# ЗАДАЧА З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ОДНОРІДНИХ ЗА ПОРЯДКОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

*Михайло СИМОТЮК*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Наукова 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 29 жовтня 2003 р.

Досліджено коректність задачі з двома кратними вузлами за змінною $t$ та умовами періодичності за змінною $x$ для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі, доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Двоточкові задачі для систем рівнянь із частинними похідними вивчались у різних аспектах багатьма авторами (див. наприклад, [1–11] та бібліографію в них). Зокрема, в роботах [1, 2] встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності задач з двоточковими умовами за виділеною змінною $t$ та умовами росту на нескінченності за іншими координатами для систем диференціальних рівнянь. До цих робіт примикають праці [3, 4], в яких застосовано узагальнений метод відокремлення змінних для побудови розв'язків двоточкових задач у необмежених областях. У працях [5–8] досліджено задачі з двома кратними вузлами для окремих класів систем рівнянь із частинними похідними в обмежених областях, розв'язність яких пов'язана з проблемою малих знаменників. У цих роботах аксіоматично накладено умови на швидкість спадання

УДК 517.95+511.2
Автор підтриманий грантом Президії НАН України для молодих вчених (постанова Президії НАН України № 203 від 09.07.2003)

малих знаменників, однак питання про можливість їх виконання не вивчалося.

У даній роботі для систем загального типу, однорідних за порядком диференціювання, встановлено коректну розв'язність для майже всіх чисел $t_1$, які є значенням вузла інтерполяції, задачі з двома кратними вузлами за виділеною змінною $t$ у класах періодичних за $x$ вектор-функцій. У роботі вперше для систем довільного порядку запропоновано метод оцінювання малих знаменників задачі.

**1**. Надалі використовуємо такі позначення: $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega-$ коло одиничного радіуса $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; $C_n^m-$ кількість комбінацій з $n$ елементів по $m$; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A-$ міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n} B-$ міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ вимірної множини $B \subset \mathbb{C}^n$, $C(n,m)-$ множина всіх наборів $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$, складених з $m$ натуральних чисел $i_1, \ldots, i_m$ таких, що $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$; $W_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \ge 0)-$ простір, який отримується в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ikx)$ за нормою

$$\|\varphi(x); W_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|)};$$

$W^+_{\alpha,\beta} = \{\varphi(x) \in W_{\alpha,\beta} : \varphi_k = 0,\, k < 0\}$, $W^-_{\alpha,\beta} = \{\varphi(x) \in W_{\alpha,\beta} : \varphi_k = 0,\, k \ge 0\}$, (де $\varphi_k$, $k \in \mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$); $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta})-$ простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\ge 0} u_k(t) \exp(ikx)$ зі скінченною нормою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta})\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \|\partial^j u(t,x)/\partial t^j; W_{\alpha,\beta}\|;$$

$\overline{W}_{\alpha,\beta}-$ простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) = \mathrm{col}(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^m(x))$ таких, що $\varphi^j(x) \in W_{\alpha,\beta}$, $j = 1, \ldots, m$, з нормою $\|\vec{\varphi}(x); \overline{W}_{\alpha,\beta}\| = \max\limits_{1\le j\le m} \|\varphi^j(x); W_{\alpha,\beta}\|$; $\overline{H}_\alpha = \overline{W}_{\alpha,0}$; $\overline{W}^+_{\alpha,\beta}$ (відповідно, $\overline{W}^-_{\alpha,\beta}$)$-$ простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) = \mathrm{col}(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^m(x))$ таких, що $\varphi^j(x) \in W^+_{\alpha,\beta}$ (відповідно, $\varphi^j(x) \in \overline{W}^-_{\alpha,\beta}$), $j = 1, \ldots, m$; $C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta})-$ простір таких вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x))$, що $u^j(t,x) \in C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta})$, $j = 1, \ldots, m$. У просторі $C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta})$ норму задаємо формулою

$$\|\vec{u}(t,x); C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta})\| = \max_{1\le j\le m} \|u^j(t,x); C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta})\|.$$

**2.** Розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u}(t,x)\equiv\frac{\partial^n\vec{u}(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j\frac{\partial^n\vec{u}(t,x)}{\partial t^j\partial x^{n-j}}=\vec{0},\quad (t,x)\in Q,\qquad(1)$$

$$\begin{cases} V_j[\vec{u}]\equiv\dfrac{\partial^{j-1}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}=\vec{\varphi}_j(x),\ j=1,\dots,r,\ x\in\Omega,\\ V_{r+j}[\vec{u}]\equiv\dfrac{\partial^{j-1}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=t_1}=\vec{\varphi}_{r+j}(x),\ j=1,\dots,n-r,\ x\in\Omega,\end{cases}\qquad(2)$$

де $A_j=\|a^j_{q,r}\|^m_{q,r=1}, j=0,1,\dots,n-1,$ – квадратні матриці розміру $m\times m$, елементами яких є комплексні числа, $0<t_1\le T$, $\vec{u}(t,x)=\mathrm{col}(u^1(t,x),\dots,u^m(t,x))$, $\vec{0}=\mathrm{col}\,(\underbrace{0,\dots,0}_{m})$, $\vec{\varphi}_j(x)=\mathrm{col}(\varphi^1_j(x),\dots,\varphi^m_j(x))$, $j=1,\dots,n$.

Позначимо через $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ корені характеристичного рівняння $\det\|L(\mu,i)\|=0$; будемо припускати, що ці корені є простими. Через $n^+$ (відповідно, $n^-$) позначимо кількість тих коренів, дійсна частина яких є додатною (відповідно, від'ємною). Нехай $\Lambda_1=\max\{0;\max\limits_{1\le j\le mn}\{\operatorname{Re}\mu_j\}\}$, $\Lambda_2=\min\{0;\min\limits_{1\le j\le mn}\{\operatorname{Re}\mu_j\}\}$.

**3.** Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду Фур'є

$$\vec{u}(t,x)=\sum_{|k|\ge0}\vec{u}_k(t)\exp(ikx).\qquad(3)$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, є розв'язком такої задачі:

$$L\left(\frac{d}{dt},ik\right)\vec{u}_k(t)\equiv\frac{d^n\vec{u}_k(t)}{dt^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(ik)^{n-j}\frac{d^j\vec{u}_k(t)}{dt^j}=\vec{0},\qquad(4)$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^{j-1}\vec{u}_k(t)}{dt^{j-1}}\Big|_{t=0}=\vec{\varphi}_{jk},\ j=1,\dots,r,\\ \dfrac{d^{j-1}\vec{u}_k(t)}{dt^{j-1}}\Big|_{t=t_1}=\vec{\varphi}_{r+j,k},\ j=1,\dots,n-r,\end{cases}\qquad(5)$$

де $\vec{u}_k(t)=\mathrm{col}(u^1_k(t),\dots,u^m_k(t))$, $\vec{\varphi}_{jk}=\mathrm{col}(\varphi^1_{jk},\dots,\varphi^m_{jk})$, $k\in\mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\vec{u}(t,x)$ та $\vec{\varphi}_j(x)$, $j=1,\dots,n$. Задача (4), (5) для $k=0$ має єдиний розв'язок $\vec{u}_0(t)=\mathrm{col}(u^1_0(t),\dots,u^m_0(t))$. Дійсно, з рівняння (4) при $k=0$ випливає, що кожна функція $u^q_0(t)$, $q=1,\dots,m$, є многочленом $(n-1)$ – го степеня, коефіцієнти якого однозначно визначаються з умов $d^{j-1}u_0^q/dt^{j-1}|_{t=0} = \varphi_{j0}^q$, $j = 1,\dots,r$, $d^{j-1}u_0^q/dt^{j-1}|_{t=t_1} = \varphi_{r+j,0}^q$, $j = 1,\dots,n-r$, які випливають з умов (5) при $k = 0$.

Якщо $k \neq 0$, то розв'язок задачі (4), (5) зображається формулою (див. [11])

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} C_{k,q} \exp(\mu_q k t)\vec{h}_q, \tag{6}$$

де $\vec{h}_q = \mathrm{col}(h_q^1,\dots,h_q^m)$ – деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\mu_q, i)$, яка є приєднаною до матриці $L(\mu_q, i)$, $q = 1,\dots,mn$. Сталі $C_{k,q}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $q = 1,\dots,mn$, знаходяться із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{mn} C_{k,q}(\mu_q k)^{j-1} h_q^s = \varphi_{jk}^s,\ s = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,r, \\ \sum\limits_{q=1}^{mn} C_{k,q}(\mu_q k)^{j-1} \exp(\mu_q k t_1) h_q^s = \varphi_{r+j,k}^s, s{=}1,...,m, j{=}1,\dots,n{-}r. \end{cases} \tag{7}$$

Нехай $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, – визначник системи (7):

$$\Delta(k) = \\ = \begin{vmatrix} h_1^1 & \dots & h_{mn}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m & \dots & h_{mn}^m \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mu_1 k)^{r-1} h_1^1 & \dots & (\mu_{mn} k)^{r-1} h_{mn}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mu_1 k)^{r-1} h_1^m & \dots & (\mu_{mn} k)^{r-1} h_{mn}^m \\ h_1^1 \exp(\mu_1 k t_1) & \dots & h_{mn}^1 \exp(\mu_{mn} k t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m \exp(\mu_1 k t_1) & \dots & h_{mn}^m \exp(\mu_{mn} k t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mu_1 k)^{n-r-1} h_1^1 \exp(\mu_1 k t_1) & \dots & (\mu_{mn} k)^{n-r-1} h_{mn}^1 \exp(\mu_{mn} k t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mu_1 k)^{n-r-1} h_1^m \exp(\mu_1 k t_1) & \dots & (\mu_{mn} k)^{n-r-1} h_{mn}^m \exp(\mu_{mn} k t_1) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

**Теорема 1.** *Якщо корені $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ характеристичного рівняння є простими, то для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі $C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta})$, $\alpha \geq n$, $\beta \geq 0$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{9}$$

***Доведення.*** *Необхідність.* Якщо $\Delta(k^0) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то при $k = k^0$ система (7) з нульовими правими частинами ($\varphi^s_{jk^0} = 0$, $s = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$) має нетривіальний розв'язок $\widetilde{C}_{k^0,q}$, $q = 1,\ldots,mn$. Тоді вектор-функція

$$\vec{v}(t,x) = \sum_{q=1}^{mn} \widetilde{C}_{k^0,q} \exp(\mu_q k^0 t)\vec{h}_q \exp(ik^0 x)$$

належить до простору $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$, $\alpha \geq n$, $\beta \geq 0$, і є ненульовим розв'язком однорідної задачі (1), (2), у якій $\vec{\varphi}_j(x) = \vec{0}$, $j = 1,\ldots,n$. Тому розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним.

*Достатність.* Припустимо, що задача (1), (2) має два різних розв'язки $\vec{u}_1(t,x), \vec{u}_2(t,x) \in C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$, $\alpha \geq n$, $\beta \geq 0$. Тоді вектор-функція $\vec{v}(t,x) = \vec{u}_1(t,x) - \vec{u}_2(t,x)$ є нетривіальним розв'язком системи (1) і справджує умови $V_j[\vec{v}(t,x)] = \vec{0}$, $j = 1,\ldots,n$. Для коефіцієнтів Фур'є $\vec{v}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, вектор-функції $\vec{v}(t,x)$ справедливі зображення (6), в яких сталі $C_{k,q}$, $q = 1,\ldots,mn$, є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь з відмінним, згідно з умовою, визначником $\Delta(k)$. Тому $C_{k,q} = 0$, $q = 1,\ldots,mn$, а, отже, $\vec{v}_k(t) \equiv \vec{0}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Враховуючи, що $\vec{v}_0(t) \equiv \vec{0}$ (бо компонентами вектора $\vec{v}_0(t)$ є многочлени $(n-1)$–го степеня, які мають при $t = 0$ та $t = t_1$ нулі кратностей $r$ та $n-r$ відповідно), звідси отримуємо, що $\vec{v}(t,x) \equiv \vec{0}$ всупереч припущенню.

Наведемо приклади задач, для яких виконується умова єдиності (9).

**Приклад 1.** Нехай матриці $A_j$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, у рівнянні (1) є верхніми трикутними

$$A_j = \|a^j_{q,r}\|^m_{q,r=1},\ a^j_{q,r} \equiv 0,\ r = 1,\ldots,q-1,\ q = 2,\ldots,m,\ j = 0,1,\ldots,n-1,$$

де числа $a^j_{q,r} \in \mathbb{C}$, $q = 1,\ldots,m$, $r = 1,\ldots,q$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, є такими, що корені $\mu_1,\ldots,\mu_{mn}$ рівняння

$$\det\|L(\mu,i)\| \equiv \prod_{q=1}^{m}\left(\mu^n + \sum_{j=0}^{n-1} a^j_{q,q} i^{n-j}\mu^j\right) = 0$$

є дійсними і різними. Тоді задача (1), (2) у просторі $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$ не може мати двох різних розв'язків.

Дійсно, занумеруємо корені $\mu_1,\ldots,\mu_{mn}$ таким чином, щоб для довільного $q$, $q = 1,\ldots,m$, числа $\mu_{n(q-1)+1},\ldots,\mu_{nq}$ були коренями рівняння

$$p_q(\mu) \equiv \mu^n + \sum_{j=0}^{n-1} a^j_{q,q} i^{n-j}\mu^j = 0.$$

Вектори $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{mn} \in \mathbb{C}^m$ виберемо так, щоб вектор $\vec{h}_{n(q-1)+j}$ був $q$-им стовпцем приєднаної матриці $L^*(\mu_{n(q-1)+j}, i)$, $j = 1, \dots, n$, $q = 1, \dots, m$. Матриця $L^*(\mu_{n(q-1)+j}, i) \equiv \|l_{s,r}^{n(q-1)+j}\|_{s,r=1}^m$, $j = 1, \dots, n$, $q = 1, \dots, m$, у розглядуваному випадку є верхньою трикутною, а для її діагональних елементів $l_{r,r}^{n(q-1)+j}$, $r = 1, \dots, m$, справедливі рівності

$$l_{r,r}^{n(q-1)+j} = \prod_{s=1, s\neq r}^{m} p_s(\mu_{n(q-1)+j}), \ r = 1, \dots, m. \tag{10}$$

Числа $\mu_{n(q-1)+1}, \dots, \mu_{nq}$, $q = 1, \dots, m$, згідно з вибраною нумерацією, не є коренями многочленів $p_1(\mu), \dots, p_{q-1}(\mu)$, $p_{q+1}(\mu), \dots, p_m(\mu)$. Тому з формули (10) випливає, що

$$l_{q,q}^{n(q-1)+j} = \prod_{s=1, s\neq q}^{m} p_s(\mu_{n(q-1)+j}) \neq 0, \ j = 1, \dots, n, \ q = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Таким чином, $q$-ова компонента вектора $\vec{h}_{n(q-1)+j}$ відмінна від нуля, а його останні $(m-q)$ компонент дорівнюють нулеві:

$$\vec{h}_{n(q-1)+j} = \mathrm{col}\,(l_{1,q}^{n(q-1)+j}, \dots, l_{q,q}^{n(q-1)+j}, \dots, l_{m,q}^{n(q-1)+j}) =$$

$$= \mathrm{col}(h_{n(q-1)+j}^1, \dots, h_{n(q-1)+j}^q, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-q}), \ \ j = 1, \dots, n, \ \ q = 1, \dots, m.$$

Тоді з формули (8) випливає, що для даної задачі

$$\Delta(k) = \pm \prod_{q=1}^{m} \det \|V_s[\exp(\mu_{n(q-1)+j}\, k\, t)]\|_{j,s=1}^n \cdot \prod_{q=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} l_{q,q}^{n(q-1)+j}, k \neq 0. \tag{12}$$

Оскільки корені $\mu_1, \dots, \mu_{mn}$ є дійсними та різними, то кожен з $m$ визначників у формулі (12) є відмінним від нуля [12, с. 58, задача 76]. Враховуючи співвідношення (11), звідси отримуємо, що $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

**Приклад 2.** Нехай у рівнянні (1) $n = 2$, $A_1$ – нульова матриця, матриця $A_0$ має такий вигляд:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{1,1}^0 & a_{1,2}^0 & \dots & a_{1,m-1}^0 & a_{1,m}^0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{1,m}^0 \neq 0.$$

а числа $a^0_{1,j} \in \mathbb{R}, j = \overline{1,m}$, є такими, що рівняння $\lambda^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} a^0_{1,m-j}\lambda^j = 0$ має різні додатні корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Тоді корені $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$ рівняння

$$\det \|L(\mu, i)\| \equiv \mu^{2m} - \sum_{j=0}^{m-1} a^0_{1,m-j}\mu^{2j} = 0$$

можна занумерувати так, щоб $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, m$, $\mu_{m+j} = -\mu_j$, $j = 1, \ldots, m$, де гілку кореня вибрано так, що $\sqrt{1} = 1$. Зрозуміло, що корені $\mu_1, \ldots, \mu_{2m}$ є дійсними і різними.

Легко перевірити, що у даному випадку перший стовпець приєднаної матриці $L^*(\mu_q, i) = \|l^q_{s,r}\|^m_{s,r=1}$, $q = 1, \ldots, 2m$, має вигляд

$$\mathrm{col}\,(l^q_{1,1}, \ldots, l^q_{m-1,1}, l^q_{m,1}) = \mathrm{col}\,(\mu_q^{2(m-1)}, \ldots, \mu_q^2, 1),$$

і, отже, є відмінним від нуля. Покладаючи $\vec{h}_q = \mathrm{col}\,(\mu_q^{2(m-1)}, \ldots, \mu_q^2, 1)$, $q = 1, \ldots, 2m$, із формули (8) дістаємо, що

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \mu_1^{2(m-1)} & \ldots & \mu_{2m}^{2(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^2 & \ldots & \mu_{2m}^2 \\ 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1^{2(m-1)}\exp(\mu_1 kt_1) & \ldots & \mu_{2m}^{2(m-1)}\exp(\mu_{2m} kt_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^2\exp(\mu_1 kt_1) & \ldots & \mu_{2m}^2\exp(\mu_{2m} kt_1) \\ \exp(\mu_1 kt_1) & \ldots & \exp(\mu_{2m} kt_1) \end{vmatrix}.$$

Для обчислення цього визначника віднімемо від $(m+1)$–го стовпця перший, від $(m+2)$–го стовпця – другий, ..., від $2m$–го стовпця – $m$–ий. В результаті дістанемо, що

$$\Delta(k) = (-2)^m \prod_{m\geq j>q\geq 1} (\mu_j^2 - \mu_q^2)^2 \cdot \prod_{j=1}^{m} \mathrm{sh}\,(\mu_j kt_1). \tag{13}$$

Оскільки $\mu_j^2 \neq \mu_q^2$, $m \geq j > q \geq 1$, $\mu_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $j = 1, \ldots, m$, то з формули (13) випливає, що $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Отже, і в цьому випадку задача (1), (2) у просторі $C^2([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta})$ не може мати двох різних розв'язків.

**Приклад 3.** Розглянемо при $n = 2$ задачу (1), (2), у якій

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для даного випадку корені $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ дорівнюють числам $\exp(i\pi/4)$, $\exp(-i\pi/4)$, $\exp(i3\pi/4)$, $\exp(-i3\pi/4)$ відповідно, а визначник (8) набуває вигляду

$$\Delta(k) = C_1 \sin^2 \frac{kt_1}{\sqrt{2}},$$

де $C_1$ – ненульова стала, що не залежить від $k$. Отже, якщо $\frac{t_1}{\pi\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, то за теоремою 1 розглядувана задача (1), (2) не може мати більше одного розв'язку в просторі $C^2([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta}), \alpha \geq 2, \beta \geq 0$; якщо ж $\frac{t_1}{\pi\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, то однорідна задача, яка відповідає даній, має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків (див. доведення наступної теореми). Зауважимо, що для розглядуваної системи А.В.Біцадзе [Биц] встановив нетривіальну розв'язність однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + x^2 < 1\}$.

Для повноти викладу наведемо твердження, в яких встановлено достатні умови нетривіальної розв'язності однорідної двоточкової задачі, яка відповідає задачі (1), (2).

**Теорема 2.** *Нехай корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ є простими. Якщо*

$$\{i\mu_q t_1 : q = 1, \ldots, mn\} \subset 2\pi\mathbb{Q},$$

*то однорідна задача з двома кратними вузлами, яка відповідає задачі* (1), (2), *має в просторі $C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta}), \alpha \geq n, \beta \geq 0$, зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

***Доведення.*** Нехай $i\mu_q t_1 = \frac{2\pi l_q}{k_q}$, де $l_q \in \mathbb{Z}$, $k_q \in \mathbb{N}$, $q = 1, \ldots, mn$, і нехай $K-$ найменше спільне кратне чисел $k_q$. Тоді для довільного $z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

$$\exp(\mu_q z K t_1) = 1, \quad q = 1, \ldots, mn.$$

Тому кожен із визначників $\Delta(zK)$, $z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, має однакові рядки

$$\begin{array}{c} (h_1^s, \ldots, h_{mn}^s), \\ (h_1^s \exp(\mu_1 z K t_1), \ldots, h_{mn}^s \exp(\mu_{mn} z K t_1)), \end{array} \quad s = 1, \ldots, m,$$

а, отже, дорівнює нулеві. Звідси, як і при доведенні необхідності в теоремі 1, випливає, що однорідна задача з двома кратними вузлами, яка відповідає задачі (1), (2), має зліченну кількість розв'язків вигляду

$$\vec{v}_{zK}(t,x) = \sum_{q=1}^{mn} C_{zK,q} \exp(\mu_q z K t) \vec{h}_q \exp(izKx), \ \ z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \tag{14}$$

де для кожного $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ сталі $C_{zK,q}$, $q = 1, \ldots, mn$, не можуть одночасно дорівнювати нулеві.

Доведемо, що отримані розв'язки (14) є лінійно незалежними в просторі $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta}), \alpha \geq n, \beta \geq 0$. Припустимо, всупереч цьому, що для деякого $N \in \mathbb{N}$ існують такі ненульові цілі $z_1, \ldots, z_N$ ($z_j \neq z_q$, $j \neq q$) та числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, які одночасно не дорівнюють нулеві, що

$$\lambda_1 \vec{v}_{z_1 K}(t,x) + \ldots + \lambda_N \vec{v}_{z_N K}(t,x) = \vec{0}.$$

Згідно з означенням норми в $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$, $\alpha \geq n$, $\beta \geq 0$, звідси випливає, що для довільного $r$, $r = 1, \ldots, N$, вектор-функції

$$\vec{w}^{(j-1)}_{z_r K}(t) \equiv \sum_{q=1}^{mn} \lambda_r C_{z_r K,q} (\mu_q z_r K)^{j-1} \exp(\mu_q z_r K t) \vec{h}_q, \quad j = 1, \ldots, n,$$

тотожньо дорівнюють нулеві. Отже, для кожного $r$, $r = 1, \ldots, N$, сталі $\lambda_r C_{z_r K,q}$, $q = 1, \ldots, mn$, є розв'язками лінійної системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{mn} \lambda_r C_{z_r K,q} (\mu_q z_r K)^{j-1} \exp(\mu_q z_r K t) \vec{h}^s_q = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \ s = 1, \ldots, m.$$

Визначник цієї системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} h^1_1 & \ldots & h^1_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h^m_1 & \ldots & h^m_{mn} \\ \mu_1 k h^1_1 & \ldots & \mu_{mn} k h^1_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1 k h^m_1 & \ldots & \mu_{mn} k h^m_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mu_1 k)^{n-1} h^1_1 & \ldots & (\mu_{mn} k)^{n-1} h^1_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mu_1 k)^{n-1} h^m_1 & \ldots & (\mu_{mn} k)^{n-1} h^m_{mn} \end{vmatrix},$$

і, згідно з [Ланкастер], є відмінним від нуля, оскільки корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ є простими. Тому $\lambda_r C_{z_r K,q} = 0$ для всіх $q$, $q = 1, \ldots, mn$. Оскільки серед сталих $C_{z_r K,q}$, $q = 1, \ldots, mn$, хоча б одна відмінна від нуля, то $\lambda_r = 0$. Внаслідок довільності $r$, отримуємо, що $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0$, тобто векторфункції (14) є лінійно незалежними.

**Теорема 3.** *Нехай корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ є простими. Якщо існують $j_0, q_0$ такі, що для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,*

$$\mu^q_{j_0} h^s_{j_0} \exp(\mu_{j_0} k t_1) = \mu^q_{q_0} h^s_{q_0} \exp(\mu_{q_0} k t_1), \quad q = 1, \ldots, ??, s = 1, \ldots, m,$$

*то однорідна задача з двома кратними вузлами, яка відповідає задачі* (1), (2)*, має в просторі* $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta}), \alpha \geq n, \beta \geq 0$*, зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

***Доведення*** проводиться аналогічно до доведення теореми 2 і випливає з того, що при виконанні умов теореми 3 визначник $\Delta(k^0)$ дорівнює нулю.

**4.** Припустимо, що умова (9) виконується. Із формул (3), (6), (7) для розв'язку задачі (1), (2) отримуємо формальне зображення у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x) = \vec{u}_0(t) + \sum_{|k|>0} \exp(ikx) \sum_{j,q=1}^{mn} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \exp(\mu_q kt)\vec{h}_q \psi_{j,k}, \qquad (14)$$

де $\mathrm{col}(\psi_{1,k},\ldots,\psi_{mn,k}) = \mathrm{col}(\varphi^1_{1k},\ldots,\varphi^m_{1k};\varphi^1_{2k},\ldots,\varphi^m_{2k};\ldots;\varphi^1_{nk},\ldots,\varphi^m_{nk})$, а $\Delta_{j,q}(k)$, $j,q = 1,\ldots,mn$, – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині $j$-го рядка та $q$-го стовпця визначника $\Delta(k)$.

Збіжність ряду (14), взагалі, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих чисел $k$. Про це свідчить наступний приклад.

**Приклад 4.** Для задачі (1), (2), у якій $n = m = 2$, $A_1$ – нульова матриця, а матриця $A_0$ має вигляд

$$A_0 = \begin{pmatrix} -(\alpha^2+\beta^2) & -\alpha^2\beta^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha \neq -\beta,$$

корені $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4$ характеристичного рівняння занумеруємо так, що $\mu_1 = -\mu_3 = i\alpha$, $\mu_2 = -\mu_4 = i\beta$. Покладемо $\vec{h}_1 = \vec{h}_3 = \mathrm{col}(-\alpha^2,1)$, $\vec{h}_2 = \vec{h}_4 = \mathrm{col}(-\beta^2,1)$. Із формули (8) випливає, що для даної задачі визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = -4(\beta^2-\alpha^2)^2 \sin(k\alpha t_1)\sin(k\beta t_1). \qquad (15)$$

За теоремою Хінчина [13, с.48] для довільної додатної функції $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ існує таке число $\theta > 0$, $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, що нерівність $|k\theta - m\pi| < g(|k|)$ має нескінченну множину розв'язків у цілих числах $k,m$ $(k \neq 0)$. Оскільки при фіксованому $k$ нерівність $|k\theta - m\pi| < g(|k|)$ може мати лише скінченну кількість розв'язків у цілих $m$, то з теореми Хінчина і того, що $|\sin(k\theta)| = |\sin(k\theta - m\pi)| \leq |k\theta - m\pi|$, де $m$ – ціле число, випливає, що нерівність $|\sin(k\theta)| < g(|k|)$ має безмежну кількість розв'язків у цілих числах $k$. Вибираючи параметри $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і точку $t_1$ так, що $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}\backslash\{-1;1\}$, $\alpha t_1 = \theta$, з формули (15) отримаємо, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, однак нерівність $|\Delta(k)| \leq 4|\beta^2 - \alpha^2|^2 g(|k|)$ може виконуватися для нескінченної кількості цілих $k$.

**Зауваження.** Приклад 4 показує, що існують такі значення елементів матриць у системі (1) і такі значення вузла $t_1$ в умовах (2), при яких модулі знаменників ряду (14) можуть як завгодно швидко апроксимувати нуль, що може зумовлювати розбіжність цього ряду. Нижче буде встановлено, що множина тих значень параметрів задачі (1), (2), при яких наявне явище, аналогічне до описаного у прикладі 4, має міру нуль (за точними формулюваннями ми відсилаємо до теорем 4, 5). У цьому плані приклад 4 відображає, скоріше, виняткову властивість задачі, ніж загальну.

Позначимо:
$n_1 = \min\{n^+, m(n-r)+1\}$, $n_2 = \min\{n^-, m(n-r)+1\}$,
$m_1 = \min\{n^+, m(n-r)\}$, $m_2 = \min\{n^-, m(n-r)\}$, $\lambda = m(C_r^2 + C_{n-r}^2)$,
$\xi_j = n + \lambda - j + 1$, $\eta_j^+ = n_1\Lambda_1 T$, $\eta_j^- = n_2\Lambda_2 T$, $j = 1, \ldots, r$,
$\xi_j = n + \lambda + r - j + 1$, $\eta_j^+ = m_1\Lambda_1 T$, $\eta_j^- = m_2\Lambda_2 T$, $j = r+1, \ldots, n$.

**Теорема 3.** *Нехай корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ характеристичного рівняння є простими, виконується умова (9) і існують такі дійсні сталі $\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2$, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел $k$ справджуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \geq \begin{cases} (1+|k|)^{-\alpha}\exp(-\beta_1 k), & k > 0, \\ (1+|k|)^{-\alpha}\exp(\beta_2 k), & k < 0. \end{cases} \tag{16}$$

*Якщо $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{W}^{\,+}_{\xi+\alpha+\xi_j,\eta+\beta_1+\eta_j^+} \oplus \overline{W}^{\,-}_{\xi+\alpha+\xi_j,\eta+\beta_2-\eta_j^-}$, $j = 1, \ldots, n$, то в просторі $C^n([0,T]; \overline{W}_{\xi,\eta})$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який зображається рядом (14) і неперервно залежить від вектор-функцій $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.*

***Доведення.*** Згідно з вибором сталих $n_1, n_2, m_1, m_2$, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ для довільних $j = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, m$, $q = 1, \ldots, mn$, виконуються оцінки

$$|\Delta_{m(j-1)+s,q}(k)| \cdot \|\exp(\mu_q k t)\|_{C^n[0,T]} \leq \begin{cases} C_1|k|^{\xi_j}\exp(\eta_j^+ k), & k > 0, \\ C_1|k|^{\xi_j}\exp(\eta_j^- k), & k < 0. \end{cases} \tag{17}$$

З нерівностей (16), (17) випливає, що

$$\|\vec{u}_k(t)\|_{C^n[0,T]} \leq \begin{cases} C_2 \sum\limits_{j=1}^{n} |k|^{\alpha+\xi_j} \exp((\beta_1+\eta_j^+)k)\cdot\|\vec{\varphi}_{jk}\|, \ k>0, \\ C_2 \sum\limits_{j=1}^{n} |k|^{\alpha+\xi_j} \exp((-\beta_2+\eta_j^-)k)\cdot\|\vec{\varphi}_{jk}\|, \ k<0. \end{cases} \tag{18}$$

Із (18) отримуємо, що $\|\vec{u}(t,x); C^n([0,T];\overline{W}_{\xi,\eta})\| \leq$

$$\leq C_3 \sum_{j=1}^{n} \Big( \|\vec{\varphi}_j^{\,+}; \overline{W}_{\xi+\alpha+\xi_j,\eta+\beta_1+\eta_j^+}\| + \|\vec{\varphi}_j^{\,-}; \overline{W}_{\xi+\alpha+\xi_j,\eta-\beta_2+\eta_j^-}\| \Big), \tag{19}$$

де $\vec{\varphi}_j^{\,+} \equiv \vec{\varphi}_j^{\,+}(x)$, $\vec{\varphi}_j^{\,-} \equiv \vec{\varphi}_j^{\,-}(x)$, – проекції $\vec{\varphi}_j(x)$, $j=1,\ldots,n$, відповідно на простори $\overline{W}^{\,+}_{\xi+\alpha+\xi_j,\eta+\beta_1+\eta_j^+}$, $\overline{W}^{\,-}_{\xi+\alpha+\xi_j,\eta-\beta_2+\eta_j^-}$. З нерівності (19) дістаємо твердження теореми.

**5.** Для з'ясування питання про можливість виконання нерівностей (16) нам знадобляться допоміжні твердження.

Введемо необхідні позначення. Для набору $\omega = (i_1,\ldots,i_{mn-mr}) \in C(mn, mn-mr)$ покладемо:

$$M_\omega = \mu_{i_1} + \ldots + \mu_{i_{mn-mr}},$$

$$P_\omega(\mu,k) = \prod_{\sigma\in C(mn,mn-mr),\sigma\neq\omega} (\mu - M_\omega k)\,, \tag{21}$$

Зауважимо, що степінь многочлена $P_\omega(\mu,k)$, $\omega \in C(mn, mn-mr)$, за змінною $\mu$ дорівнює $d = C_{mn}^{mn-mr} - 1$.

Нехай $H = \det(\vec{H}_1,\ldots,\vec{H}_{mn})$, де $\vec{H}_q = \mathrm{col}\,(\vec{h}_q, \mu_q\vec{h}_q, \ldots, \mu_q^{n-1}\vec{h}_q)$, $q = 1,\ldots,mn$. Через $h_\omega$, $\omega = (i_1,\ldots,i_{ml}) \in C(mn, ml)$, $1 \leq l \leq n-1$, позначимо визначник, який отримується з визначника $H$ викреслюванням перших $ml$ рядків та $ml$ стовпців, номери яких складають множину $\mathrm{set}\,\omega = \{i_1,\ldots,i_{ml}\}$.

**Означення 1.** *Систему* (1) *будемо називати системою загального типу, якщо виконуються наступні умови:*

$$\forall\,\omega,\sigma \in C(mn, mn-mr),\ \omega\neq\sigma, \quad M_\omega \neq M_\sigma. \tag{22}$$

**Приклад 5.** Розглянемо такий пучок систем:

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} -i(\alpha-1) & -i\beta \\ -i & \beta-1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix} \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2} = \vec{0}, \tag{23}$$

де $\vec{u} \equiv \vec{u}(t,x) = \mathrm{col}\,(u^1(t,x), u^2(t,x))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Для заданого пучка (23) множина коренів $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ співпадає з множиною $\{1, -\alpha, i, -i\beta\}$. Легко перевірити, що в розглядуваному випадку умови (22) виконуються, тобто (23) є пучком систем загального типу.

Позначимо:

$$\vec{Y} \equiv \mathrm{col}\,(Y_1, \ldots, Y_\nu) \equiv \mathrm{col}\,(a^j_{q,r};\, q, r = 1, \ldots, m,\; j = 0, 1, \ldots, n-1) -$$

вектор розміру $\nu = m^2 n$, складений з коефіцієнтів системи (1); при цьому порядок слідування коефіцієнтів $a^j_{q,r}$ у векторі $\vec{Y}$ визначається за правилом: $a^{j_1}_{q_1,r_1}$ слідує за $a^j_{q,r}$, якщо перша відмінна від нуля серед різниць $j_1 - j$, $q_1 - q$, $r_1 - r$ є додатною. Між векторами $\vec{Y}$ та системами (1) існує взаємно-однозначна відповідність, яка полягає у щойно введеному співставленні між компонентами вектора $\vec{Y}$ та елементами матриць $A_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, системи (1).

Наступна теорема обгрунтовує назву, введену в означенні 1.

**Теорема 4.** *Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, які задають системи (1) незагального типу, є множиною нульової міри Лебега в $\mathbb{C}^\nu$.*

***Доведення.*** Нехай $\Pi_\nu(\rho) = \{\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_\nu) \in \mathbb{C}^\nu : \max\limits_{1 \le j \le \nu} |Y_j| \le \rho\}$, $\rho \ge 1$, а $\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$ – множина тих векторів

$$\vec{Y} \equiv \mathrm{col}(a^j_{q,r};\, q, r = 1, \ldots, m,\; j = 0, 1, \ldots, n-1) \in \Pi_\nu(\rho),$$

для яких:

1) $a^j_{q,r} = 0$, $q = 2, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n-1$;
2) $a^0_{q,q-1} = 1$, $q = 2, \ldots, m$;
3) $a^0_{q,r} = 0$, $q = 2, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, m$, $r \ne q-1$.

Нехай $l(\mu, \vec{Y}) \equiv \det \|L(\mu, i, \vec{Y})\| = \mu^{mn} + l_1(\vec{Y})\mu^{mn-1} + \ldots + l_{mn}(\vec{Y})$ – характеристичний визначник системи (1), яка задається вектором $\vec{Y}$, а $\mu_1(\vec{Y}), \ldots, \mu_{mn}(\vec{Y})$ – корені многочлена $l(\mu, \vec{Y})$. Означимо функцію

$$S(\mu_1(\vec{Y}), \ldots, \mu_{mn}(\vec{Y})) \equiv \prod_{\substack{\sigma \prec \omega,\\ \sigma,\omega \in C(mn, mn-mr)}} (M_\sigma(\vec{Y}) - M_\omega(\vec{Y}))^2.$$

Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, які задають системи (1) незагального типу, співпадає з множиною $\{\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu : S(\mu_1(\vec{Y}), \ldots, \mu_{mn}(\vec{Y})) = 0\}$.

Очевидно, що $S$ є відмінним від тотожного нуля однорідним симетричним многочленом від коренів $\mu_1(\vec{Y}), \ldots, \mu_{mn}(\vec{Y})$. З основної теореми теорії симетричних многочленів [14] випливає, що $S$ можна подати у вигляді многочлена від $l_1(\vec{Y}),\dots,l_{mn}(\vec{Y})$:

$$S(\mu_1(\vec{Y}),\dots,\mu_{mn}(\vec{Y})) = S_1(l_1(\vec{Y}),\dots,l_{mn}(\vec{Y})),$$

$$S_1(l_1(\vec{Y}),\dots,l_{mn}(\vec{Y})) \equiv \sum_{s=(s_1,\dots,s_{mn})} \beta_s\, l_1^{s_1}(\vec{Y})\dots l_{mn}^{s_{mn}}(\vec{Y}),\ \beta_s\in\mathbb{Z}, \tag{24}$$

де числа $\beta_s$, $s=(s_1,\dots,s_{mn})$, не можуть одночасно дорівнювати нулеві.

Легко перевірити, що для вектора $\vec{Y}\in\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$, $\rho\geq 1$, коефіцієнти $l_j(\vec{Y})$, $j=1,\dots,mn$, обчислюються за формулами

$$l_{n(r-1)+j}(\vec{Y}) = (-1)^{r-1} i^j a_{1,r}^{n-j}, \quad r=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n. \tag{25}$$

Тоді з (24), (25) випливає, що функція

$$\begin{aligned} &S_1(l_1(\vec{Y}),\dots,l_{mn}(\vec{Y}))\Big|_{\vec{Y}\in\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)} \equiv \\ &\equiv \sum_{s=(s_1,\dots,s_{mn})} \beta_s \prod_{r=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left((-1)^{r-1} i^j a_{1,r}^{n-j}\right)^{s_{n(r-1)+j}} \end{aligned} \tag{26}$$

є многочленом $mn$ змінних $a_{1,j}^q$, $j=1,\dots,m$, $q=0,1,\dots,n-1$, що є компонентами вектора $\vec{Y}$, і як многочлен цих змінних відмінна від тотожного нуля. Оскільки коефіцієнти $l_j(\vec{Y})$, $\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho)$, $j=1,\dots,mn$, є многочленами від $Y_1,\dots,Y_\nu$, то з формули (24) отримуємо, що функція $S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)$, визначена рівністю $S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)=S_1(l_1(\vec{Y}),\dots,l_{mn}(\vec{Y}))$ є многочленом від $Y_1,\dots,Y_\nu$, а з того, що $S_2\big|_{\vec{Y}\in\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)}\not\equiv 0$ (див. (26)), випливає, що $S_2\not\equiv 0$ у полікрузі $\Pi_\nu(\rho)$. За лемою 1 із [10] для довільного $\varepsilon\in(0,1)$ виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho): |S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)|\leq\varepsilon\}\leq C_4\varepsilon^{2/s_0}, \quad C_4=C_4(\rho), \tag{27}$$

де $s_0$ – степінь многочлена $S_2$ за сукупністю змінних $Y_1,\dots,Y_\nu$. Із очевидного включення $\{\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho): S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)=0\}\subset\{\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho): |S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)|\leq\varepsilon\}$ та нерівності (27) дістаємо, що для довільного $\varepsilon\in(0,1)$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho): S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)=0\}\leq C_4\varepsilon^{2/s_0}. \tag{28}$$

Із (28) випливає, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho): S_2(Y_1,\dots,Y_\nu)=0\}=0$, а, отже, й $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho): S(\mu_1(\vec{Y}),\dots,\mu_{mn}(\vec{Y}))=0\}=0$ для довільного $\rho\geq 1$. Таким чином, для довільного $\rho\geq 1$ множина векторів $\vec{Y}\in\Pi_\nu(\rho)$, які відповідають системам (1) незагального типу, має нульову міру Лебега в $\mathbb{C}^\nu$. Враховуючи, що простір $\mathbb{C}^\nu$ можна покрити зліченною кількістю полікругів $\Pi_\nu(\rho_N)$, $\rho_N = N$, $N = 1, 2, \ldots$, звідси отримуємо твердження теореми.

Для систем загального типу справедливими є наступні леми.

**Лема 1.** *Нехай система* (1) *є системою загального типу. Тоді для довільного набору* $\omega \in C(mn, mn-mr)$ *справджується нерівність*

$$|P_\omega(M_\omega k, k)| \geq C_5(1+|k|)^d, \;\; d = C_{mn}^{mn-mr} - 1, \;\; k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

***Доведення*** леми є очевидним, бо з формули (21), на підставі умов (22), випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$|P_\omega(M_\omega k, k)| = \prod_{\sigma \in C(mn, mn-mr), \sigma \neq \omega} |M_\omega k - M_\sigma k| \geq C_5(1+|k|)^d.$$

**Лема 2.** *Нехай система* (1) *є системою загального типу. Тоді знайдуться такі набори* $\omega_1 \in C(mn, mr)$, $\omega_2 \in C(mn, mn-mr)$, *що* $\operatorname{set}\omega_1 \cap \operatorname{set}\omega_2 = \emptyset$, $\operatorname{set}\omega_1 \cup \operatorname{set}\omega_2 = \{1, \ldots, mn\}$, *для яких виконуються нерівності*

$$h_{\omega_1} \neq 0, \quad h_{\omega_2} \neq 0.$$

***Доведення.*** Для системи загального типу корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ характеристичного рівняння є простими. Тому вектори $\vec{H}_q$, $q = 1, \ldots, mn$, є лінійно незалежними [15], і, отже, $H \neq 0$. Використовуючи правило Лапласа для розкриття визначника $H$ за мінорами перших $mr$ рядків, дістанемо, що

$$H = \sum_{\omega \in C(mn, mr)} \pm\, h_\omega h_{\sigma(\omega)} g_{\sigma(\omega)}^{r-1}, \tag{29}$$

де $\sigma(\omega) \in C(mn, mn-mr)$ – набір, що однозначно визначається за набором $\omega \in C(mn, mr)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega) \cap \operatorname{set}\omega = \emptyset$; $g_{\sigma(\omega)} = \prod\limits_{j \in \operatorname{set}\sigma(\omega)} \mu_j$. Із формули (29) і з того, що $H \neq 0$, випливає, що виконується нерівність

$$\sum_{\omega \in C(mn, mr)} |h_\omega| \cdot |h_{\sigma(\omega)}| \cdot |g_{\sigma(\omega)}^{r-1}| \neq 0. \tag{30}$$

Хоча б один з доданків у лівій частині нерівності (30) є відмінним від нуля. Тому знайдуться такі набори $\omega_1 \in C(mn, mr)$, $\omega_2 \in C(mn, mn-mr)$, що $\operatorname{set}\omega_1 \cap \operatorname{set}\omega_2 = \emptyset$, $\operatorname{set}\omega_1 \cup \operatorname{set}\omega_2 = \{1, \ldots, mn\}$, для яких справджується нерівність $|h_{\omega_1}| \cdot |h_{\omega_2}| \cdot |g_{\omega_2}^{r-1}| \neq 0$, а, отже, й нерівності $h_{\omega_1} \neq 0$, $h_{\omega_2} \neq 0$.

**6.** Вияснимо питання про можливість виконання нерівностей (16).

**Теорема 5.** *Нехай система* (1) *є системою загального типу. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівності* (16) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{Z}$, *якщо* $\beta_1 = -m_2\Lambda_2 T$, $\beta_2 = -m_1\Lambda_1 T$, $\alpha > d - \lambda$, $d = C_{mn}^{mn-mr} - 1$.

***Доведення.*** Нехай $\omega_1 \in C(mn, mr)$, $\omega_2 \in C(mn, mn - mr)$ – набори, знайдені в лемі 2. Нехай $P_{\omega_2}(\mu, k)$ – многочлен, визначений за набором $\omega_2$ формулою (21). Із теореми Лапласа про розклад визначника $\Delta(k)$ за мінорами перших $mr$ рядків випливає така рівність:

$$\Delta(k) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_{mr}),\\ \omega\in C(mn,mr)}} (-1)^{\rho_\omega} k^\lambda h_\omega h_{\sigma(\omega)} \exp(M_{\sigma(\omega)} k t_1), \tag{31}$$

де $\rho_\omega = 1+\ldots+mr+i_1+\ldots+i_{mr}$, а набір $\sigma(\omega) \in C(mn, mn-mr)$ однозначно визначається за набором $\omega \in C(mn, mr)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega) \cap \operatorname{set}\omega = \emptyset$. Із формул (31), на основі тверджень леми 1 та леми 2, отримуємо, що

$$|P_{\omega_2}(d/dt_1, k)\Delta(k)| = |k^\lambda||h_{\omega_1}||h_{\omega_2}||P_{\omega_2}(M_{\omega_2}k, k)| \exp(\operatorname{Re} M_{\omega_2} k t_1) \geq$$

$$\geq \begin{cases} C_6(1+|k|)^{d+\lambda} \exp(-m_2\Lambda_2 T k), \ k > 0, \\ C_6(1+|k|)^{d+\lambda} \exp(m_1\Lambda_1 T k), \ k < 0. \end{cases} \tag{32}$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ розглянемо такі множини:

$$E(k) = \{\, t_1 \in (0, T] : |\Delta(k)| < \nu(k)\},$$

де

$$\nu(k) = \begin{cases} (1+|k|)^{\lambda-d-\varepsilon} \exp(-m_2\Lambda_2 T k), \ k > 0, \\ (1+|k|)^{\lambda-d-\varepsilon} \exp(m_1\Lambda_1 T k), \quad k < 0, \end{cases} \qquad \varepsilon > 0.$$

Із формул (31), (32) на основі твердження леми 2 з [10] одержимо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(k) \leq \begin{cases} C_7|k|\sqrt[d]{\dfrac{\nu(k)}{(1+|k|)^{d+\lambda}\exp(-m_2\Lambda_2 T k)}} \leq \dfrac{C_8}{|k|^{1+\varepsilon/d}}, k > 0, \\ C_7|k|\sqrt[d]{\dfrac{\nu(k)}{(1+|k|)^{d+\lambda}\exp(m_1\Lambda_1 T k)}} \leq \dfrac{C_8}{|k|^{1+\varepsilon/d}}, k < 0, \end{cases} \tag{34}$$

З нерівностей (34) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{|k|>0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(k)$. Тоді із леми Бореля–Кантеллі [11, с.13] отримуємо, що міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел $t_1$, які належать до нескінченної кількості множин $E(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, дорівнює нулеві. Теорема доведена.

**Теорема 6.** *Нехай система* (1) *є системою загального типу, корені* $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ *характеристичного рівняння якої є дійсними. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівності* (16) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{Z}$*, якщо* $\beta_1 = -m_2\Lambda_2 T$*,* $\beta_2 = m_1\Lambda_1 T$*,* $\alpha > -\lambda$*.*

***Доведення*** теореми 6 проводиться аналогічно до доведення теореми 5 з такими змінами: 1) сталі $\nu(k)$ в означенні множин $E(k)$ слід вибрати такими, що

$$\nu(k) = \begin{cases} (1+|k|)^{\lambda-\varepsilon} \exp(n^-_{\omega_2}\Lambda_2 Tk), & k > 0, \\ (1+|k|)^{\lambda-\varepsilon} \exp(n^+_{\omega_2}\Lambda_1 Tk), & k < 0, \end{cases} \qquad \varepsilon > 0;$$

2) для оцінок мір множин $E(k)$ слід використати наступну лему 3, яка є уточненням леми 2 з [10].

**Лема 3.** *Якщо для квазімногочлена*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} p_j(t), \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, m, \ \lambda_j \neq \lambda_q, j \neq q,$$

*де* $p_j(t)$*,* $j = 1, \ldots, m$*, – многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів* $(n_j - 1)$*,* $n_j \in \mathbb{N}$*, відповідно, виконується нерівність*

$$|f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n f(t)| \geq \delta > 0, \ t \in [a, b], \ a_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, n,$$

*то для довільного* $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(n+1)G^n}\right)$*,* $G \equiv 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n} |a_j|^{1/j}$*, справджується оцінка*

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\} \leq C_9 \ \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}, \quad C_9 = C_9(n).$$

**7.** Із теорем 3, 5, 6 випливають твердження про розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх чисел $t_1 \in (0, T]$.

**Теорема 7.** *Нехай система* (1) *є системою загального типу, нехай* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{W}^+_{\xi+\xi_j+d-\lambda+\varepsilon, \eta+(n_1\Lambda_1 - m_2\Lambda_2)T} \oplus \overline{W}^-_{\xi+\xi_j+d-\lambda+\varepsilon, \eta+(m_1\Lambda_1 - n_2\Lambda_2)T}$*,* $j = 1, \ldots, r$*,* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{W}_{\xi+\xi_j+d-\lambda+\varepsilon, \eta+(m_1\Lambda_1 - m_2\Lambda_2)T}$*,* $j = r+1, \ldots, n$*, де* $\varepsilon > 0$*. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *в просторі* $C^n([0, T]; \overline{W}_{\xi, \eta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2)*, який зображається рядом* (14) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_j(x)$*,* $j = 1, \ldots, n$*.*

**Теорема 8.** *Нехай система* (1) *є системою загального типу, корені* $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ *характеристичного рівняння якої є дійсними. Якщо* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{W}^+_{\xi+\xi_j-\lambda+\varepsilon,\eta+(n_1\Lambda_1-m_2\Lambda_2)T} \oplus \overline{W}^-_{\xi+\xi_j-\lambda+\varepsilon,\eta+(m_1\Lambda_1-n_2\Lambda_2)T}$, $j = 1, \ldots, r$, $\vec{\varphi}_j \in \overline{W}_{\xi+\xi_j-\lambda+\varepsilon,\eta+(m_1\Lambda_1-m_2\Lambda_2)T}$, $j = r+1, \ldots, n$, *де* $\varepsilon > 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *в просторі* $C^n([0, T]; \overline{W}_{\xi,\eta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (14) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

У випадку, коли всі корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ характеристичного рівняння є суто уявними, тобто $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ (система (1) є гіперболічною), з теореми 6 випливає наступне твердження.

**Наслідок 1.** *Нехай система* (1) *є гіперболічною системою загального типу, нехай* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{H}_{\xi+\xi_j+d-\lambda+\varepsilon}$, $j = 1, \ldots, r$, $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{H}_{\xi+\xi_j+d-\lambda+\varepsilon}$, $j = r+1, \ldots, n$, *де* $\varepsilon > 0$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *в просторі* $C^n([0, T]; \overline{H}_\xi)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (14) *і неперервно залежить від* $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

**Зауваження.** Актуальним залишається питання про коректну розв'язність для майже всіх чисел $t_1$ задачі з двома кратними вузлами для довільних (не обов'язково загального типу) систем рівнянь, однорідних за порядком диференціювання.


[1] *Бицадзе А.В.* ?? // Мат. сборник. – 19??, No ?. – С. ??–??.

[2] *Бицадзе А.В.* ?? // Мат. сборник. – 19??, No ?. – С. ??–??.

[3] *Бобик I.O.* ??О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Мат. сборник. – 19??, No ?. – С. ??–??.

[4] *Борок В.М.* ??Классы корректной разрешимости двухточечной краевой задачи в бесконечном слое // Мат. сборник. – 19??, No ?. – С. ??–??.

[5] *Бурский В.П.* ?? // Монограф. – 2002, – С. ??–??.

[6] *Воробець М.Б., Каленюк П.І., Нитребич З.М.* ??. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

[7] *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

[8] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

[9] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2-х ч. Ч. 2. М.: Наука, 1978. – 432 с.

[10] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[11] *Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для систем рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Матеріали Відкритої наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів Фізико–механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України. – Львів, 2002. – С. 156–162.

[12] *Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, No 4. – С. 107–118.

[13] *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. ??–??.

[14] *Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для систем лінійних рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 105–121.

[15] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

[16] *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 446 с.

## TWO-POINT PROBLEM FOR HOMOGENUOUS LINEAR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Myhaylo SYMOTYUK*

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

The correctness of the problem with two-point conditions on temporary variable and conditions of periodicity on spatial coordinate for the linear systems of partial differential equations is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.