ДЕКОМПОЗИЦІЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ПЕРЕХІДНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

©2011 р. *Володимир МАСЛЮЧЕНКО, Василь НЕСТЕРЕНКО*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського 2, Чернівці 58012
e-mail: *math.analysis.chnu@gmail.com*

Редакція отримала статтю 14 серпня 2011 р.

Вводиться поняття перехідного відображення в довільних топологічних просторах і досліджуються властивості таких відображень. Встановлено, що коли X — локально зв'язний простір, Y — топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним, то f неперервне.

1. Вступ. Під декомпозицією неперервності розуміють теореми, в яких встановлюється неперервність функції при виконанні кількох інших умов. Такими умовами виступають різні послаблення неперервності (нарізна неперервність, квазінеперервність, майже неперервність, властивість Дарбу, наявність замкненого графіка, тощо), але буває, що ці властивості компонуються з властивостями іншої природи (монотонність, лінійність, адитивність і т. д.). У нашому короткому огляді ми будемо розглядати в основному ті результати, в яких однією з умов виступає замкненість графіка функції.

Напевно, першою теоремою про декомпозицію неперервності була теорема Банаха про замкнений графік [1, с. 35, теорема 7], яка твердить, що для довільних F-просторів X і Y кожне адитивне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. У XX ст. ця

УДК: 517.51; MSC 2000: MSC 2000: 54C30, 54E35
Ключові слова і фрази: перехідне відображення, замкнений графік, зв'язний графік, слабка властивість Дарбу, функція типу Чезаро

теорема дістала значний розвиток у працях різних математиків (див. [2] і вказану там літературу).

До цього напрямку слід віднести і теореми про автоматичну неперервність функцій із замкненим графіком. Наприклад, добре відомий такий результат [3, с. 228]: якщо X — гаусдорфовий простір і Y — компакт, то відображення $f : X \to Y$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно має замкнений графік. Інші результати на цю тему є в статтях [4, 5]. Сюди ж слід долучити і результат К.Е. Барґеса [6]: кожна локально обмежена функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною.

Зауважимо, що функції з замкненим графіком самі по собі не дуже розривні. А саме І. Баґґс [7] показав, що підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ є множиною точок розриву функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Результат Баґґса Й. Добош [8] переніс на функції $f : X \to \mathbb{R}$, що задані на берівських метризовних просторах. Крім того, він встановив, що для довільного топологічного простору X множина $D(f)$ точок розриву функції $f : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є замкненою множиною першої категорії в X і, навпаки, кожна замкнена множина першої категорії в досконало нормальному просторі X є множиною точок розриву деякої функції $f : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком. Ці дослідження були продовжені у праці [9], в якій, зокрема, доведено, що кожна двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною.

У працях [10, 11] згадується результат: кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із зв'язним і замкненим графіком є неперервною. У [11] навіть подано доведення цієї теореми, яке базується на одній теоремі Баґґса [12] про неперервність переферійно неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком. У праці [13] було наведено питання Риль-Нардзєвського: чи кожна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ із зв'язним і замкненим графіком буде неперервною? Негативну відповідь на це питання отримав Ї. Єлінек [11].

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ має *властивість Дарбу*, якщо для кожної зв'язної в X множини A її образ $f(A)$ є зв'язною множиною в просторі Y. Ми кажемо, що f має *слабку властивість*

Дарбу, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X є зв'язною множиною в Y (функції з слабкою властивістю Дарбу використовував Р.А. Мімна [14], який їх називав O-зв'язними). У своїй дисертації М.Р. Вуйцик подав такий результат [15, с. 15, наслідок 18]: якщо X — локально зв'язний простір, Y — локально компактний простір і $f : X \to Y$ — функція із замкненим графіком, яка має властивість Дарбу, то функція f — неперервна. Р.А. Мімна [14] увів поняття локальної w^*-неперервності і отримав таку теорему про декомпозицію неперервності: якщо простір X — локально зв'язний, Y — довільний топологічний простір і $f : X \to Y$ — локально w^*-неперервне відображення, що має слабку властивість Дарбу, то f неперервне (див. також [16]).

П.Е. Лонґ і Е.Е. Макґегі [17] та А.І. Бернер [18] вказали умови на простори X і Y, які гарантують неперервність майже неперервних відображень $f : X \to Y$ із замкненим графіком (див також праці [19, 20, 21]).

З. Пьотровський і Е. Вінґлер [22] навели приклад нарізно неперервного відображення з замкненим графіком, яке є розривним, і показали, що для локально зв'язного простору X, топологічного простору Y і локально компактного простору Z кожне відображення $f : X \times Y \to Z$ із замкненим графіком, яке має властивість Дарбу відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної, є неперервним. Інший результат на цю тему подали М.Р. Вуйцик і М.С. Вуйцик [10].

В.І. Крецу і В.К. Маслюченко [23] з'ясували, що кожна неперервна за Стелінґзом [24] функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Для цього було введено нову властивість функцій, яка дістала назву перехідність (її мають функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком), і доведено, що кожна перехідна і неперервна за Стелінґзом функція є неперервною.

Означення перехідності з [23] легко переноситься на функції $f : X \to \mathbb{R}$, що задані на довільних топологічних просторах, але узагальнення цього поняття на відображення $f : X \to Y$ зі значеннями в довільних топологічних просторах вимагає значно більших зусиль. Воно було запропоноване в [25], де анонсувались попередні версії результатів цієї праці.

У даній статті ми детально вивчаємо введене в [25] поняття перехідності відображень $f : X \to Y$ (див. означення в п. 4) і показуємо, що відображення з замкнутим графіком зі значеннями в у гаусдорфовому локально компактному просторі є перехідним. Крім того, ми вводимо послаблення перехідності (слабку перехідність і квазіперехідність) і з'ясовуємо (п. 6), що відображення $f : X \to Y$ буде мати властивість типу Чезаро [26] тоді і тільки тоді, коли воно не є слабко квазіперехідним. Звідки випливає, що, як правило, перехідні відображення не є типу Чезаро.

Далі ми встановлюємо (п. 7), що існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ типу Чезаро, яка не є слабко квазіперехідною, а значить, і перехідною, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$, даючи тим самим відповідь на питання, поставлене в [23]. Разом з тим показуємо, що у кожної слабко квазіперехідної функції $f : X \to \mathbb{R}$ множина точок перехідності залишкова в X.

Ми даємо також новий загальний результат про декомпозицію неперервності (п. 9), частинним випадком якого є теореми з праць [14, 15, 23]: якщо X — локально зв'язний простір, то для довільного топологічного простору Y кожне перехідне відображення $f : X \to Y$, яке має слабку властивість Дарбу, є неперервним.

Нарешті, в статті отримано (п. 11) теорему про декомпозицію сукупної неперервності, яка розвиває результати праць [10, 22], де розглядалися відображення з замкненим графіком: для локально зв'язних просторів X та Y і топологічного простору Z кожне перехідне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке має слабку властивість Дарбу відносно кожної змінної, є неперервним.

2. Перехідні функції. Властивість перехідності для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ була введена в [23]. Без особливих змін вона переноситься на випадок дійснозначних функцій, заданих на довільних топологічних просторах. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *перехідною зверху /знизу/ в точці* x, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x і точка $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ $/y \in (f(x) - \varepsilon, f(x))/$, такі що $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \varnothing$, де $Gr(f)$ — графік функції f. Якщо функція перехідна зверху і знизу в точці x, то вона називається *перехідною в точці* x. Функція називається *перехідною /зверху, знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці x з X.

Надалі символом χ_A ми позначатимемо характеристичну функцію множини A в X.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ — функція і $\overline{\mathbb{R} \setminus f(X)} = \mathbb{R}$. Тоді функція f є перехідною.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки множина $\mathbb{R} \setminus f(X)$ всюди щільна, то існують такі точки y_1 і y_2, що $y_1 \in (f(x) - \varepsilon, f(x))$, $y_2 \in (f(x), f(x)+\varepsilon)$ і $y_1, y_2 \notin f(X)$. Оскільки множини $X \times \{y_1\}$ і $X \times \{y_2\}$ не перетинаються з графіком, то функція f перехідна в точці x. $\square$

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір. Тоді кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$ подається у вигляді суми двох перехідних функцій.*

Доведення. Розглянемо множини $A = f^{-1}(\mathbb{Q})$ і $B = \mathbb{R} \setminus A$ та функції $f_1 = f\chi_A$, $f_2 = f\chi_B$. Оскільки $\chi_A + \chi_B = 1$, то $f = f_1 + f_2$. За побудовою $f_1(X) \subseteq \mathbb{Q}$, а $f_2(X) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, звідки легко вивести, що $\overline{\mathbb{R} \setminus f_i(X)} = \mathbb{R}$ при $i = 1, 2$. Тому, згідно з теоремою 1, функції f_1 та f_2 перехідні. $\square$

Теорема 3. *Кожна монотонна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є перехідною.*

Доведення. Нехай f зростає. Покажемо, що f перехідна зверху. Візьмемо довільну точку $a \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Нехай $f(a+0) < f(a) + \varepsilon$. Тоді для довільної точки $y \in (f(a+0), f(a)+\varepsilon)$ існує точка $b > a$, така, що для кожного $x \in (a, b)$ маємо $f(x) < y$. Оскільки для $x \le a$ маємо $f(x) \le f(a) \le f(a+0) < y$, то для $U = (-\infty, b)$ маємо $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Якщо ж $f(a) + \varepsilon \le f(a+0)$, то для довільної точки $y \in (f(a), f(a)+\varepsilon)$ при $x > a$ маємо $f(x) \ge f(a+0) > y$, а при $x \le a$ маємо $f(x) \le f(a) < y$. Тоді для $U = (-\infty, +\infty)$ отримаємо, що $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Отже, f є перехідною зверху в точці a. Аналогічно встановлюється перехідність знизу в точці a. Для випадку спадання f достатньо розглянути функцію $-f$, яка буде зростаючою. $\square$

3. Характеризація перехідності функцій. Можна дати характеризацію перехідності функції $f : X \to \mathbb{R}$ в топологічних термінах. Нагадаємо, що $fr(B) = \overline{B} \cap \overline{Y \setminus B}$ — це межа множини B у топологічному просторі Y.

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ — функція і $x \in X$. Тоді f є перехідною в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для кожного околу V точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$ існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$ такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$.*

Доведення. Нехай функція f є перехідною в точці $x \in X$. Візьмемо довільний окіл V точки $f(x)$. Існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subseteq V$. Тоді існують окіл U точки x і точки y_1, y_2 такі, що $y_1 \in (f(x) - \varepsilon, f(x))$, $y_2 \in (f(x), f(x)+\varepsilon)$, $(U \times \{y_1\}) \cap Gr(f) = \varnothing$ і $(U \times \{y_2\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Покладемо $W = (y_1, y_2)$. Тоді $fr(W) = \{y_1, y_2\}$ і для кожного $x \in U$ маємо $f(x) \neq y_1, y_2$, отже, $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$.

Навпаки, візьмемо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$, такі, що $W \subseteq (f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2})$ і $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$. Оскільки множина W обмежена, то існують точки $y_1 = \inf W$ і $y_2 = \sup W$. Ясно, що $y_i \in \overline{W}$ при $i = 1, 2$ і

$$f(x) - \varepsilon < f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq y_1 < f(x) < y_2 \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + \varepsilon.$$

Оскільки множина W відкрита, то $y_i \notin W$, отже, $y_i \in \overline{W} \setminus W = fr(W)$ при $i = 1, 2$. Але $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$, отже, $f(x) \neq y_i$ для довільних $i = 1, 2$ та $x \in U$. Тому $(U \times \{y_i\}) \cap Gr(f) = \varnothing$ при $i = 1, 2$, що і дає нам перехідність функції f у точці x. □

Хоча умова перехідності і є досить слабкою, однак існують функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які її не задовольняють.

Приклад 1. *Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої:*

$$f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, & \textit{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \textit{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Так визначена функція не є перехідною в точці $x = 0$ ні зверху, ні знизу. Справді, для довільного $y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ і для кожного околу U точки $x = 0$ існує номер n, такий, що точка $x_y = \frac{1}{\arcsin y + 2n\pi} \in U$. При цьому $f(x_y) = y$, отже, $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing$.

Пізніше ми наведемо приклад функції, яка не є перехідною в жодній точці.

4. Перехідні відображення зі значеннями в топологічних просторах. Теорема 4 дозволяє розширити поняття перехідності на випадок відображень зі значеннями у довільних топологічних просторах. Зауважимо, що для відкритої множини W у просторі Y маємо $fr(W) = \overline{W} \setminus W$. Тому умова $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$ рівносильна включенню $f(U) \subseteq Y \setminus fr(W) = W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$.

Для топологічних просторів X і Y відображення $f : X \to Y$ називається *перехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким у кожній точці з X.

Теорема 5. *Нехай X і Y — топологічні простори. Тоді кожна неперервна функція $f : X \to Y$ є перехідною.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і довільний окіл V точки $f(x)$ в Y. Оскільки функція f неперервна в точці x, то існує такий окіл U точки x в X, що $f(U) \subseteq intV$. Множина $W = intV \subseteq V$ відкрита і $f(U) \subseteq W$, що і дає нам перехідність f у точці x. □

Теорема 6. *Нехай X — топологічний простір, Y — гаусдорфовий локально компактний простір і $f : X \to Y$ — відображення із замкненим графіком. Тоді f — перехідне відображення.*

Доведення. Припустимо, що f не є перехідним у деякій точці $x \in X$. Тоді існує такий окіл V_1 точки $y = f(x)$ в Y, що для будь-якого відкритого околу W точки y в Y, такого, що $W \subseteq V_1$, і для довільного околу U точки x в X маємо $f(U) \cap fr(W) \neq \varnothing$. Оскільки простір Y локально компактний, то в Y існує компактний окіл V_2 точки y. Перетин $V_0 = V_1 \cap V_2$ — це теж окіл точки y в Y. Оскільки простір Y регулярний (навіть тихоновський [27, с. 231]), то в Y існує замкнений окіл V точки y такий, що $V \subseteq V_0$. Цей окіл буде компактним разом з V_2, бо $V \subseteq V_2$.

Нехай $W = intV$. Ясно, що W — це відкритий окіл точки y в Y і $W \subseteq V \subseteq V_0 \subseteq V_1$. Тому для кожного околу U точки x в X існує точка $x_U \in U$ така, що $f(x_U) \in fr(W)$. Позначимо через $\mathcal{U}_x$ систему всіх околів точки x в X. Це напрямлена включенням $\supseteq$ множина і сітка $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ збігається до x в X. Оскільки $y_U = f(x_U) \in fr(W) \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{V} = V$ для кожного $U \in \mathcal{U}_x$ і множина V компактна, то існує така підсітка $(y_{U_j})_{j\in J}$ сітки $(y_U)_{U\in\mathcal{U}_x}$, яка збігається до деякої точки $b \in V$. Але $fr(W)$ — це замкнена множина і $y_{U_j} \in fr(W)$ для кожного j. Тому і $b \in fr(W)$. З іншого боку, $p_j = (x_{U_j}, y_{U_j}) \in Gr(f)$ для кожного j, причому $p_j \to p = (x, b)$ в $X \times Y$. На основі замкненості $Gr(f)$ в $X \times Y$ отримуємо, що $p \in Gr(f)$, тобто $b = f(x) = y$. Але ж $y \in W$, а $b \notin W$, що дає нам суперечність, яка доводить перехідність f. □

5. Слабко перехідні відображення. Нехай X і Y — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ назвемо *слабко перехідним у точці* x з X, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ у просторі Y існують окіл U точки x в X і точка $b \in V$ такі, що $(U \times \{b\}) \cap Gr(f) = \varnothing$, і просто *слабко перехідним*, якщо f має цю властивість у кожній точці x простору X. Зрозуміло, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ буде слабко перехідною тоді і тільки тоді, коли вона перехідна зверху або знизу.

Теорема 7. *Нехай X — топологічний простір, Y — регулярний простір, x — точка з X, $f : X \to Y$ — перехідне в точці x відображення, причому існує зв'язний окіл V_0 точки $y = f(x)$ в просторі Y такий, що $V_0 \neq \{y\}$. Тоді f буде слабко перехідним в точці x.*

Доведення. Нехай V — довільний окіл точки y в просторі Y. З а умовою існує точка y_0 з V_0, така, що $y_0 \neq y$. З аксіоми T_1 випливає, що існує окіл V_1 точки y в Y такий, що $y_0 \notin V_1$. Оскільки простір Y регулярний, то існує такий замкнений окіл V_2 точки y в Y, що $V_2 \subseteq V \cap V_0 \cap V_1$. З перехідності f у точці x випливає, що існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки y в Y такі, що $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$ і $W \subseteq V_2$. Покажемо, що $fr(W) \neq \varnothing$. Якщо $fr(W) = \varnothing$, то W буде відкрито-замкненою множиною у просторі Y, причому $W \subseteq V_0$. Більше того, $W \subset V_0$, адже $y_0 \in V_0 \setminus W$. Крім того, $W \neq \varnothing$, адже $y \in W$. Тоді зв'язна множина V_0 розбивається на дві відкриті в ній непорожні множини W і $V_0 \setminus W$, що неможливо.

Таким чином, $fr(W) \neq \varnothing$. Отже, існує точка $b \in fr(W)$. Оскільки $W \subseteq V_2$ і V_2 — замкнена множина, то і $fr(W) \subseteq V_2 \subseteq V$. В такому разі $b \in V$ і $b \notin f(U)$, тобто $(U \times \{b\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Це і означає, що f слабко перехідне в точці x. □

6. Функції типу Чезаро. Нагадаємо означення функції типу Чезаро [26]. Кажуть, що $f : X \to Y$ — це *функція типу Чезаро*, якщо існують непорожні відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ такі, що для кожного $y \in V$ множина $f^{-1}(y)$ щільна в U.

Введемо ще одне ослаблення перехідності, яке, як ми з'ясуємо далі, пов'язане з властивістю типу Чезаро. Назвемо відображення $f : X \to Y$ *слабко квазіперехідним у точці* x з X, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ у просторі Y і кожного околу U точки x в X існують непорожня відкрита множина G в X і точка $b \in V$ такі, що $G \subseteq U$ і $(G \times \{b\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Якщо ця властивість виконується для кожної точки x з X, то f називається просто *слабко квазіперехідним.*

Теорема 8. *Нехай $f : X \to Y$ — слабко перехідне в точці $x \in X$ відображення. Тоді f буде і слабко квазіперехідним у цій точці.*

Доведення. Нехай V — довільний окіл точки $y = f(x)$ в Y, а U — довільний окіл точки x в X. Оскільки f слабко перехідне у точці x, то існують окіл U_0 точки x і точки $b \in V$ такі, що $(U_0 \times \{b\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Покладемо $G = int(U \cap U_0)$. Зрозуміло, що множина G відкрита і $\varnothing \neq G \subseteq U$, адже $x \in G$. Ясно, що при цьому $(G \times \{b\}) \cap Gr(f) = \varnothing$, отже, f слабко квазіперехідна в точці x. □

Лема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, U — відкрита непорожня множина в X, $y \in Y$, $f : X \to Y$ — відображення і $\overline{f^{-1}(y)} \supseteq U$. Тоді $y \in f(U)$.*

Доведення. З відкритості U випливає, що $\overline{f^{-1}(y) \cap U} \supseteq U$, отже, $f^{-1}(y) \cap U \neq \varnothing$, бо $U \neq \varnothing$. Тому існує точка $x \in f^{-1}(y) \cap U$. Тоді $y = f(x) \in f(U)$. □

Теорема 9. *Відображення $f : X \to Y$ буде мати властивість типу Чезаро тоді і тільки тоді, коли воно не є слабко квазіперехідним.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай f має властивість Чезаро. Тоді існують такі відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y, що $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$ для кожної точки $b \in V$. Згідно з лемою, $f(U) \supseteq V$. Візьмемо якусь точку y з V. Тоді $y = f(x)$ для деякого $x \in U$. Множини U і V — це околи точок x і y у просторах X і Y відповідно. Розглянемо довільну відкриту в X непорожню множину G, яка міститься в U, і довільну точку b з V. Оскільки $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$, то $f^{-1}(b) \cap G \neq \varnothing$, отже,

$(G\times\{b\})\cap Gr(f)\neq\varnothing$. Це показує, що f не є слабко перехідним у точці x.

Достатність. Нехай f не є слабко квазіперехідним. Тоді існує точка $x\in X$, в якій f не є слабко квазіперехідним. В такому разі існують такі околи U_0 і V_0 точок x і $y=f(x)$ у просторах X і Y відповідно, що $(G\times\{b\})\cap Gr(f)\neq\varnothing$ для кожної відкритої непорожньої підмножини G множини U_0 і для кожної точки $b\in V_0$. Множини $U=intU_0$ і $V=intV_0$ є відкритими у відповідних просторах і непорожніми, при цьому $U\subseteq U_0$ і $V\subseteq V_0$. Тому $(G\times\{b\})\cap Gr(f)\neq\varnothing$ для кожної непорожньої відкритої множини $G\subseteq U$ і довільної точки $b\in V$. Це означає, що $\overline{f^{-1}(b)}\supseteq U$ для кожного $b\in V$. Отже, f має властивість типу Чезаро. □

Теорема 10. *Нехай $f:X\to Y$ — слабко перехідне відображення. Тоді f не має властивості типу Чезаро.*

Доведення. З теореми 8 випливає, що f є слабко квазіперехідним, а з теореми 9 отримуємо, що f не має властивості типу Чезаро. □

Теорема 11. *Нехай X — топологічний простір, Y — регулярний простір, $f:X\to Y$ — перехідне відображення і для кожної точки x з X існує зв'язний окіл V точки $y=f(x)$ в Y такий, що $V\neq\{y\}$. Тоді f не має властивості типу Чезаро.*

Доведення. Це твердження негайно випливає з теорем 7 і 10. □

Символом $|E|$ ми позначаємо потужність множини E.

Теорема 12. *Нехай X — топологічний простір, Y — регулярний простір, який задовольняє одну з двох умов:*

а) Y не має ізольованих точок і є локально зв'язним;

б) $|Y|\geq 2$ і Y зв'язний.

Тоді кожне перехідне відображення $f:X\to Y$ не є типу Чезаро.

Доведення. Нехай $f:X\to Y$ — перехідне відображення, $x\in X$ і $y=f(x)$. Якщо виконується умова а), то для кожної точки $x\in X$ існує зв'язний окіл V точки y в Y, причому $V\neq\{y\}$, бо в Y немає ізольованих точок. Якщо ж виконується умова б), то для кожного $x\in X$ окіл $V=Y$ точки y буде зв'язним і $V\neq\{y\}$, бо $|Y|\geq 2$. Таким чином, f не має властивості типу Чезаро, згідно з теоремою 11. □

7. Про точки перехідності.

Теорема 13. *Існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ типу Чезаро, яка не є слабко квазіперехідною в жодній точці $x \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо фактор-групу $\Xi = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ адитивної групи поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел за підгрупою $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Вона складається з елементів ξ, які є зсувами $a + \mathbb{Q}$ множини раціональних чисел на всеможливі дійсні числа a. Отже, $|\xi| = \aleph_0$ для кожного $\xi \in \Xi$. Крім того, $\xi_1 \cap \xi_2 = \varnothing$ для довільних різних елементів ξ_1 і ξ_2 з Ξ і

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{\xi \in \Xi} \xi,$$

бо для кожного $y \in \mathbb{R}$ маємо $y \in \xi_y = y + \mathbb{Q}$. Тому

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = \sum_{\xi \in \Xi} |\xi| = |\Xi| \cdot \aleph_0 = |\Xi|,$$

адже $\mathfrak{n} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{n}$ для довільної нескінченної потужності $\mathfrak{n}$. Нехай $\varphi : \Xi \to \mathbb{R}$ — деяка бієкція. Покладемо $f(x) = \varphi(\xi)$ для довільного $x \in \xi$. Так визначається сюр'єктивна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ця функція і є шуканою. Справді, для довільної точки $x \in \mathbb{R}$ і її образу $y = f(x)$ розглянемо їх околи $U = V = \mathbb{R}$. Нехай $b \in V$ і G — відкрита непорожня частина U. За побудовою множина $\xi = f^{-1}(b)$ — це той елемент ξ з Ξ, що $\varphi(\xi) = b$. Ця множина буде всюди щільною в $\mathbb{R}$. Отже, $f^{-1}(b) \cap G \neq \varnothing$, а значить, $(G \times \{b\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing$. $\square$

Разом з цим наступний результат показує, що слабко квазіперехідні функції (тобто функції $f : X \to \mathbb{R}$, що не є типу Чезаро) насправді будуть слабко перехідними у багатьох точках.

Теорема 14. *Нехай X і Y — топологічні простори і Y має не більш ніж зліченну псевдобазу, а $f : X \to Y$ — слабко квазіперехідне відображення. Тоді множина B всіх тих точок x з X, в яких f буде слабко перехідною, є залишковою в X.*

Доведення. Нехай $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза топології простору Y, що складається з непорожніх множин, і $\mathcal{U}_x$ — система всіх околів точки x в X. Міркуючи від супротивного, припустимо, що доповнення $A = X \setminus B$ є множиною другої категорії в X. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in X : (\forall U_x \in \mathcal{U}_x)(\forall b \in V_n)((U_x \times \{b\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing)\}$$

і перевіримо, що $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Нехай $x \in A$. Тоді $x \notin B$, отже, існує такий окіл V точки $y = f(x)$, що $(U_x \times \{b\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing$ для довільного околу U_x точки x і для довільного $b \in V$. Множина $V_0 = intV$ є відкритою і непорожньою. Тому існує номер k, що $V_k \subseteq V_0$, адже $\mathcal{V}$ — псевдобаза в Y. Ясно, що тоді $x \in A_k$.

Оскільки A — це множина другої категорії, то існує такий номер m, що множина A_m буде щільною у деякій відкритій непорожній множині U. Множина $V = V_m$ є відкритою і непорожньою в Y. Покажемо, що $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$ для кожного $y \in V$. Нехай G — відкрита непорожня частина U і $y \in V$. Оскільки множина A_m щільна в U, то існує точка $x \in G \cap A_m$. Але G — це окіл точки x, тому $(G \times \{y\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing$ за означенням множини A_m. Отже, $f^{-1}(y) \cap G \neq \varnothing$, а це і дає нам щільність $f^{-1}(y)$ в U.

Ми довели, що f — це відображення типу Чезаро, що суперечить умові на основі теореми 9. □

Для $Y = \mathbb{R}$ можна довести більше.

Теорема 15. *Нехай X — топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ — слабко квазіперехідна функція. Тоді множини B, B^+ і B^- всіх тих точок x з X, в яких f буде відповідно перехідною, перехідною зверху чи перехідною знизу, є залишковими в X.*

Доведення. Покажемо, що множина B^+ залишкова в X. Нехай $A = X \setminus B^+$. Припустимо, що A — це множина другої категорії в X. Нехай $\mathcal{U}_x$ — система всіх околів точки x в X і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база топології в $\mathbb{R}$, що складається з непорожніх інтервалів з раціональними кінцями. Як і в доведені теореми 14, введемо множини

$$A_n = \{x \in X : (\forall U_x \in \mathcal{U}_x)(\forall b \in V_n)((U_x \times \{b\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing)\}.$$

З'ясуємо, що $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Нехай $x \in A$, тобто $x \notin B^+$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного околу $U_x \in \mathcal{U}_x$ і будь-якої точки $b \in (f(x), f(x)+\varepsilon)$ перетин $(U_x \times \{b\}) \cap Gr(f)$ непорожній. Існує таке n, що $V_n \subseteq (f(x), f(x)+\varepsilon)$. Тоді $(U_x \times \{b\}) \cap Gr(f) \neq \varnothing$, як тільки $U_x \in \mathcal{U}_x$ і $b \in V_n$, отже, $x \in A_n$.

Далі, міркуючи так само, як в доведенні попередньої теореми, приходимо до суперечності.

Залишковість множини B^- легко випливає з доведеного, коли розглянути функцію $-f$. Далі $B = B^+ \cap B^-$, отже, і множина B залишкова. $\square$

8. Слабка властивість Дарбу. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ *має властивість Дарбу*, якщо образ $f(E)$ кожної зв'язної множини E у просторі X є зв'язною множиною у просторі Y. Будемо говорити, що відображення $f : X \to Y$ *має слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X, тобто відкритої і зв'язної множини, є зв'язною множиною в Y. Це поняття фігурує у статті [14] під назвою O-зв'язність.

Зрозуміло, що коли відображення має властивість Дарбу, то воно має і слабку властивість Дарбу. Обернене твердження невірне. Це показує наступний приклад.

Приклад 2. *Розглянемо функцію* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, яка визначається так:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \\ 1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Функція f не має властивості Дарбу, бо зв'язна множина $(-\infty, 0]$ переходить в незв'язну множину $\{0\} \cup \{1\}$. Однак вона має слабку властивість Дарбу. Щоб це перевірити, розглянемо довільну область G на числовій прямій. Добре відомо, що G — це якийсь інтервал числової прямої. Якщо $0 \in G$, то $f(G) = [-1, 1]$, якщо ж $0 \notin G$, то обов'язково $G \subseteq (-\infty, 0)$ або $G \subseteq (0, +\infty)$. У першому випадку $f(G) = \{1\}$, а в другому випадку множина $f(G)$ зв'язна, бо звуження $f_{|(0,+\infty)}$ неперервне.

9. Теорема про декомпозицію неперервності. З допомогою введених понять можна отримати новий результат про декомпозицію неперервності.

Теорема 16. *Нехай X — локально зв'язний простір, Y — топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним. Тоді f — неперервне відображення.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і окіл V точки $f(x)$ в Y. Оскільки відображення f перехідне в точці x, то існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$. Існує відкритий зв'язний окіл U_0 точки x такий, що $U_0 \subseteq U$. Таким околом буде компонента зв'язності будь-якого відкритого околу G точки x, що містить цю точку і міститься в U. Зрозуміло, що $f(U_0) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$. Оскільки f має слабку властивість Дарбу, то множина $f(U_0)$ зв'язна. Тоді з умови $f(x_0) \in W$ випливає, що $f(U_0) \subseteq W$, звідки отримуємо, що $f(U_0) \subseteq V$. Це і дає нам неперервність f у точці x. $\square$

Зауважимо, що з цієї теореми випливають не тільки результати з праць [14, 15, 23], а й згаданий у вступі результат про неперервність функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі зв'язним і замкненим графіком, бо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі зв'язним графіком має властивість Дарбу [28].

10. Локально w^*-неперервні відображення. Відображення $f : X \to Y$ називається *локально w^*-неперервним* [14, 16], якщо існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y така, що множина $f^{-1}(fr(B))$ є замкненою в X для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Теорема 17. *Нехай X і Y — топологічні простори і відображення $f : X \to Y$ локально w^*-неперервне. Тоді f — перехідне відображення.*

Доведення. Нехай f не є перехідним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує окіл V точки $y_0 = f(x_0) \in Y$ такий, що для довільного відкритого околу W точки y_0 в Y такого, що $W \subseteq V$, і довільного околу U точки x_0 в X маємо, що $f^{-1}(fr(W)) \cap U \neq \varnothing$. Оскільки відображення f локально w^*-неперервне, то існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y така, що множина $f^{-1}(fr(B))$ є замкненою в X для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Нехай V_0 — елемент бази $\mathcal{B}$ такий, що $y_0 \in V_0 \subseteq V$. Розглянемо множину $A = f^{-1}(fr(V_0))$. Оскільки множина $f^{-1}(fr(V_0))$ замкнена в X, то $\overline{A} = f^{-1}(fr(V_0))$.

Покажемо, що $x_0 \in \overline{A}$. Візьмемо довільний окіл U_0 точки x_0 в X. На основі вибору околу V і того, що V_0 — відкритий окіл точки y_0 такий, що $V_0 \subseteq V$ маємо $A \cap U_0 = f^{-1}(fr(V_0)) \cap U_0 \neq \varnothing$. Отже, $x_0 \in \overline{A}$. Оскільки $\overline{A} = f^{-1}(fr(V_0))$, то $x_0 \in f^{-1}(fr(V_0))$, а значить,

$$y_0 \in fr(V_0) = \overline{V_0} \setminus V_0,$$

зокрема, $y_0 \notin V_0$, що приводить до суперечності. □

Наступний приклад показує, що перехідна функція не зобов'язана бути локально w^*-неперервною.

Приклад 3. *Розіб'ємо проміжок $A = (-\infty, -1]$ на $\aleph_0$ неперетинних щільних в A множин A_r, де $r \in \mathbb{Q}$, а проміжок $B = [1, +\infty)$ – на континуум щільних у B множин B_ξ, де $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, і визначимо функцію*

$$f(x) = \begin{cases} r, & \text{якщо } x \in A_r, \\ \xi, & \text{якщо } x \in B_\xi, \\ 0, & \text{якщо } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Функція f буде перехідною в довільній точці $x \in \mathbb{R}$. Це очевидно для точок з інтервалу $(-1, 1)$, на якому вона є сталою. Якщо $x \geq 1$ і $\varepsilon > 0$, то, взявши в інтервалах $(f(x), f(x)+\varepsilon)$ і $(f(x)-\varepsilon, f(x))$ раціональні числа y_1 і y_2, ми одержимо, що для околу $U = (0, +\infty)$ точки x при $i = 1, 2$

$$(U \times \{y_i\}) \cap Gr(f) = \varnothing.$$

Коли ж $x \leq -1$, то для ірраціональних чисел y_1 і y_2 відповідно з інтервалів $(f(x), f(x) + \varepsilon)$ і $(f(x) - \varepsilon, f(x))$ та околу $U = (-\infty, 0)$ будемо мати, що переходи $U \times \{y_i\}$ при $i = 1, 2$ не перетинаються з графіком функції f.

Припустимо, що E — це непорожня підмножина $\mathbb{R}$, яка не містить множини $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ всіх ірраціональних чисел, і доведемо, що її прообраз $f^{-1}(E)$ не замкнена множина.

Нехай $E \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$. Тоді існують ірраціональні числа β_1 і β_2 такі, що $\beta_1 \in E$ і $\beta_2 \notin E$. Тоді $f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(\beta_1)$, отже, $f^{-1}(E)$ — щільна множина в проміжку B. Разом з тим $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(\beta_2)$, отже, і доповнення до $f^{-1}(E)$ є щільною множиною в B. Звідки негайно випливає, що множина $f^{-1}(E)$ не замкнена.

Припустимо, що $E \subseteq \mathbb{Q}$. Якщо $0 \in E$, то $f^{-1}(E) \supseteq (-1,1)$ і $f^{-1}(E) \cap B = \varnothing$. Тоді $1 \in \overline{f^{-1}(E)} \setminus f^{-1}(E)$, отже, $f^{-1}(E)$ не замкнена множина. Якщо ж $0 \notin E$, то множина $f^{-1}(E)$ і її доповнення $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(E)$ будуть всюди щільними в проміжку A, бо $f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(\alpha_1)$ для деякого раціонального числа α_1 і $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(0)$. Це показує, що і тут $f^{-1}(E)$ не замкнена множина.

Нехай $\mathcal{B}$ — довільна база топології числової прямої $\mathbb{R}$. Зрозуміло, що існує такий непорожній елемент $B \in \mathcal{B}$, що $B \subseteq (-1,1)$. Ясно, що $fr(B) \subseteq [-1,1]$ і $fr(B) \neq \varnothing$, адже скінченна точка $\beta = \sup B$ є межевою для B. Тоді $f^{-1}(fr(B))$ за доведеним не буде замкненою множиною в $\mathbb{R}$. Це означає, що функція f не є локально w^*-неперервною.

11. Теорема про декомпозицію сукупної неперервності. У згаданих у вступі працях [10, 22] були доведені результати про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій із замкненим графіком. Наступна теорема є модифікацією цих результатів з використанням перехідності.

Теорема 18. *Нехай X і Y — локально зв'язні простори, Z — топологічний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ має слабку властивість Дарбу відносно кожної змінної і є перехідним за сукупністю змінних. Тоді відображення f неперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $p = (x, y) \in X \times Y$ і окіл W точки $f(p)$ у просторі Z. Оскільки відображення f перехідне в точці p, то існують окіл U точки x в X, окіл V точки y в Y і відкритий окіл W_1 точки $f(p)$ в Z такі, що $W_1 \subseteq W$ і $f(U \times V) \subseteq W_1 \sqcup (Z \setminus \overline{W_1})$. Розглянемо відкриті зв'язні околи U_0 і V_0 точок x і y відповідно такі, що $U_0 \times V_0 \subseteq U \times V$. Зрозуміло, що $f(U_0 \times V_0) \subseteq W_1 \sqcup (Z \setminus \overline{W_1})$. Покажемо, що $f(U_0 \times V_0) \subseteq W_1$. Припустимо, що існує точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U_0 \times V_0$, така, що $f(p_1) \in Z \setminus \overline{W_1}$. Оскільки відображення f^{x_0} і f_{y_1} мають слабку властивість Дарбу, то множини $f^{x_0}(V_0)$ і $f_{y_1}(U_0)$ зв'язні. Але $f(x_0, y_1) \in f^{x_0}(V_0) \cap f_{y_1}(U_0) \neq \varnothing$, тому множина $C = f^{x_0}(V_0) \cup f_{y_1}(U_0)$ є зв'язною. Однак

$$C \subseteq f(U_0 \times V_0) \subseteq W_1 \sqcup (Z \setminus \overline{W_1})$$

і $f^{x_0}(V_0) \cap W_1 \neq \varnothing$ та $f_{y_1}(U_0) \cap (Z \setminus \overline{W_1}) \neq \varnothing$, що суперечить зв'язності множини C. $\square$

[1] *Банах С.С.* Курс функціонального аналізу. — К.: Рад. школа, 1948. — 216 с.

[2] *Köthe G.* Topological vector spaces II. — New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1979. — XII+331 p.

[3] *Dugundji J.* Topology. — Boston: Allyn and Bacon, 1996. — 447 p.

[4] *Alas O.T.* A note on functions with a closed graph // Port. Math. — 1983. — **42**. — P. 351–354.

[5] *Piotrowski Z., Szymanski A.* Closed graph theorem: Topological approach // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. — 1988. — **37**, №1. — P. 88–99.

[6] *Burgess C.E.* Continuous functions and connected graphs // Amer. Math. Monthly. — 1990. — **97.** — P. 337–339.

[7] *Baggs I.* Functions with a closed graph // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974. — **43**. — P. 439–442.

[8] *Doboš J.* On the set of points of discontinuity for functions with closed graphs // Čas. Pěst. Mat. — 1985. — **110**. — P. 60–68.

[9] *Doboš J.* Functions with a closed graph and bilateral quasicontinuity // Tatra Mt. Math. Publ. — 1993. — **2**. — P. 77–80.

[10] *Wójcik M.R., Wójcik M.S.* Separately continuous functions with closed graphs // Real. Anal. Exch. — 2005. — **30**, №1. — P. 23–28.

[11] *Jelinek J.* A discontinuous function with a connected closed graph // Acta Univ. Carol., Math. Phys. — 2003. — **44**, №2. — P. 73–77.

[12] *Baggs I.* Properties of functions with a closed graph // Topol. Appl., Proc. Conf. St. John's 1973. — 1975. — P. 125–131.

[13] *Piotrowski Z., Vallin R.W.* Conditions which imply continuity // Real Anal. Exch. — 2003. — **29**, №1. — P. 211–218.

[14] *Mimna R.A* A note on separate continuity and connectivity properties // Math. Bohem. — 1997. — **122**, №1. — P. 57–61.

[15] *Wojcik M.R.* Closed and connected graphs of functions; examples of connected punctiform spaces. — Rozprawa doktorska, Katowice. — 2008. — 40 p.

[16] *Mimna R.A., Rose D. A.* A note on closed graph functions and local w*-continuity // Real Anal. Exch. — 1993. — **18**, №2. — P. 549–552.

[17] *Long P.E., McGehee E.E.* Properties of almost continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — **24**. — P. 175–180.

[18] *Berner A.J.* Almost continuous functions with closed graphs // Can. Math. Bull. — 1982. — **25**. — P. 428–434.

[19] *Lin S.-Y.T., Lin Y.-F.* On almost continuous mappings and Baire spaces // Can. Math. Bull. — 1978. — **21**. — P. 183–186.

[20] *Rose D.* On Levine's decomposition of continuity // Can. Math. Bull. — 1978. — **21**. — P. 477–481.

[21] *Bandyopadhyay N., Bhattacharyya P.* Functions with preclosed graphs // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2005. — **28**, №1. — P. 87–93.

[22] *Piotrowski Z., Wingler E.* A note on the continuity points of functions // Real. Anal. Exch. — 1991. — **16**. — P. 408–414.

[23] *Крецу В.І., Маслюченко В.К.* Неперервність за Стеллінгзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Математика. — 2007. — **349**. — С. 50–54.

[24] *Stallings J.* Fixed point theorem for connectivity maps // Fund. Math. — 1959. — **47.** — P. 249–263.

[25] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Про декомпозицію неперервності, яка пов'язана з перехідними функціями // Сучасні проблеми аналізу: Тези допов. конф. (Чернівці, 30 вересня — 3 жовтня 20010) – Чернівці, 2010. – С. 106–108.

[26] *Smith B.D.* An alternative characterization of continuity // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — **39**. — P. 318–320.

[27] *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

[28] *Gibson R.G., Natkaniec T.* Darboux like functions // Real Anal. Exch. — 1996. — **22**, №2. — P. 492–533.

DECOMPOSITION OF CONTINUITY AND TRANSITION MAPS

Volodymyr Maslyuchenko, Vasyl' Nesterenko

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

e-mail: *math.analysis.chnu@gmail.com*

We introduce a notion of a transition map of topological spaces and study properties of such maps. It is proved that if X is a locally connected space and Y is a topological space and a map $f : X \to Y$ has the weak Darboux property and is transition then f is continuous.