ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ЛОКАЛЬНИХ ЧАСІВ В НУЛІ ДЕЯКОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

©2011 р. Михайло ОСИПЧУК[1]*, Микола ПОРТЕНКО*[2]

[1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76000
[2]Інститут математики Національної академії наук України, вул. Терещенківська 3, Київ 01601

e-mail: *myosyp@gmail.com, portenko@imath.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 5 липня 2011 р.

В роботі доводиться гранична теорема для розподілів локальних часів в нулі дифузійних процесів, які слабко збігаються до граничного дифузійного процесу, причому не припускається, що дифузійні коефіцієнти граничного процесу є границями відповідних коефіцієнтів дограничних процесів. Зокрема, розглядається послідовність дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $a_n(x) = na(nx)$ та дифузії $b_n(x) = b(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, для деяких функцій $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Вступ

Слабка збіжність послідовності дифузійних процесів до граничного дифузійного процесу має своїм наслідком збіжність послідовності розподілів довільного функціоналу від цих процесів до розподілу цього ж функціоналу від граничного процесу, якщо тільки функціонал є неперервним в топології рівномірної збіжності (принцип інваріантності). Виявляється, що можна ґарантувати існування граничного розподілу

УДК: 519.217; MSC 2000: 60J60, 60H10

Ключові слова і фрази: дифузійний процес, локальний час, граничний розподіл, резольвента

для послідовності розподілів деякого функціоналу і в тому випадку, коли він не є неперервним в згаданій топології. При цьому граничний розподіл, взагалі кажучи, не збігається з розподілом цього функціоналу від граничного процесу (не виконується принцип інваріантності), і тому важливо прослідкувати, які з характеристик дограничних процесів входять в граничний розподіл. Важливим прикладом такого функціоналу є локальний час.

В цій роботі ми доводимо граничну теорему для розподілів локальних часів дифузійних процесів, які утворюють деяку слабко збіжну послідовність без припущення про збіжність відповідних коефіцієнтів. Розглядається послідовність дифузійних процесів, які стартують в довільній точці числової осі і мають дифузійні коефіцієнти виду $na(nx)$ (коефіцієнти переносу) та $b(nx)$ (коефіцієнти дифузії) з деякими функціями a та b.

1 Основні припущення та попередні результати

Нехай на дійсній осі $\mathbb{R}$ задані обмежені функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ такі, що:

1. $|a(x)-a(y)|+|b(x)-b(y)| \le L|x-y|^\alpha$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ з деякими сталими $L > 0$, $0 < \alpha < 1$;
2. $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$;
3. функція
$$A(x) = \int_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
обмежена на всій області визначення.

Розглянемо такі визначені на $\mathbb{R}$ функції:
$$F(x) = \int_0^x e^{-2A(y)}dy, \quad H(x) = \int_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)}. \tag{2}$$
З умов 2, 3 випливає, що функції $F(x)$ та $H(x)$ мають обмежені похідні на $\mathbb{R}$, отже, є ліпшицевими на $\mathbb{R}$, тобто при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ $|F(x)-F(y)|+|H(x)-H(y)| \le C|x-y|$ зі сталою
$$C = \max\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-2A(x)}, \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{2A(x)}\frac{1}{b(x)}\right). \tag{3}$$

За наведених вище умов (див. [1]) існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності дифузійний процес $(x(t))_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}$, для якого функція $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є коефіцієнтом переносу, а функція $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ — коефіцієнтом дифузії. Крім того, його ймовірність переходу $P(t,x,\Gamma)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\Gamma\in\mathcal{B}$ (через $\mathcal{B}$ позначена σ-алгебра борелевих множин в $\mathbb{R}$), допускає зображення $P(t,x,\Gamma)=\int_\Gamma g(t,x,y)dy$, де функція g є фундаментальним розв'язком параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x},\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Для функції g при кожному наборі значень $k=0,1$ та $j=0,1$ справджуються нерівності (див. [2])

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,x,y)\right|\leq Kt^{-\frac{k+1}{2}-j}\exp\left\{-\mu\frac{(y-x)^2}{t}\right\} \tag{5}$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ та $t\in(0;T]$, яким би не було $0<T<+\infty$ з деякою сталою $\mu>0$ та сталою $K>0$, яка може залежати від T. За певних умов, як показують результати роботи [3], константу K можна вибрати незалежною від T, і тоді оцінка (5) виконується при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$. При цьому жодних додаткових умов, окрім гладкості функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ в нашій ситуації (тобто, коли ці функції задовольняють умови 2, 3) вимагати не треба.

Нерівності (5) дозволяють стверджувати, що для функції $f_t(x)=\int_0^t g(\tau,x,0)d\tau$ має місце нерівність $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_t(x)\leq\int_0^t Kt^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\mu\frac{x^2}{\tau}\right\}d\tau\leq 2K\sqrt{t}$ при всіх $t\in(0;T]$. Тому $\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}} f_t(x)=0$ і, отже, існує W-функціонал $\eta_t=\eta_t(x(\cdot))$ такий, що $\mathbb{E}_x\eta_t=f_t(x)$, де $\mathbb{E}_x$ — символ математичного сподівання за мірою $\mathbb{P}_x$ на $\mathcal{B}$, яка є умовною ймовірністю при умові, що $x(0)=x$. При цьому $\eta_t=\lim_{h\downarrow 0}\int_0^t\frac{f_h(x(\tau))}{h}d\tau$ в середньому квадратичному за кожною мірою $\mathbb{P}_x$. Через те, що $\frac{f_h(x)}{h}\to\delta(x)$ при $h\downarrow 0$, де $(\delta(x))_{x\in\mathbb{R}}$ — Діракова δ-функція зосереджена в точці 0, можна символічно записати $\eta_t=\int_0^t\delta(x(\tau))d\tau$. Такий функціонал зростає тільки в ті моменти часу, коли процес $x(t)$ перебуває в нулі, і його називають локальним часом в нулі цього процесу.

Розглянемо при $\lambda > 0$ функцію (резольвентне ядро) $R_\lambda(x,\Gamma)$ аргументів $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, яка задається рівністю $R_\lambda(x,\Gamma) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P(t,x,\Gamma)dt$. При фіксованих $\lambda > 0$ та $x \in \mathbb{R}$ функція $R_\lambda(x,\cdot)$ є мірою на $\mathcal{B}$ абсолютно неперервною відносно міри Лебега і її щільність

$$r_\lambda(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g(t,x,y)dt$$

допускає представлення (див. [4])

$$r_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2v_-(x,\lambda)v_+(y,\lambda)}{c(\lambda)b(y)} e^{2A(y)}, & \text{при } x \le y; \\ \dfrac{2v_-(y,\lambda)v_+(x,\lambda)}{c(\lambda)b(y)} e^{2A(y)}, & \text{при } x \ge y, \end{cases} \tag{6}$$

де

$$v_-(x,\lambda) = v(x,\lambda)\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}, \quad v_+(x,\lambda) = v(x,\lambda)\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}, \tag{7}$$

$$c(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(y)}{v(y,\lambda)^2}.$$

Тут функція $(v(x,\lambda))_{x\in\mathbb{R},\lambda>0}$ є сумою ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k v^{(k)}(x)$, локально рівномірно збіжного відносно $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, де для $k = 1, 2, \ldots$ маємо

$$v^{(k)}(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y v^{(k-1)}(z)dH(z) \right) dF(y), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

а $v^{(0)} \equiv 1$. Причому мають місце оцінки

$$\operatorname{ch}\left(x\sqrt{2\lambda\mu_-}\right) \le v(x,\lambda) \le \operatorname{ch}\left(x\sqrt{2\lambda\mu_+}\right) \tag{9}$$

зі сталими $\mu_+ \geq \mu_- > 0$, які визначаються рівностями

$$\mu_- = \inf_{x\in\mathbb{R}} F'(x) \inf_{x\in\mathbb{R}} H'(x), \quad \mu_+ = \sup_{x\in\mathbb{R}} F'(x) \sup_{x\in\mathbb{R}} H'(x) \tag{10}$$

Нехай $u_\theta(t,x) = \mathbb{E}_x e^{i\theta\eta_t}$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Відомо, що ця функція задовольняє рівняння

$$u_\theta(t,x) = 1 + i\theta \int_0^t g(\tau, x, 0) u_\theta(t-\tau, 0) d\tau. \tag{11}$$

Позначимо через $U_\theta(\lambda, x)$ перетворення Лапласа по t функції $u_\theta(t,x)$, тобто, для $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ покладемо $U_\theta(\lambda, x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u_\theta(t,x) dt$. З (11) одержимо рівняння $U_\theta(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} + i\theta r_\lambda(x,0) U_\theta(\lambda, 0)$, звідки маємо $U_\theta(\lambda, x) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{i\theta r_\lambda(x,0)}{\lambda(1 - i\theta r_\lambda(0,0))}$.

2 Послідовності дифузійних процесів та їх локальних часів в нулі

Розглянемо послідовності функцій $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, де $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$ з функціями $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, які задовольняють умови 1 – 3. Ці ж умови задовольняє кожна пара функцій $a_n(x)$ та $b_n(x)$. Причому послідовність функцій $A_n(x) = \int_0^x \frac{a_n(y)}{b_n(y)} dy = A(nx)$ рівномірно обмежена на всій числовій осі $\mathbb{R}$. Зауважимо, що з (2) випливають рівності

$$F_n(x) = \int_0^x e^{-2A_n(y)} dy = \frac{1}{n} F(nx), \quad H_n(x) = \int_0^x e^{2A_n(y)} \frac{dy}{b_n(y)} = \frac{1}{n} H(nx). \tag{12}$$

Ліпшицевість функцій $F(x)$ та $H(x)$ має своїм наслідком рівномірну відносно n ліпшицевість функцій $F_n(x)$ та $H_n(x)$, дійсно,

$$|F_n(x) - F_n(y)| + |H_n(x) - H_n(y)| \leq \frac{1}{n} C|nx - ny| = C|x - y|,$$

де додатна стала C задається рівністю (3). Крім того,

$$\mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} F_n'(x) = \mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} F'(x), \quad \mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} H_n'(x) = \mathrm{extr}_{x\in\mathbb{R}} H'(x),$$

де extr означає inf чи sup одночасно.

Позначимо через $(x_n(t))_{t\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$, послідовність дифузійних процесів з коефіцієнтами переносу $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та дифузії $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ відповідно. Для щільності g_n ймовірності переходу процесу $x_n(t)$ має місце рівність $g_n(t,x,y) = ng(n^2t, nx, ny)$, що є наслідком властивості автомодельності рівняння (4).

У представленні (6) щільності резольвентного ядра процесу $x_n(t)$ функції

$$v_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k v_n^{(k)}(x),$$

де $v_n^{(k)}$ будуються згідно (8) за функціями $F_n(x)$ та $H_n(x)$, задовольняють нерівності (9) рівномірно відносно $n\in\mathbb{N}$ з тими ж сталими μ_- та μ_+. Крім того, для функцій $v_n^{(k)}$ мають місце оцінки

$$\mu_-^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq v_n^{(k)}(x) \leq \mu_+^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Це означає, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k v_n^{(k)}(x)$ збігається рівномірно по $n\in\mathbb{N}$ і локально рівномірно по $\lambda > 0$ та $x\in\mathbb{R}$.

Нехай $(\eta_t^{(n)})_{t\geq 0}$ — локальний час в нулі дифузійного процесу $x_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ і $t>0$ за умови, що $x_n(0)=x$, характеристична функція $u_\theta^{(n)}(t,x) = \mathbb{E}_x e^{i\theta\eta_t^{(n)}}$ має перетворення Лапласа

$$U_\theta^{(n)}(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta r_\lambda^{(n)}(x,0)}{\lambda(1 - i\theta r_\lambda^{(n)}(0,0))}. \tag{13}$$

Тут, оскільки $A_n(0) = 0$,

$$r_\lambda^{(n)}(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2v_-^{(n)}(x,\lambda)v_+^{(n)}(0,\lambda)}{c^{(n)}(\lambda)b_n(0)}, & \text{при } x\leq 0; \\ \dfrac{2v_-^{(n)}(0,\lambda)v_+^{(n)}(x,\lambda)}{c^{(n)}(\lambda)b_n(0)}, & \text{при } x\geq 0, \end{cases} \tag{14}$$

де $v_-^{(n)}$, $v_+^{(n)}$, $c^{(n)}$ задаються формулами (7), записаними для процесу $x_n(t)$. Зауважимо, що $b_n(0) = b(0)$.

3 Гранична теорема

Припустимо надалі, що функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, як і раніше, задовольняють умови 1 — 3 і, крім того, є такими, що існують скінченні границі

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}F(x)=\varkappa_F^-,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}F(x)=\varkappa_F^+;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}H(x)=\varkappa_H^-,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}H(x)=\varkappa_H^+.$$

Тоді на кожній півосі $\mathbb{R}^-=(-\infty;0)$, $\mathbb{R}^+=(0;+\infty)$ функціональні послідовності $F_n(x)$ та $H_n(x)$ збігаються локально рівномірно і, враховуючи (12), маємо:

$$\text{при } x>0\quad \lim_{n\to\infty}F_n(x)=\varkappa_F^+x,\quad \lim_{n\to\infty}H_n(x)=\varkappa_H^+x,$$
$$\text{а при } x<0\quad \lim_{n\to\infty}F_n(x)=\varkappa_F^-x,\quad \lim_{n\to\infty}H_n(x)=\varkappa_H^-x.$$

Рівномірна відносно n ліпшицевість функцій $F_n(x)$ та $H_n(x)$ дозволяє стверджувати, що для кожної функціональної послідовності $(f_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, $n\in\mathbb{N}$, яка локально рівномірно збігається при $n\to\infty$ до функції $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$, мають місце рівності:
при $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(y)dF_n(y)=\varkappa_F^+\int_0^x f(y)dy,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(y)dH_n(y)=\varkappa_H^+\int_0^x f(y)dy;$$

при $x<0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(y)dF_n(y)=\varkappa_F^-\int_0^x f(y)dy,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(y)dH_n(y)=\varkappa_H^-\int_0^x f(y)dy.$$

Таким чином, у співвідношенні

$$v_n^{(k)}(x)=\int_0^x\left(\int_0^y v_n^{(k-1)}(z)dH_n(z)\right)dF_n(y),\quad k\geq 1,$$

можемо перейти до границі і для $\hat{v}^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^{(k)}(x)$ одержати, що при $k \geq 1$

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \varkappa^+ \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y \hat{v}^{(k-1)}(z)dz \right) dy, \text{ при } x > 0;$$

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \varkappa^- \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y \hat{v}^{(k-1)}(z)dz \right) dy, \text{ при } x < 0,$$

де $\varkappa^- = \varkappa_F^- \varkappa_H^-$, $\varkappa^+ = \varkappa_F^+ \varkappa_H^+$. Очевидно, що $\hat{v}^{(0)}(x) \equiv 1$.

Поклавши $\varkappa(x) = \varkappa^- + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)(\varkappa^+ - \varkappa^-)$, де $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ — індикаторна функція додатної півосі, одержимо $\hat{v}^{(k)}(x) = \dfrac{(\varkappa(x))^k x^{2k}}{(2k)!}$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$. Рівномірна за n збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k v_n^{(k)}(x)$ дозволяє записати

$$\hat{v}(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k \hat{v}^{(k)}(x) = \operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa(x)}.$$

Враховуючи нерівності (9), які мають місце для $v_n(x,\lambda)$ рівномірно по n, одержимо при $x > 0$

$$\hat{v}_+(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_+^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda) \int\limits_x^{+\infty} \frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2} dy = \frac{\varkappa_F^+}{\sqrt{2\lambda\varkappa^+}} e^{-x\sqrt{2\lambda\varkappa^+}}, \quad (15)$$

$$\hat{v}_-(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_-^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda) \left(\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2} dy + \int\limits_0^x \frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2} dy \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \left(\sqrt{\frac{\varkappa_F^-}{\varkappa_H^-}} \operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa^+} + \sqrt{\frac{\varkappa_F^+}{\varkappa_H^+}} \operatorname{sh} x\sqrt{2\lambda\varkappa^+} \right),$$

а при $x < 0$

$$\hat{v}_+(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_+^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda) \left(\int\limits_x^0 \frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2} dy + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2} dy \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \left(\sqrt{\frac{\varkappa_F^+}{\varkappa_H^+}} \operatorname{ch} x\sqrt{2\lambda\varkappa^-} - \sqrt{\frac{\varkappa_F^-}{\varkappa_H^-}} \operatorname{sh} x\sqrt{2\lambda\varkappa^-} \right),$$

$$\hat{v}_-(x,\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_-^{(n)}(x,\lambda) = \hat{v}(x,\lambda)\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy = \frac{\varkappa_F^-}{\sqrt{2\lambda\varkappa^-}} e^{x\sqrt{2\lambda\varkappa^-}}. \quad (16)$$

Крім того,

$$\begin{aligned} \hat{c}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} c^{(n)}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tfrac{\varkappa_F^-}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy + \int\limits_{0}^{+\infty} \tfrac{\varkappa_F^+}{\hat{v}(y,\lambda)^2}dy = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\sqrt{\tfrac{\varkappa_F^-}{\varkappa_H^-}} + \sqrt{\tfrac{\varkappa_F^+}{\varkappa_H^+}}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Знайдемо тепер границю при $n\to\infty$ функціональної послідовності $(r_\lambda^{(n)}(x,0))_{n\in\mathbb{N}}$ для кожних $\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}$. З рівностей (14) — (17) маємо $\hat{r}_\lambda(x,0) = \lim\limits_{n\to\infty} r_\lambda^{(n)}(x,0) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{b(0)\left(\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+} + \sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}\right)} \dfrac{e^{x\sqrt{2\lambda\varkappa^-}}}{\sqrt{2\lambda}}, & \text{при } x\le 0, \\ \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{b(0)\left(\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+} + \sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}\right)} \dfrac{e^{-x\sqrt{2\lambda\varkappa^+}}}{\sqrt{2\lambda}}, & \text{при } x\ge 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{\beta}{b(0)}\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-|x|\sqrt{2\lambda\varkappa(x)}},$$

де $\beta = \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+} + \sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}}$.

Тому, перейшовши в рівності (13) до границі при $n\to\infty$, одержимо

$$\hat{U}_\theta(\lambda,x) = \lim_{n\to\infty} U_\theta^{(n)}(\lambda,x) = \frac{1}{\lambda} + \frac{i\theta\beta e^{-|x|\sqrt{2\lambda\varkappa(x)}}}{\lambda\left(b(0)\sqrt{2\lambda} - i\theta\beta\right)}. \quad (18)$$

Далі будемо припускати, що функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ та $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ є настільки гладкими, що відповідний фундаментальний розв'язок рівняння (4) задовольняє (5) при всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ та $t>0$ з деякими додатними сталими K та μ. Нагадаємо, що функції g_n також задовольняють ці ж нерівності рівномірно по n.

Наступні твердження дозволяють обґрунтовати той факт, що функція $\hat{U}_\theta(\lambda,x)$ є перетворенням Лапласа граничної функції послідовності характеристичних функцій $u_\theta^{(n)}(t,x)$.

Лема 1. *Нехай* $(f_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, *— послідовність рівномірно по* n *обмежених на* $[0;+\infty)$ *функцій, тобто* $|f_n(t)| \leq C$ *для всіх* $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *з деякою додатною сталою* C. *Розглянемо функції*

$$\Phi_n(t,x) = \int_0^t g_n(\tau,x,0) f_n(t-\tau) d\tau.$$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$, *яким би не було* $T > 0$, *існує* $\delta > 0$ *таке, що*

$$|\Phi_n(s,x) - \Phi_n(t,y)| < \varepsilon$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0;T]$, $t \in [0;T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, *якщо тільки* $|s-t| + |x-y| < \delta$.

Доведення. Оскільки $\Phi_n(t,x) = \int_0^t g_n(t-\tau,x,0) f_n(\tau) d\tau$, то взявши $0 < s \leq t$, матимемо

$$\Phi_n(t,y) - \Phi_n(s,x) = \int_0^s \left(g_n(t-\tau,y,0) - g_n(s-\tau,x,0)\right) f_n(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_s^t g_n(t-\tau,y,0) f_n(\tau) d\tau. \tag{19}$$

Нерівності (5) дозволяють оцінити другий інтеграл в сумі (19) величиною

$$CK \int_s^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2CK\sqrt{t-s},$$

яку можна зробити як завгодно малою вибором малої різниці $t-s$.

Оцінюючи перший інтеграл у (19), розглянемо дві ситуації. В першій з них покладемо $x = y$. Тоді, подавши цей інтеграл у вигляді суми інтегралів від тієї ж функції на інтервалах $[s-\sigma; s]$ та $[0; s-\sigma]$ з деяким додатним $\sigma < s$, матимемо оцінки

$$\left|\int\limits_{s-\sigma}^{s}\left(g_n(t-\tau,x,0)-g_n(s-\tau,x,0)\right)f_n(\tau)d\tau\right| \leq$$
$$\leq CK\left(\int\limits_{s-\sigma}^{s}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+\int\limits_{s-\sigma}^{s}\frac{d\tau}{\sqrt{s-\tau}}\right)\leq 4CK\sqrt{\sigma},$$

$$\left|\int\limits_{0}^{s-\sigma}\left(g_n(t-\tau,x,0)-g_n(s-\tau,x,0)\right)f_n(\tau)d\tau\right| \leq$$
$$\leq CK|t-s|\int\limits_{0}^{s-\sigma}\frac{d\tau}{\sqrt{(t'-\tau)^3}}\leq 2CK\sqrt{\sigma^{-1}}|t-s|.$$

Тут використано нерівності (5), а в другому випадку ще і теорему Лагранжа про скінчені прирости. Отже, вибравши та зафіксувавши достатньо мале $\sigma > 0$, перший інтеграл у правій частині (19) може бути зроблений як завгодно малим з допомогою вибору малої різниці $t - s$.

В другій ситуації нехай $s = t$. Тоді з нерівностей (5) маємо (тут $0 < \sigma < s$)

$$\left|\int\limits_{s-\sigma}^{s}\left(g_n(s-\tau,y,0)-g_n(s-\tau,x,0)\right)f_n(\tau)d\tau\right| \leq 2CK\int\limits_{s-\sigma}^{s}\frac{d\tau}{\sqrt{s-\tau}}\leq$$
$$\leq 4CK\sqrt{\sigma},$$

$$\left|\int\limits_{s-\sigma}^{s}\left(g_n(s-\tau,y,0)-g_n(s-\tau,x,0)\right)f_n(\tau)d\tau\right| \leq CK|y-x|\int\limits_{0}^{s-\sigma}\frac{d\tau}{s-\tau}\leq$$
$$\leq CK|y-x|\ln\frac{T}{\sigma}.$$

В другому випадку знову застосовується згадана теорема Лагранжа. Отже, і в цій ситуації вибравши та зафіксувавши достатньо мале

$\sigma > 0$, перший інтеграл у правій частині (19) може бути зроблений як завгодно малим вибором близьких $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$.

Випадок $0 = s \le t$ простий, адже $\Phi_n(s,x)|_{s=0} = 0$ і

$$|\Phi_n(t,y)| = \left| \int\limits_0^t g_n(t-\tau, y, 0) f_n(\tau) d\tau \right| \le 2CK\sqrt{t},$$

що є малим, якщо t близьке до нуля. □

Лема 2. *При фіксованих $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $S > 0$ для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при всіх $s \ge S$, $t \ge S$, $n \in \mathbb{N}$*

$$|g_n(t,x,0) - g_n(s,x,0)| < \varepsilon,$$

якщо тільки $|t-s| < \delta$.

Доведення. З нерівностей (5) та теореми Лагранжа для деякого $\sigma \in (s;t)$ маємо $|g_n(t,x,0) - g_n(s,x,0)| \le K\sigma^{-3/2}|t-s| \le KS^{-3/2}|t-s|$, що доводить лему. □

В умовах леми 1 для кожних $\theta > 0$, $T > 0$ та компактної множини $M \subset \mathbb{R}$ послідовність функцій $u_\theta^{(n)}(t,x)$ є рівномірно обмеженою (як послідовність характеристичних функцій) та одностайно неперервною, а отже, і предкомпактною на множині зміни аргументів $t \in [0;T]$, $x \in M$ (теорема Арцела). Тому для кожних $\theta > 0$, $T > 0$ існує підпослідовність послідовності $u_\theta^{(n)}(t,x)$, яка рівномірно на множині $[0;T] \times M$ збігається до деякої функції $\hat{u}_\theta(t,x)$. Отже, користуючись діагональним методом, ми можемо побудувати таку підпослідовність $u_\theta^{(n_k)}(t,x)$, яка б рівномірно збігалася на кожній множині $[0;T]$, $T > 0$, до функції $\hat{u}_\theta(t,x)$ при фіксованих $\theta > 0$ та $x \in \mathbb{R}$. Аналогічно лема 2 дозволяє з підпослідовності $g_{n_k}(t,x,0)$ вибрати рівномірно збіжну за аргументом t на кожному відрізку $[S;T]$ $(0 < S < T)$ підпослідовність. Легко переконатись, що інтеграл $\int\limits_0^t g_n(\tau,x,0) u_\theta^{(n)}(t-\tau,0) d\tau$ збігається рівномірно по $n \in \mathbb{N}$ при кожному $x \in \mathbb{R}$. Тому, позначивши через $\hat{g}(t,x,0)$ границю побудованої підпослідовності щільностей ймовірностей переходу, можемо записати

$$\hat{u}_\theta(t,x) = 1 + i\theta \int\limits_0^t \hat{g}(\tau,x,0)\hat{u}_\theta(t-\tau,0)d\tau. \tag{20}$$

Зауважимо, що з нерівностей (5) випливає оцінка

$$|\hat{g}(t,x,y)| \le Kt^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\mu\frac{(y-x)^2}{t}\right\}$$

для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ з тими ж сталими K і μ, що і в (5).

При цьому, як легко бачити, рівняння (20) має єдиний обмежений розв'язок і, отже, вся послідовність $u_\theta^{(n)}(t,x)$ збігається при $n \to \infty$ до функції $\hat{u}_\theta(t,x)$.

Через рівномірну на множині зміни аргументів $\theta > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ збіжність інтегралу $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}u_\theta^{(n)}(t,x)dt$ маємо

$$\lim_{k\to\infty} U_\theta^{(n_k)}(\lambda,x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\hat{u}_\theta(t,x)dt = \hat{U}_\theta(\lambda,x).$$

Остання рівність є наслідком збіжності послідовності $U_\theta^{(n)}(\lambda,x)$. Таким чином, функція $\hat{U}_\theta(\lambda,x)$ є перетворенням Лапласа границі характеристичних функцій $u_\theta^{(n)}(t,x)$.

З рівності (18) одержимо, що

$$\hat{u}_\theta(t,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{|x|\sqrt{\frac{\varkappa(x)}{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy +$$
$$+ \exp\left\{-i\theta\frac{\beta}{b(0)}|x|\sqrt{\varkappa(x)} - \frac{1}{2}\theta^2\frac{\beta^2}{b(0)^2}t\right\} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|x|\sqrt{\frac{\varkappa(x)}{t}}-i\theta\frac{\beta}{b(0)}\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Тоді при кожних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ функція розподілу $(F_{t,x}(y))_{y\in\mathbb{R}}$, для якої $\hat{u}_\theta(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta y}F_{t,x}(dy)$, має вигляд (21) наведений в наступній теоремі, що є основним результатом даної роботи.

Теорема. *Нехай функції* $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *та* $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$, *зі значеннями в* $\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^+$, *відповідно обмежені гельдерові та* $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$. *Припустимо, що функція* $A(x) = \int\limits_0^x \frac{a(y)}{b(y)}dy$ *обмежена на* $\mathbb{R}$ *та існують границі*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{-2A(y)}dy = \varkappa_F^{\pm}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{2A(y)}\frac{dy}{b(y)} = \varkappa_H^{\pm}.$$

Крім того, нехай функції $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *та* $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *настільки гладкі, що нерівності* (5) *мають місце при всіх* $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ *з* $k+j\le 1$ *(див., напр.,* [3]*).*

Тоді послідовність локальних часів в нулі до моменту часу t *дифузійних процесів на* $\mathbb{R}$ *з коефіцієнтами переносу* $na(nx)$ *та дифузії* $b(nx)$, *які стартують в точці* x, *збігається за розподілом при* $n\to\infty$ *для кожних* $t>0$ *та* $x\in\mathbb{R}$ *до випадкової величини, розподіл якої задається функцією*

$$F_{t,x}(y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{\frac{y}{\beta}b(0)+|x|\sqrt{\varkappa(x)}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz, \tag{21}$$

де $\beta = \dfrac{2\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_F^+}}{\sqrt{\varkappa_F^-\varkappa_H^+}+\sqrt{\varkappa_F^+\varkappa_H^-}}$, *а* $\varkappa(x) = \varkappa_F^-\varkappa_H^- + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)(\varkappa_F^+\varkappa_H^+ - \varkappa_F^-\varkappa_H^-)$.

4 Окремі випадки

Розглянемо симетричний випадок, тобто, $\varkappa_F^- = \varkappa_F^+ = \varkappa_F$ та $\varkappa_H^- = \varkappa_H^+ = \varkappa_H$. Тоді $\beta = \sqrt{\dfrac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}$ і $\varkappa(x) = \varkappa_F\varkappa_H = \varkappa$ при всіх $x\in\mathbb{R}$. Отже, граничний розподіл послідовності локальних часів в нулі розглянутих вище дифузійних процесів задається функцією

$$F_{t,x}(y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\varkappa_H}{\varkappa_F}}b(0)y+|x|\sqrt{\varkappa}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz. \tag{22}$$

В цій ситуації (див. [5, 6]) розглянута послідовність дифузійних процесів слабко збігається при $n\to\infty$ до процесу $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}w(t)\right)_{t\ge0}$, де

$(w(t))_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес. Розподіл локального часу в нулі такого процесу задається функцією

$$\tilde{F}_{t,x}(y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}y+|x|\sqrt{\varkappa}} e^{-\frac{z^2}{2t}}dz. \tag{23}$$

Видно, що розподіли (22) та (23) мають один і той же атом при $y = 0$, який є ймовірністю того, що стартуючи з точки $x \in \mathbb{R}$, граничний процес до моменту часу $t > 0$ не досягне точки 0. Обидва розподіли однакові, якщо $b(0) = \frac{1}{\varkappa_H}$.

Ще один частковий випадок. Нехай поряд з умовами 1, 2 має місце збіжність інтегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|a(x)|dx$ та існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = b(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = b(+\infty)$.

Зауважимо, що при цьому для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$|A(x)| \leq \frac{1}{\inf\limits_{y\in\mathbb{R}} b(y)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|a(y)|dy,$$

тобто, виконується умова 3. Крім того, функції $F(x)$ та $H(x)$ мають додатні похідні і, отже, зростають. Легко бачити, що при цьому $F(x) \to \pm\infty$ та $H(x) \to \pm\infty$, якщо $x \to \pm\infty$. Тоді, користуючись правилом Лопіталя, знайдемо границі

$$\varkappa_F^- = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}F(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2A(x)} = \exp\left\{2\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{a(x)}{b(x)}dx\right\};$$

$$\varkappa_F^+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}F(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2A(x)} = \exp\left\{-2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{a(x)}{b(x)}dx\right\};$$

$$\varkappa_H^- = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}H(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2A(x)}\frac{1}{b(x)} = \exp\left\{-2\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}\frac{1}{b(-\infty)};$$

$$\varkappa_H^+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}H(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2A(x)}\frac{1}{b(x)} = \exp\left\{2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}\frac{1}{b(+\infty)}.$$

Таким чином, $\varkappa_F^- \varkappa_H^- = \frac{1}{b(-\infty)}$, $\varkappa_F^+ \varkappa_H^+ = \frac{1}{b(+\infty)}$ і, отже,

$$\varkappa(x) = \frac{1}{b(-\infty)} + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \left(\frac{1}{b(+\infty)} - \frac{1}{b(-\infty)} \right). \tag{24}$$

Звідси ж

$$\beta = \frac{2\exp\left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{a(x)}{b(x)}dx - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)}dx \right\}}{\exp\left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)}dx \right\} \frac{1}{\sqrt{b(+\infty)}} + \exp\left\{ -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(x)}{b(x)}dx \right\} \frac{1}{\sqrt{b(-\infty)}}}. \tag{25}$$

Граничний розподіл розглянутої послідовності локальних часів в нулі задається функцією (21) з параметрами, що визначаються рівностями (24) і (25).

[1] *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. — Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1979. — 350 p.

[2] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 428 с.

[3] *Порпер Ф.О., Эйдельман С.В.* Асимптотическое поведение классических и обобщённых решений одномерных параболических уравнений второго порядка // Труды Моск. Матем. общества. – 1978. – **36.** – С. 85–130.

[4] *Портенко М.І., Сергієнко М.П.* Про збіжність резольвент деякої послідовності дифузійних процесів // Матем. сьог. – 2009. – С. 1–9.

[5] *Кулинич Г.Л.* Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения // Укр. мат. ж. – 1968. – **20**, № 3. – С. 396–400.

[6] *Кулинич Г.Л.* Предельные распределения решения стохастического диффузионного уравнения // Теор. вероятн. и ее примен. – 1968. – **XIII**, № 3. – С. 502–506.

A LIMIT DISTRIBUTION FOR LOCAL TIMES AT ZERO OF A SEQUENCE OF DIFFUSION PROCESSES

Mykhailo OSYPCHUK[1], *Mykola PORTENKO*[2]

[1]Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk 76025, Ukraine
[2]Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3 Tereschenkivska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *myosyp@gmail.com, portenko@imath.kiev.ua*

We prove a limit theorem for distributions of local times at zero of diffusion processes weakly convergent to the limiting diffusion process. We do not assume that the diffusion coefficients of the limiting process are the appropriate limits of coefficients outgoing processes. In particular, we consider a sequence of diffusion processes with their drift coefficients $a_n(x) = na(nx)$ and their diffusion coefficients $b_n(x) = b(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, where $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ are some given functions.