ПРО НЕРІВНОСТІ ТИПУ ВІМАНА БЕЗ ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН ДЛЯ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

©*2011 р. Олег СКАСКІВ, Ольга ЗАДОРОЖНА*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

e-mail: *www.matstud@franko.lviv.ua, www.olzadorozhna@gmail.com*

Редакція отримала статтю 5 липня 2011 р.

Розглядаємо абсолютно збіжний у $\mathbb{C}^2$ подвійний ряд Діріхле вигляду

$$F(s_1, s_2) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}, \quad s_j = \sigma_j + it_j \ \ (j \in \{1, 2\}),$$

де $(\lambda_n^{(1)}), (\lambda_m^{(2)})$ – дві зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел і (a_{nm}) – послідовність комплексних чисел. У статті отримано нерівність згори для максимуму модуля $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)| : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ через максимальний член $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} : n, m \geq 0\}$ у класі подвійних рядів Діріхле, коефіцієнти яких задовільняють умову $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\psi(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\}$, $n + m \geq k_0$ де ψ – деяка додатна, неперервна, зростаюча до $+\infty$ на проміжку $[0, +\infty)$ функція.

Відомо ([1, с. 214]), що для кожної цілої функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \in [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int\limits_E \frac{dr}{r} < +\infty$) така, що нерівність Вімана $M_f(r) \leq \mu_f(r)\Big(\ln \mu_f(r)\Big)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ виконується для всіх $r \in [0, +\infty) \backslash E$. У випадку цілих рядів Діріхле вигляду $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow$

УДК: 517.53; MSC 2000: 30B20

Ключові слова і фрази: нерівність Вімана, ряд Діріхле

$+\infty$ $(n \to +\infty)$ аналоги нерівності Вімана зовні виняткових множин розглянуто, зокрема, в [2–4]. Проблему отримання нерівностей згори для $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)\colon t \in \mathbb{R}|\}$ через максимальний член $\mu(\sigma, F)$ $= \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}\colon n \geq 0\}$ досліджено в [5–6]. Зокрема, там розглянуто клас рядів Діріхле $S^1_\Psi(\Lambda)$ з фіксованою послідовністю показників $\Lambda = (\lambda_n)$ таких, що $|a_n| \leq \exp\{-\lambda_n\psi(\lambda_n)\},\ n \geq n_0$ для деякої додатної неперервної зростаючої до $+\infty$ на проміжку $[0, +\infty)$ функції ψ (клас таких функцій позначаємо через L). У [6] доведено таку теорему.

Теорема A. *Нехай $\psi, h \in L$ та виконується умова $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n\psi(\lambda_n)} = q < 1$. Для того, щоб для кожної цілої функції $F \in S^1_\Psi(\Lambda)$ виконувалась нерівність*

$$M(\sigma, F) < \mu(\sigma, F) h\Big(\ln \mu(\sigma, F)\Big),\ \sigma \geq \sigma_0,$$

необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall l_1, l_2 \in L\colon n < l_1(n) + h\Big(l_2(n)\psi(\lambda_n)\Big),\ n \geq n_0.$$

Зауважимо, що вказана вище умова рівносильна до умови

$$\Big(\exists c > 0\Big)\colon\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{h^{-1}(n-c)}{\psi(\lambda_n)} < +\infty,$$

де через h^{-1} позначено функцію, обернену до функції h.

У даній статті ми отримали аналог Теореми A у класі цілих подвійних рядів Діріхле. Нехай $(\lambda^{(1)}_n), (\lambda^{(2)}_m)$ — дві зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел і (a_{nm}) — послідовність комплексних чисел. Розглянемо абсолютно збіжний у $\mathbb{C}^2$ подвійний ряд Діріхле вигляду

$$F(s_1, s_2) = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1\lambda^{(1)}_n + s_2\lambda^{(2)}_m\}, \quad s_j = \sigma_j + it_j\ \ (j \in \{1, 2\}). \quad (1)$$

Для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$ позначимо через

$$M(\sigma, F) = M(\sigma_1, \sigma_2, F) = \sup\{|F(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)| : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

максимум модуля ряду Діріхле (1) та через

$$\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma_1, \sigma_2, F) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n + \sigma_2\lambda^{(2)}_m\} : n, m \geq 0\}$$

максимальний член цього ряду.

Нехай L_0 – клас невід'ємних неперервних на $[0,+\infty)$ зростаючих до $+\infty$ при $x\to+\infty$ функцій. Через L позначимо підклас функцій $l\in L_0$, таких, що $l(x)\nearrow+\infty$ при $x\to+\infty$. Для $\psi\in L$ через $S_\psi(\Lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле вигляду (1) таких, що

$$|a_{nm}|\le\exp\{-(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})\psi(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})\},\quad n+m\ge k_0. \tag{2}$$

Крім того, нехай виконується умова

$$\varlimsup_{n+m\to+\infty}\frac{\ln(n+m)}{(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})\psi(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})}\le q<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Позначимо $|\sigma|=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$,

$$K(\mu)=\{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2):\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\mu(t\sigma_1,t\sigma_2,F)=+\infty\}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\psi\in L,h\in L_0$ *та виконується умова* (3). *Якщо* $\forall\ l_1,l_2\in L:$

$$(n+m)^2<l_1(n+m)+h\Big(l_2(n+m)\psi(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})\Big),\quad n+m>k_0, \tag{4}$$

то для кожної функції $F\in S_\psi(\Lambda)$ *і для кожного конуса* K *з вершиною у початку координат* O *такого, що* $\overline{K}\setminus\{0\}\subset K(\mu)$, *нерівність*

$$M(\sigma,F)<\mu(\sigma,F)h\Big(\ln\mu(\sigma,F)\Big) \tag{5}$$

виконується для всіх σ *таких, що* $|\sigma|>t_0,\sigma\in K$.

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що умова (4) виконується та існують конус K і послідовність $x_j=(x_j^{(1)},x_j^{(2)})\in K,\ |x_j|\to+\infty\ (j\to+\infty)$ та

$$M(x_j,F)\ge\mu(x_j,F)h\Big(\ln\mu(x_j,F)\Big),\quad j\ge0. \tag{6}$$

Для $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in K(\mu)$ позначимо $\widehat{\sigma}=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$ та

$$k_1(\sigma)=\min\Big\{k\in\mathbb{N}:\ \big(\forall(n,m):\ n+m\ge k\big)\big[\psi(\lambda_n^{(1)}+\lambda_m^{(2)})\ge a\widehat{\sigma}\big]\Big\},$$

де $a=\frac{1}{1-2(q+2\varepsilon)}$ та $\varepsilon>0$ таке, що $q+2\varepsilon<\frac{1}{2}$. Звідси, зокрема, випливає, що існують $n_1(\sigma)$ та $m_1(\sigma)$ такі, що

$$\psi\big(\lambda^{(1)}_{n_1(\sigma)}+\lambda^{(2)}_{m_1(\sigma)}\big)<a\widehat{\sigma},\ n_1(\sigma)+m_1(\sigma)=k_1(\sigma)-1. \tag{7}$$

Використовуючи послідовно (2) та (3), отримуємо, що

$$\sum_{n+m\geq k_1(\sigma)}|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\leq$$

$$\leq\sum_{n+m\geq k_1(\sigma)}\exp\Big\{-(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)\psi(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)+\widehat{\sigma}(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)\Big\}=$$

$$=\sum_{n+m\geq k_1(\sigma)}\exp\Big\{-(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)\big(\psi(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)-\widehat{\sigma}\big)\Big\}\leq$$

$$\leq\sum_{n+m\geq k_1(\sigma)}\exp\left\{-\left(1-\frac{1}{a}\right)(\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m)\psi((\lambda^{(1)}_n+\lambda^{(2)}_m))\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{k=k_1(\sigma)}^{+\infty}\sum_{n+m=k}\exp\left\{-\frac{1-\frac{1}{a}}{q+\varepsilon}\ln(n+m)\right\}\leq\sum_{k=k_1(\sigma)}^{+\infty}(k+1)\exp\left\{-\frac{1-\frac{1}{a}}{q+\varepsilon}\ln k\right\}$$

$$\sum_{k=k_1(\sigma)}^{+\infty}(1+\frac{1}{k})\exp\Big\{-\left(-1+\frac{1-\frac{1}{a}}{q+\varepsilon}\right)\ln\ k\Big\}.$$

Оскільки $a=\frac{1}{1-2(q+2\varepsilon)}>\frac{1}{1-2(q+\varepsilon)}$, то $1-\frac{1}{a}>2(q+\varepsilon)$, а тому $-1+\frac{1-\frac{1}{a}}{q+\varepsilon}>1$. Отже,

$$\sum_{n+m\geq k_1(\sigma)}|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\leq C<\frac{\mu(\sigma,F)}{2},\quad|\sigma|>t_1,\sigma\in K. \tag{8}$$

Відомо ([7, с. 20]), що $\lim\limits_{|\sigma|\to+\infty,\ \sigma\in K}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{|\sigma|}=+\infty$. Отже, існує функція $k_2(\sigma)\to+\infty$ ($|\sigma|\to+\infty,\sigma\in K$) така, що

$$\sum_{n+m\leq k_2(\sigma)}|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\leq\frac{\mu(\sigma,F)}{2},\quad|\sigma|>t_2,\sigma\in K. \tag{9}$$

Розглянемо тепер

$$\sum_{k=[k_2(\sigma)]+1}^{k_1(\sigma)-1}\sum_{n+m=k}|a_{nm}|\exp\{\sigma_1\lambda^{(1)}_n+\sigma_2\lambda^{(2)}_m\}\leq\sum_{k=[k_2(\sigma)]+1}^{k_1(\sigma)-1}\sum_{n+m=k}\mu(\sigma,F)=$$

$$= \mu(\sigma, F) \sum_{k=[k_2(\sigma)]+1}^{k_1(\sigma)-1} (k+1) = \mu(\sigma, F) \frac{k_1(\sigma) + [k_2(\sigma)] + 2}{2} (k_1(\sigma) - [k_2(\sigma)] - 1).$$

Використаємо останню нерівність та нерівності (8), (9) і отримаємо

$$M(\sigma, F) < \Big(\frac{\big(k_1(\sigma) + [k_2(\sigma)] + 2\big)\big(k_1(\sigma) - [k_2(\sigma)] - 1\big)}{2} + 1 \Big) \mu(\sigma, F) =$$

$$= \frac{1}{2} \Big(k_1^2(\sigma) - [k_2(\sigma)]^2 + 2\big(k_1(\sigma) - [k_2(\sigma)]\big) - \big(k_1(\sigma) + [k_2(\sigma)]\big) \Big) \mu(\sigma, F).$$

Зауважимо, що $\frac{1}{2}\Big(k_1^2(\sigma) + k_1(\sigma)\Big) < \Big(k_1(\sigma) - 1\Big)^2$ для $k_1(\sigma) \geq 5$. Отже для $t_3 = \max\{t_1, t_2\}$ отримуємо, що

$$M(\sigma, F) < \Big(\big(k_1(\sigma) - 1\big)^2 - \frac{1}{2}\big([k_2(\sigma)]^2 + 3[k_2(\sigma)]\big) \Big), |\sigma| > t_3, \sigma \in K.$$

Виберемо функцію $l_1(t) \in L$ так, щоб для $|\sigma| > t_4$ виконувалась нерівність $l_1\big(k_1(\sigma) - 1\big) < \frac{1}{2}\Big([k_2(\sigma)]^2 + 3[k_2(\sigma)]\Big)$. Тоді для $t_5 = \max\{t_3, t_4\}$ отримуємо, що

$$M(\sigma, F) < \Big(\big(k_1(\sigma) - 1\big)^2 - l_1\big(k_1(\sigma) - 1\big) \Big) \mu(\sigma, F), \quad |\sigma| > t_5, \sigma \in K.$$

За умовою (4) для кожної функції $l_2 \in L$ отримуємо, що при $\sigma_1 = x_j^{(1)}$, $\sigma_2 = x_j^{(2)}$

$$M(\sigma, F) < \mu(\sigma, F) h \left(l_2\big(k_1(\sigma) - 1\big) \psi\big(\lambda^{(1)}_{n_1(\sigma)} + \lambda^{(2)}_{m_1(\sigma)}\big) \right), \tag{10}$$

де $n_1(\sigma) + m_1(\sigma) = k_1(\sigma) - 1$. Зауважимо, що якщо $\sigma \in K$, то $\widehat{\sigma} \leq |\sigma|$, а тому $\lim\limits_{|\sigma| \to +\infty,\ \sigma \in K} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\widehat{\sigma}} \geq \lim\limits_{|\sigma| \to +\infty,\ \sigma \in K} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|} = +\infty$. Звідси та з (7) отримуємо, що

$$\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\psi\big(\lambda^{(1)}_{n_1(\sigma)} + \lambda^{(2)}_{m_1(\sigma)}\big)} > \frac{1}{a} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\widehat{\sigma}} \to +\infty \quad (|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K).$$

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що для послідовності x_j істинне $|x_0| > t_5$. Виберемо з послідовності x_j підпослідовність $\widetilde{x}_j$ таку, що для всіх j вірно $k_1(\widetilde{x}_j) \nearrow +\infty$ $(1 \leq j \uparrow +\infty)$ та для $\sigma = \widetilde{x}_j$

$$\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\psi(\lambda^{(1)}_{n_1(\sigma)} + \lambda^{(2)}_{m_1(\sigma)})} \nearrow +\infty \quad (j \to +\infty).$$

Виберемо функцію $l_2(t) \in L$ так, щоб для $\sigma = \widetilde{x}_j$

$$l_2\Big(k_1(\sigma) - 1\Big) = \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\psi(\lambda^{(1)}_{n_1(\sigma)} + \lambda^{(2)}_{m_1(\sigma)})}.$$

Тоді з (10) випливає, що $M(\sigma, F) < \mu(\sigma, F) h\Big(\ln \mu(\sigma, F)\Big)$ для $\sigma = \widetilde{x}_j$. Отримали суперечність, що доводить теорему. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $\psi \in L, \alpha > 0$ *та виконується умова* (3). *Якщо* $\forall\ l_1, l_2 \in L$:

$$(n+m)^2 < l_1(n+m) + \Big(l_2(n+m)\psi(\lambda^{(1)}_n + \lambda^{(2)}_m)\Big)^{\alpha}, \quad n+m > k_0,$$

то для кожної функції $F \in S_\psi(\Lambda)$ *і для кожного конуса* K *з вершиною у початку координат* O *такого, що* $\overline{K} \setminus \{0\} \subset K(\mu)$, *нерівність*

$$M(\sigma, F) < \mu(\sigma, F)\Big(\ln \mu(\sigma, F)\Big)^{\alpha}$$

виконується для всіх σ *таких, що* $|\sigma| > t_0, \sigma \in K$.
Виберемо $\lambda^{(j)}_k = k\ (j \in \{1, 2\}), h(x) = x^2, \psi(x) = x$. Тоді ряд

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} \exp\{-(n+m)\psi(n+m) + n\sigma_1 + m\sigma_2\},$$

очевидно, збігається для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$. Далі,

$$(n+m)^2 = h\big(\psi(n+m)\big) \le l_1(n+m) + h\big(l_2(n+m)\psi(n+m)\big), \quad (n+m \ge k_0)$$

для будь-яких функцій $l_1(t) \nearrow +\infty,\ l_2(t) \nearrow +\infty\ (t \to +\infty)$. Отже, за доведеною вище теоремою отримуємо, такий результат.
Наслідок 2. *Для кожного ряду Діріхле*

$$F_0(\sigma) = F_0(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} \exp\{n\sigma_1 + m\sigma_2\},$$

такого, що $|a_{nm}| \le \exp\{-(n+m)^2\}$ *виконується нерівність*

$$M(\sigma, F_0) < \mu(\sigma, F_0) \ln^2 \mu(\sigma, F_0) \quad (|\sigma| \ge \sigma_0).$$

Твердження наслідку 2 покращити, взагалі кажучи, не можна. Про це свідчить такий приклад. Для $\psi_0(x) = x, h_0(x) = x^{2-q}, 0 < q < 2$, очевидно, що для кожної сталої $c > 0$

$$\lim_{n+m\to+\infty} \frac{h_0^{-1}\Big((n+m)^2 - c\Big)}{\psi_0(n+m)} = \lim_{n+m\to+\infty} \frac{\Big((n+m)^2 - c\Big)^{\frac{1}{2-q}}}{n+m} =$$

$$= \lim_{n+m\to+\infty} (n+m)^{\frac{2}{2-q}-1} = +\infty. \qquad (11)$$

Звідси випливає, що умова $(n+m)^2 < l_1(n+m) + h_0\Big(l_2(n+m)\psi_0(n+m)\Big)$ не може виконуватись для будь-яких функцій $l_1(t) \nearrow +\infty$, $l_2(t) \nearrow +\infty$ $(t \to +\infty)$. Справді, візьмемо $l_1(x) = x, l_2(x) = \ln x$ і з (11) отримаємо, що $(n+m)^2 > l_1(n+m) + h_0\Big(l_2(n+m)\psi_0(n+m)\Big)$ для $n+m \geq k_1$. Побудуємо тепер цілий ряд Діріхле такий, що

$$|a_{nm}| \leq \exp\{-(n+m)\psi(n+m)\} = \exp\Big\{-\frac{1}{3}(n+m)^2\Big\}, \quad (n+m \geq k_3)$$

і такий, що існує послідовність $\varkappa_j \uparrow +\infty$ така, що для функції $h(x) = x^{2-q}$

$$\frac{M(\varkappa_j, \varkappa_j, F)}{\mu(\varkappa_j, \varkappa_j, F) h\Big(\ln \mu(\varkappa_j, \varkappa_j)\Big)} \to +\infty \ (j \to +\infty).$$

Нехай послідовність (q_j) така, що $0 < q_j < 1$ $(\forall j \geq 1)$ і $\lim\limits_{j\to+\infty} q_j = q < 1$, а послідовність (r_j) така, що $r_j > 1$ $(\forall j \geq 1)$ і $\lim\limits_{j\to+\infty} r_j = +\infty$. Виберемо послідовності $k_j, s_j \in \mathbb{N}$ з умов: $k_1 = 1$ та для всіх $j \geq 1$: $k_{j+1} = k_j r_j$, $s_j = q_j k_j$. Очевидно, що можна вибрати спадну до нуля послідовність (ε_j) і таку зростаючу до $+\infty$ послідовність (r_j), щоб $\frac{(r_{j-1})^{\varepsilon_j}}{(k_{j-1})^{2-2\varepsilon_j}} \to +\infty \quad (j \to +\infty)$.

Означимо тепер $b_j = \exp\{-k_j^2\}$, $\varkappa_j \stackrel{def}{=} \frac{\ln b_{j-1} - \ln b_j}{k_j - k_{j-1}} = k_j + k_{j-1}$ і розглянемо цілий ряд Діріхле $f(\varkappa) = \sum\limits_{j=j_0}^{+\infty} b_j \exp\{\varkappa k_j\}$. Оскільки $\varkappa_j \uparrow +\infty$, то добре відомо, що у цьому випадку

$$\mu(\varkappa_j, f) = b_j \exp\{\varkappa_j k_j\} = \exp\{-k_j^2 + k_j(k_j + k_{j-1})\} = \exp\{k_j k_{j-1}\}.$$

Для $(n, m) \in \mathbb{Z}_+^2$ таких, що $k_j \leq n + m \leq k_j + s_j$ визначимо

$$a_{nm} = \exp\{-k_j^2 - \varkappa_j(n + m - k_j)\}.$$

Зауважимо, що $a_{nm}\exp\{\varkappa_j(n+m)\}=\mu(\varkappa_j,f)$.
Нехай $\theta_j=\frac{k_j+k_{j-1}}{2k_j}$. Доведемо, що для всіх $k_j\le n+m\le k_j+s_j$

$$-k_j^2-(n+m-k_j)\varkappa_j\le-\theta_j(n+m)^2. \tag{12}$$

Означимо $\alpha(u)=u\varkappa_j-\theta_ju^2$. Тоді нерівність (12) набуде вигляду $\alpha(u)\ge -k_j^2+k_j\varkappa_j$ для $k_j\le u\le k_j+s_j$. Легко бачимо, що функція $\alpha(u)$ спадна для $\frac{\varkappa_j}{2\theta_j}=k_j<u<k_j+s_j$, тому нерівність (12) рівносильна до наступної нерівності

$$-k_j^2+k_j\varkappa_j\le(k_j+s_j)\varkappa_j-\theta_j(k_j+s_j)^2 \;\Leftrightarrow\; -k_j^2-s_j\varkappa_j\le-\theta_j(k_j+s_j)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_j^2+q_jk_j(k_j+k_{j-1})\ge\frac{k_j+k_{j-1}}{2k_j}(1+q_j)^2k_j^2 \;\Leftrightarrow\; 2(k_j+g_jk_j+q_jk_{j-1})\ge$$

$$\ge(1+q_j)^2(k_j+k_{j-1}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1+q_j+\frac{q_j}{r_{j-1}}\right)\ge(1+q_j)^2\left(1+\frac{1}{r_{j-1}}\right). \tag{13}$$

Зауважимо тепер, що $q_j\to q<1, r_{j-1}\to+\infty$ $(j\to+\infty)$, і тому для всіх $j\ge j_1$: $(1+q_j)\left(1+\frac{1}{r_{j-1}}\right)\le 2$, звідки отримуємо, що

$$(1+q_j)^2\left(1+\frac{1}{r_{j-1}}\right)\le 2(1+q_j)\le 2\left(1+q_j+\frac{q_j}{r_{j-1}}\right).$$

Отже, ми отримали нерівність (13), а тому і нерівність (12).
Оскільки $\theta_j\to\frac{1}{2}$ $(j\to+\infty)$, то для всіх $j\ge j_2$: $\theta_j>\frac{1}{3}$. Тому для всіх $j\ge\max\{j_0,j_1,j_2\}=j_3$ і $k_j\le n+m\le k_j+s_j$

$$|a_{nm}|\le\exp\{-\frac{1}{3}(n+m)^2\}.$$

Розглянемо цілий кратний ряд Діріхле

$$F(\sigma)=F(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{j=j_3}^{+\infty}\sum_{n+m=k_j}^{k_j+s_j}a_{nm}\exp\{\sigma_1n+\sigma_2m\}.$$

Позначимо $\sigma_j=(\varkappa_j,\varkappa_j)$ і зауважимо, що оскільки $\varkappa_j\uparrow+\infty$, то

$$\mu(\sigma_j,F)=a_{nm}\exp\{\varkappa_j(n+m)\}.$$

Тому

$$M(\sigma_j,F)\geq\sum_{k=k_j}^{k_j+s_j}\sum_{n+m=k}a_{nm}\exp\{\sigma_j(n+m)\}=\sum_{k=k_j}^{k_j+s_j}(k+1)\mu(\sigma_j,F)\geq$$

$$\geq\frac{s_j+1}{2}\left(2k_j+s_j+2\right)\mu(\sigma_j,F)>\frac{s_j^2}{2}\mu(\sigma_j,F).$$

Звідси отримуємо, що при $\varepsilon_j\to+0$ $(j\to+\infty)$

$$\frac{M(\sigma_j,F)}{\mu(\sigma_j,F)h\Big(\ln\mu(\sigma_j,F)\Big)}\geq\frac{s_j^2}{2h\Big(\ln\mu(\sigma_j,F)\Big)}\geq\frac{s_j^2}{2\Big(\ln\mu(\sigma_j,F)\Big)^{2-\varepsilon_j}}.$$

Зауважимо тепер, що за вибором послідовностей r_{j-1} та ε_j

$$\frac{s_j^2}{2\big(\ln\mu(\sigma_j,F)\big)^{2-\varepsilon_j}}=\frac{q_j^2k_j^2}{2(k_jk_{j-1})^{2-\varepsilon_j}}=q_j^2\frac{(k_j)^{\varepsilon_j}}{2(k_{j-1})^{2-\varepsilon_j}}=$$

$$=q_j^2\frac{(r_{j-1})^{\varepsilon_j}}{2(k_{j-1})^{2-2\varepsilon_j}}\to+\infty\quad(j\to+\infty),$$

що і потрібно було довести.

[1] *Валірон Ж.* Аналитические функции. — М., 1957. — 235 с.

[2] *Sunier-i-Balaguer F.* Generalization de metodo de Wiman-Valiron a una classe de series de Dirichlet // Publ. semin. fac. cient Zaragoza. — 1962. — №3. — P. 43–47.

[3] *Шеремета М.Н.* Метод Вимана-Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле // Докл. АН СССР. — 1978. — №5. — С. 1036–1039.

[4] *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. — К:ІСДО, 1993. — 145 с.

[5] *Шеремета М.М.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат. заметки. — 1992. — **51** , №5. — С. 141–148.

[6] *Filevych P.V.* To the Sheremeta theorem concerning relations between the maximal term and the maximum modulus of entire Dirichlet series // Mat. Studii. — 2000. — **13**. — C. 139–144.

[7] *Гречанюк М.Й.* Конуси росту цілих кратних рядів Діріхле // Доповіді АН УРСР. — 1991. — №9. — С. 19–25.

INEQUALITIES OF VIMAN TYPE WITHOUT EXCEPTIONAL SETS FOR DOUBLE ENTIRE DIRICHLET SERIES

Oleh SKASKIV, Olga ZADOROZHNA

Ivan Franko Lviv National University,
Unversytets'ka 1, Lviv 79000, Ukraine

e-mail: *www.matstud@franko.lviv.ua, www.olzadorozhna@gmail.com*

Consider an entire double Dirichlet series of the form

$$F(s_1, s_2) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1\lambda_n^{(1)} + s_2\lambda_m^{(2)}\}, \quad s_j = \sigma_j + it_j \ \ (j \in \{1, 2\}),$$

where $(\lambda_n^{(1)}), (\lambda_m^{(2)})$ are sequences of positive numbers increasing to $+\infty$ and (a_{nm}) is a sequence of complex numbers. In this paper we obtain a relation between maximal modulus $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)| : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ and maximal term $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1\lambda_n^{(1)} + \sigma_2\lambda_m^{(2)}\} : n, m \geq 0\}$ in the class of double Dirichlet series which coefficients satisfy the condition $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\psi(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\}, \quad n+m \geq k_0$, where $\psi(t)$ is a nonnegative continuous on $[0, +\infty)$ function tending to $+\infty$ as $t \uparrow +\infty$.