ОЦІНКА ПОХИБКИ ЗБІЖНОСТІ РАЦІОНАЛЬНИХ ВКОРОЧЕНЬ ОДНОПЕРІОДИЧНИХ РЕКУРЕНТНИХ ДРОБІВ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ДО ЇХ ЗНАЧЕНЬ

©2011 р. Андрій СЕМЕНЧУК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060
e-mail: *andrisem333@mail.ru*

Редакція отримала статтю 12 жовтня 2011 р.

Важливими задачами чисельного аналізу є задачі раціональних наближень алгебраїчних ірраціональностей вищих порядків. Ці задачі мають давню історію і їм присвячено цілий ряд робіт. Перспективними дослідженями в цьому напрямку виявилися різноманітні узагальнення ланцюгових дробів. Одними з таких узагальнень є n-вимірні узагальнення ланцюгових дробів, названі рекурентними дробами.

В роботі досліджується швидкість збіжності раціональних вкорочень одноперіодичних рекурентних дробів третього порядку до їх значень.

1 Допоміжні поняття

Раціональним наближенням алгебраїчних ірраціональностей вищих порядків присвячено чимало робіт (див. наприклад [1, 2, 3]) Важливим засобом для таких наближень є різноманітні узагальнення ланцюгових дробів: [4, 5, 6, 7], зокрема рекурентні дроби [8]. Дамо означення одноперіодичного рекурентного дробу [9].

УДК: 512.64; MSC 2000: 15A15
Ключові слова і фрази: рекурентний дріб, оцінка похибки
Робота підтримана грантом ДФФД України № Ф35/531-2011

Означення 1. *Рекурентний дріб третього порядку*

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} a_{11} & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & \\ \frac{a_{33}}{a_{23}} & \frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & & & \\ 0 & \frac{a_{34}}{a_{24}} & \frac{a_{24}}{a_{14}} & a_{14} & & & \\ 0 & 0 & \frac{a_{35}}{a_{25}} & \frac{a_{25}}{a_{15}} & a_{15} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1n} \end{array}\right]_n$$

називається одноперіодичним, якщо його елементи задовольняють рівності

$$a_{i,r+j} = a_{i,j}, \quad i = 1, 2, 3, \ j = 1, 2, \dots, \ r = 0, 1, 2, \dots .$$

2 Оцінки похибки

Розглянемо одноперіодичний рекурентний дріб

$$\delta_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = \left[\begin{array}{c|ccccc} q & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right], \tag{1}$$

де $P_n = qP_{n-1} + pP_{n-2} + rP_{n-3}$, $P_0 = 1$, $P_{<0} = 0$, причому $q, p, r > 0$.

Оцінимо різницю

$$|\delta_{n+1} - \delta_n| = \left| q + \frac{p}{\delta_n} + \frac{r}{\delta_n \delta_{n-1}} - q - \frac{p}{\delta_{n-1}} - \frac{r}{\delta_{n-1}\delta_{n-2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{\delta_n \delta_{n-1}} |\delta_n - \delta_{n-1}| + \frac{r}{\delta_n \delta_{n-1} \delta_{n-2}} |\delta_n - \delta_{n-2}|.$$

Оскільки,

$$\delta_n \delta_{n-1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = \frac{P_n}{P_{n-2}} = \frac{qP_{n-1} + pP_{n-2} + rP_{n-3}}{P_{n-2}} =$$

$$= \frac{q(qP_{n-2}+pP_{n-3}+rP_{n-4})+pP_{n-2}+rP_{n-3}}{P_{n-2}} =$$

$$= q^2+p+(qp+r)\frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}+qr\frac{P_{n-4}}{P_{n-2}} > q^2+p,$$

$$\delta_n\delta_{n-1}\delta_{n-2} = \frac{P_n}{P_{n-1}}\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}} = \frac{P_n}{P_{n-3}} = \frac{qP_{n-1}+pP_{n-2}+rP_{n-3}}{P_{n-3}} =$$

$$= \frac{q(qP_{n-2}+pP_{n-3}+rP_{n-4})+pP_{n-2}+rP_{n-3}}{P_{n-3}} =$$

$$= \frac{q(q(qP_{n-3}+pP_{n-4}+rP_{n-5})+pP_{n-3}+rP_{n-4})}{P_{n-3}}+$$

$$+\frac{p(qP_{n-3}+pP_{n-4}+rP_{n-5})+rP_{n-3}}{P_{n-3}} =$$

$$= q^3+2qp+r+(q^2p+p^2+qr)\frac{P_{n-4}}{P_{n-3}}+(q^2r+pr)\frac{P_{n-5}}{P_{n-3}} >$$

$$> q^3+2qp+r,$$

то

$$|\delta_{n+1}-\delta_n| \leqslant a|\delta_n-\delta_{n-1}|+b|\delta_n-\delta_{n-1}+\delta_{n-1}-\delta_{n-2}| \leqslant$$

$$\leqslant (a+b)|\delta_n-\delta_{n-1}|+b|\delta_{n-1}-\delta_{n-2}|,$$

де $a=\frac{p}{q^2+p}$, $b=\frac{r}{q^3+2qp+r}$.

Понижуючи індекси отримаємо

$$|\delta_{n+1}-\delta_n| \leqslant \begin{bmatrix} a+b & & & & \\ \frac{b}{a+b} & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{bmatrix}_{n-2} |\delta_3-\delta_2|+$$

$$+\begin{bmatrix} b & & & & \\ 0 & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{bmatrix}_{n-2} |\delta_2-\delta_1| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\begin{bmatrix} a+b & & & & \\ \frac{b}{a+b} & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}_{n-2} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} b & & & & \\ 0 & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}_{n-2} \right) \cdot \lambda =$$

$$= \left((a+2b) \begin{bmatrix} a+b & & & & \\ \frac{b}{a+b} & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}_{n-3} + \right.$$

$$\left. + b \begin{bmatrix} a+b & & & & \\ \frac{b}{a+b} & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}_{n-4} \right) \cdot \lambda \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \cdot (a+3b) \begin{bmatrix} a+b & & & & \\ \frac{b}{a+b} & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}_{n-3},$$

де $\lambda = \max(|\delta_3 - \delta_2|, |\delta_2 - \delta_1|)$, $a = \frac{p}{q^2+p}$, $b = \frac{r}{q^3+2qp+r}$.

Обчисливши $|\delta_3 - \delta_2|$, $|\delta_2 - \delta_1|$, отримаємо

$$\lambda = \max(\frac{p}{q}, |\frac{rq - p^2}{q(q^2+p)}|).$$

Таким чином, справедливою буде наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай δ_n — n-те раціональне вкорочення рекурентного дробу* (1)*. Тоді справедлива наступна оцінка*

$$|\delta_{n+1}-\delta_n| \leqslant \lambda \cdot (a+3b) \begin{bmatrix} a+b & & & & \\ \frac{b}{a+b} & a+b & & & \\ 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & & \\ 0 & 0 & \frac{b}{a+b} & a+b & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}_{n-3},$$

де $\lambda = \max(\frac{p}{q}, |\frac{rq-p^2}{q(q^2+p)}|)$, $a = \frac{p}{q^2+p}$, $b = \frac{r}{q^3+2qp+r}$.

Позначимо $u_{n+1} = |\delta_{n+1}-\delta_n|$. Тоді, для рекурентного рівняння $u_{n+1} = (a+b)u_n + bu_{n-1}$ маємо характеристичне рівняння із максимальним додатним дійсним коренем

$$x^* = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2},\ \alpha = a+b,\ \beta = b,\ a = \frac{p}{q^2+p},\ b = \frac{r}{q^3+2qp+r},$$

який в разі виконання умови $x^* < 1$ забезпечує збіжність раціональних вкорочень рекурентного дробу до його значення. При цьому справедливою буде оцінка похибки

$$|\delta_{n+1}-\delta_n| \leqslant (x^*)^n|\delta_2-\delta_1|.$$

Таким чином,

$$|\delta_{n+p}-\delta_n| \leqslant |\delta_{n+p}-\delta_{n+p-1}| + |\delta_{n+p-1}-\delta_{n+p-2}| + \ldots +$$
$$+|\delta_{n+1}-\delta_n| \leqslant ((x^*)^{n+p-1} + (x^*)^{n+p-2} + \ldots + (x^*)^n)|\delta_2-\delta_1| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(x^*)^n}{1-x^*}|\delta_2-\delta_1| = \frac{(x^*)^n}{1-x^*}\frac{p}{q}.$$

Оскільки $\delta_{n+p} \to \delta$ при $p \to \infty$, то справедливою буде наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай δ_n — n-те раціональне вкорочення рекурентного дробу* (1) *і виконується нерівність* $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2} < 1$, *де* $\alpha = a+b, \beta = b$, $a = \frac{p}{q^2+p}$, $b = \frac{r}{q^3+2qp+r}$, *тоді справджується оцінка похибки*

$$|\delta_n-\delta| \leqslant \frac{p}{q}\frac{(x^*)^n}{1-x^*}.$$

Приклад 1. *Нехай* $q = 2$, $p = 1$, $r = 1$, *тоді* $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{13}$. *Обчислимо модуль різниці між* 12*-им і* 11*-им наближеннями рекурентного дробу*

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} 2 & & & & & \\ \frac{1}{2} & 2 & & & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & 2 & & & \\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & 2 & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & 2 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right].$$

$$|\delta_{12} - \delta_{11}| = \left|\frac{58396}{22929} - \frac{22929}{9003}\right| = \frac{58396 \cdot 9003 - 22929^2}{22929 \cdot 9003} \approx 0,00000071.$$

За теоремою 1

$$|\delta_{12} - \delta_{11}| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{13}\right)\left[\begin{array}{ccccc} \frac{18}{65} & & & & \\ \frac{5}{18} & \frac{18}{65} & & & \\ 0 & \frac{5}{18} & \frac{18}{65} & & \\ 0 & 0 & \frac{5}{18} & \frac{18}{65} & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_8 =$$

$$= \frac{14}{65} \cdot \frac{377098885801}{318644812890625} \approx 0,00025.$$

Приклад 2. *Нехай* $q = 2$, $p = 1$, $r = 1$, *тоді* $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{13}$, $\alpha = \frac{18}{65}$, $\beta = \frac{1}{13}$ *і*

$$x^* = \frac{\frac{18}{65} + \sqrt{\left(\frac{18}{65}\right)^2 + \frac{4}{13}}}{2} \approx 0,448452948 < 1.$$

δ — *корінь кубічного рівняння* $x^3 = 2x^2 + x + 1$, *причому*

$$\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{244 + 36\sqrt{29}} + \frac{14}{3\sqrt[3]{244 + 36\sqrt{29}}} \approx 2,5468182768841.$$

Позаяк

$$|\delta_{12} - \delta| = \left|\frac{58396}{22929} - \delta\right| \approx 0,00000016,$$

то за теоремою 2 *справедливою буде оцінка*

$$|\delta_{12} - \delta| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^*)^{12}}{1 - x^*} \approx 0,00006.$$

[1] *Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К.* Теория иррациональностей третьей степени. — М.: Изд-во АН СССР, 1940. — 340 с.

[2] *Хованский А.Н.* К вопросу о разложении кубических иррациональностей в трехмерные цепные дроби. // Тр. кафедры мат. анализа. — Калининград: Калининград. гос. ун-т., 1969. — С. 85–98.

[3] *Заторський Р.А., Семенчук А.В.* Зображення деяких класів кубічних ірраціональностей періодичними рекурентними дробами // Міжн. наук. конф., присв. 50-річчю каф. алгебри і матем. логіки КНУ ім. Т. Шевченка: Тези доповідей (Київ, 22 грудня – 23 грудня 2009 р.). — Київ, 2009. — С. 45.

[4] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наукова думка, 1986. — 176 с.

[5] *Euler L.* De inventione quotcumque mediarum proportionalum citra radicum exctrationem // Novi Comment. Acad. Sci. Petrop. — 1769. — **14**, №1. — P. 188–214.

[6] *Fürshtenau E.* Über Kettenbrüche höherer Ordnung // Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. — 1876. — P. 133–135.

[7] *Milne-Thomson L.M.* On the operational solution of the homogeneous linear equation of finite differences, by generalized continued fractins // Proc. Roy. Soc. Edinburh. A. — 1931. — **51**. — P. 91.

[8] *Боднар Д.І., Заторський Р.А.* Узагальнення ланцюгових дробів. I. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — **54**, №1. — С. 57–64.

[9] *Заторський Р.А.* Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.

ESTIMATION OF CONVERGENCE ERROR OF THE RATIONAL ESTIMATIONS OF RECURRENCE SINGLE PERIODICAL FRACTIONS OF 3-D ORDER TO THEIR VALUES

Andriy Semenchuk

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Ukrainian National Academy of Sciences,
3b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

e-mail: *andrisem333@mail.ru*

The important tasks of numerical analysis are tasks of rational approachings of the algebraic irrationalities of higher orders. These tasks have old history and a number of works was devoted them look at example. The perspective researches in this direction are various generalizations of fractions. Ones of such generalizations are n-dimensional generalizations of fractions that are called the recurrence single periodical fractions.

Speed of convergence of the rational estimation of recurrence speed periodical fractions of 3-order to their values is in-process probed.