes_{\mathfrak{p}}S_{m_d}(\mathbb{R}^1_+)\right),\end{aligned}\tag{7}$$

$m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d_+$. Система функцій

$$q_n : (t_1, \dots, t_n) \longmapsto \boldsymbol{\varphi}(t_1) \dots \boldsymbol{\varphi}(t_n), \tag{8}$$

де $t_i = (t_i^1, \dots, t_i^d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\boldsymbol{\varphi}(t_i) = \boldsymbol{\varphi}_1(t_i^1) \cdot \dots \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(t_i^d)$, $i = 1, \dots, n$, $\boldsymbol{\varphi}_j \in \mathcal{S}_{m_j}(\mathbb{R}^1_+)$, $j = 1, \dots, d$, є тотальною підмножиною в $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$.

З наслідку 2.1 випливають рівності

$$\big[\widetilde{\Upsilon}_{\mathcal{S}_+} \mathfrak{T}'_{s_j} \widetilde{\Upsilon}^{-1}_{\mathcal{S}_+}(Q)\big](f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \big\langle \otimes^n (T'_{s_j} f), q_n \big\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \big\langle \otimes^n f, (\otimes^n T_{s_j}) q_n \big\rangle .$$

З регулярності проективної границі (7), випливає одностайна обмеженість кожної з напівгруп $\otimes^n T_{s_j}$ в просторі $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. Звідси, а також з бочковості простору $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$, отримуємо, що $\otimes^n T_{s_j}$ одностайно неперервні напівгрупи. З леми 2.1 слідує, що напівгрупи $\otimes^n T_{s_j}$ володіють (C_0) властивістю. Остаточно, одностайна неперервність та (C_0) властивість напівгруп $\mathfrak{T}'_{s_j}$ випливає із властивостей топології прямої суми.

Генератором напівгрупи T_{s_j} є похідна $\boldsymbol{\partial}_j$ (див. лему 2.1). Тому користуючись правилом Лейбніца, для кожного q_n вигляду (8) маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathfrak{i}} \frac{\partial}{\partial s_j} \Big(\otimes^n T_{s_j} q_n \Big)\Big|_{s_j=0} = \frac{1}{\mathfrak{i}} \frac{\partial}{\partial s_j} \Big(T_{s_j} \boldsymbol{\varphi} \otimes \dots \otimes T_{s_j} \boldsymbol{\varphi} \Big)\Big|_{s_j=0} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{T_{s_j} \boldsymbol{\varphi} \otimes \dots \otimes T_{s_j} \boldsymbol{\varphi} \otimes \frac{1}{\mathfrak{i}} \frac{\partial}{\partial s_j} T_{s_j} \boldsymbol{\varphi}}_{k} \otimes \underbrace{T_{s_j} \boldsymbol{\varphi} \otimes \dots \otimes T_{s_j} \boldsymbol{\varphi}}_{n-k} \Bigg|_{s_j=0} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\boldsymbol{\varphi} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\partial}_j \boldsymbol{\varphi}}_{k} \otimes \underbrace{\boldsymbol{\varphi} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varphi}}_{n-k} .
\end{aligned}$$

Для доведення пункту (ii) слід провести подібні міркування, використавши теорію двоїстості і дуальність $\big\langle \bigtimes_n \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+, \bigoplus_n \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+ \big\rangle$. $\square$

Властивості генераторів $\mathfrak{d}_j$ і $\mathfrak{d}'_j$, $j = 1, \dots, d$, сформулюємо у наступному твердженні.

Теорема 3.2. (i) *Генератори* $\mathfrak{d}_j$, $j = 1, \dots, d$, *є неперервними диференціюваннями на згортковій алгебрі* $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$, *тобто*

$$\mathfrak{d}_j (p \star q) = \mathfrak{d}_j p \star q + p \star \mathfrak{d}_j q \tag{9}$$

для довільних $p, q \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$.

(ii) *Генератори* $\mathfrak{d}'_j$, $j = 1, \ldots, d$, *є неперервними диференціюваннями на згортковій алгебрі* $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+$, *тобто*

$$\mathfrak{d}'_j(p \star q) = \mathfrak{d}'_j p \star q + p \star \mathfrak{d}'_j q \tag{10}$$

для довільних $p, q \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+$.

(iii) *Генератори* $\mathfrak{d}'_j$ *і* $\mathfrak{d}_j$, $j = 1, \ldots, d$, *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\left\langle \mathfrak{d}'_j p, q \right\rangle = -\left\langle p, \mathfrak{d}_j q \right\rangle, \quad p \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+,\ q \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+. \tag{11}$$

Доведення. (i) Розглянемо елементи простору $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ виду $p = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\varphi}$ і $q = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\psi}$, де $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{S}_+$. Тоді за наслідком 2.3 маємо $p \star q = \Big(\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\varphi}\Big) \star \Big(\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n \boldsymbol{\psi}\Big) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum\limits_{m=0}^{n} (\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes_s (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi})$.

Далі безпосередньо переконуємося у правильності рівності (9) для таких елементів:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_j(p \star q) &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} {}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j [(\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes_s (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi})] \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} {}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j [\otimes^m \boldsymbol{\varphi}] \otimes_s (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}) + \sum_{k=1}^{n-m} (\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes_s \Big({}^{\boldsymbol{n-m}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j [\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}] \Big) \right) \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} \left(\Big(\sum_{k=1}^{m} {}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j [\otimes^m \boldsymbol{\varphi}] \Big) \otimes_s (\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}) \right) \\
&\quad + \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} \left((\otimes^m \boldsymbol{\varphi}) \otimes_s \Big(\sum_{k=1}^{n-m} {}^{\boldsymbol{n-m}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j [\otimes^{n-m} \boldsymbol{\psi}] \Big) \right) = \mathfrak{d}_j p \star q + p \star \mathfrak{d}_j q.
\end{aligned}$$

Залишилось зауважити, що кожен елемент простору $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$ можна наблизити лінійною комбінацією елементів розглянутого виду.

(ii) Доведення рівності (10) проводиться аналогічно.

(iii) Правильність співвідношення (11) відразу слідує із рівностей $\partial'_j := -\boldsymbol{\partial}_j$ та

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} {}^{n}_{k}\partial'_j p_n, q_n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} {}^{n}_{k}\partial'_j[\otimes^n f], \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \right\rangle$$
$$= -\left\langle \otimes^n f, \sum_{k=1}^{n} {}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j[\otimes^n \boldsymbol{\varphi}] \right\rangle = -\left\langle p_n, \sum_{k=1}^{n} {}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\partial}_j q_n \right\rangle,$$

де $p_n = \otimes^n f \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}'_+$, $f \in \mathcal{S}'_+$, $q_n = \otimes^n \boldsymbol{\varphi} \in \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_+$. □

[1] *Borchers H.* Algebras of unbounded operators in quantum fields theory // Physica. — 1988. — **124A**. — P. 1–127.

[2] *Lopushansky O. V.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation // Banach Center Publ. — 2010. — **88**. — P. 195–209.

[3] *Lopushansky O. V., Sharyn S. V.* Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ // Topology. — 2009. — **48**, № 2–4. — P. 80–90.

[4] *Hida T., Kuo H.H., Potthoff J., Streit L.* White Noise: An Infinite Dimensional Calculus. — Springer, 1993. — 516 p.

[5] *Kondratiev Y.G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis // Hiroshima Math. J. — 1998. — **28**. — P. 213–260.

[6] *Obata N.* White Noise Calculus and Fock Space. — Springer, 1994. — 195 p.

[7] *Шарин С.В.* Поліноміальні повільно зростаючі розподіли // Карпатські мат. публ. — 2010. — **2**, №2. — C. 123–132.

[8] *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. — Berlin Göttingen Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. — 550 p.

[9] *Hille E., Phillips R.* Functional Analysis and Semi-Groups. — New York: AMS Coll. Publ., vol. XXXI, 1957. — 819 p.

[10] *Butzer P.L., Berens H.* Semi-Group of Operators and Approximation. — Springer-Verlag, 1967. — 318 p.

[11] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. – 318 с.

[12] *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. – 360 с.

[13] *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. — М.: Мир, 1967. — 266 с.

[14] *Mityagin B. S.* Nuclérité et autres propriétés des espaces de type s // Trudy Moscow. Math. Sci. — 1960. — **9**. — P. 317–328.

[15] *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologues et espases nucléaire // Mem. Amer. Math. Soc. — 1955. — **16**, № 11. — P. 1–140.

SHIFT SEMIGROUPS IN THE ALGEBRA OF POLYNOMIAL SCHWARTZ TEMPERED DISTRIBUTIONS

Sergii SHARYN

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *sharynsir@yahoo.com*

Let $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ stand for the space of continuous polynomials on the space $\mathcal{S}'_+$ of Schwartz tempered distributions with supports in $\mathbb{R}^d_+$, and let $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$ be its strong dual. In this article we investigate the semigroups of shifts along the cone $\mathbb{R}^d_+$, which act in the spaces $\mathsf{P}(\mathcal{S}'_+)$ and $\mathsf{P}'(\mathcal{S}'_+)$. Generators of these semigroups are computed in explicit form.