РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

©2011 р. Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Ряшівський університет,
вул. Рейтана 16А, Ряшів 35-310, Польща

e-mail: *alopushanskyj@gmail.com*

Редакція отримала статтю 7 вересня 2011 р.

Знайдено нові достатні умови підвищеної регулярності розв'язків абстрактної задачі Коші для півлінійного параболічного рівняння.

1 Вступ

Серед достатніх умов на праву частину параболічного рівняння, що забезпечують розв'язність абстрактної задачі Коші, відзначимо результат Да Прато і Грісварда [1], згідно з яким припускається, що права частина має значення в проміжних просторах інтерполяційних неперервних шкал. У [2] цей результат поширено на випадок комплексних інтерполяційних шкал та досліджено регулярність відповідного розв'язку задачі. У даній статті результат [2] поширено на випадок півлінійного параболічного рівняння.

УДК: 517.988.63; MSC 2000: 47D03, 47H30
Ключові слова і фрази: півлінійні параболічні рівняння, регулярність розв'язків абстрактної задачі Коші

2 Попередні відомості

Через $l_\omega = \{re^{i\omega} \colon r > 0\}$ будемо позначати промінь із заданим кутом $\omega \in [0, 2\pi]$. Зафіксуємо кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і співставимо йому в площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання, відповідно $\Lambda_0 = \bigcup \{l_\omega \colon \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\}$ та $\Lambda = \Lambda_0 \bigcup \{0\}$.

Нехай задано пару банахових просторів $(V_0, \|\cdot\|_{V_0})$ та $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ над $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10} \colon V_1 \hookrightarrow V_0$. Через $\mathcal{A}$ позначаємо клас лінійних операторів $A \colon V_1 \longrightarrow V_0$, резольвента яких $(\lambda E_{10} - A)^{-1}$ є визначеною та рівномірно обмеженою відносно всіх чисел $\lambda \in \Lambda$ за нормою простору $\mathscr{L}(V_0; V_1)$ всіх неперервних операторів із V_0 в V_1, тобто

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathscr{L}(V_1; V_0) \colon \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\| (\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(V_0; V_1)} = K(A) < \infty \right\},$$

де стала $K(A)$ залежить тільки від A. Через $\varrho(A) = \{\lambda \colon (\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \mathscr{L}(V_0; V_1)\}$ і $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \varrho(A)$ позначаємо резольвентну множину і спектр оператора A. Резольвентою оператора A (див. книгу [3], позначення якої будуть далі використовуватися) називаємо операторнозначну функцію $\varrho(A) \ni \lambda \longmapsto (\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \mathscr{L}(V_0; V_1)$. Далі позначаємо $R(\lambda, A) = E_{10} \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathscr{L}(V_0)$, де $\lambda \in \varrho(A)$.

Оператори класу $\mathcal{A}$ прийнято називати секторіальними операторами від'ємного типу $r(A) = \sup \{\Re(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ над простором V_0. Відзначимо, що для довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ існує обернений $A^{-1} \in \mathscr{L}(V_0; V_1)$. В наших позначеннях під обмеженим оберненим оператора A розуміємо оператор $E_{10} A^{-1} \in \mathscr{L}(V_0)$. Кожен з операторів $A \in \mathcal{A}$ можна трактувати як необмежений лінійний оператор над банаховим простором V_0 із щільною областю визначення $V_1 = \mathscr{D}(A)$. Оператори класу $\mathcal{A}$ мають непорожну резольвентну множину, тому є замкненими над V_0 [4], а функція $R(\lambda, A)$ є аналітичною на $\varrho(A)$. Кожен з операторів A класу $\mathcal{A}$ генерує аналітичну півгрупу в просторі V_0 і має від'ємний тип $r(A)$ [5].

Зафіксуємо оператор $J \in \mathcal{A}$. В [2] відзначено, що оператор $(-J)$ є позитивний в сенсі означення $\big($[6], 1.14.1$\big)$. Визначимо від'ємні дробові степені оператора $(-J)$ ([6, 7]) за формулою

$$(-J)^{-\vartheta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}}\, d\lambda \in \mathscr{L}(V_j), \quad 0 < \vartheta < 1, \quad j = 0, 1,$$

де контур $\Gamma_{a,\omega} = \big\{re^{i\omega} \colon r \geq a\big\} \bigcup \big\{ae^{i\tau} \colon \tau \in [\omega, 2\pi - \omega]\big\} \bigcup \big\{re^{-i\omega} \colon r \geq a\big\}$ обходить спектр $\sigma(A)$ в додатному напрямі. Інтеграл не залежить від вибору числа $a \colon 0 < a < r(A)$ та кута $\omega \colon \omega_0 - c \leq \omega \leq \omega_0$ при c такому, що $c + \pi/2 < \omega_0 < c + \pi$ [5]. Отже, родина операторів $(-J)^{-\vartheta}$ володіє півгруповою властивістю $(-J)^{-\vartheta}(-J)^{-\vartheta'} = (-J)^{-\vartheta-\vartheta'}$, $(\forall\, \vartheta, \vartheta' > 0)$ [7].

Через $V_\vartheta := \mathscr{D}\left[(-J)^{\vartheta}\right]$ позначимо область визначення оберненого до $(-J)^{-\vartheta}$ оператора $(-J)^{\vartheta}$ із нормою графіка $\|x\|_{V_\vartheta} := \left\|(-J)^{\vartheta} x\right\|_0$. Тоді $V_\vartheta \simeq [V_0, V_1]_\vartheta$ — проміжний простір для інтерполяційної пари $\{V_0; V_1\}$, породжений методом комплексної інтерполяції ([6], теорема 1.15.3). Розглянемо тепер простір $V_2 := \{x \in V_1 \colon Jx \in V_1\}$ із нормою графіка $\|x\|_{V_2} := \|(-J)x\|_{V_1}$. У [2] показано, що звуження $J\;|_{V_2} \colon V_2 \longmapsto V_1$ залишається секторіальним оператором від'ємного типу з кутом $\omega_0 \colon \pi/2 < \omega_0 < \pi$ (таким самим, як в оператора J) над парою $\{V_1; V_2\}$. Отже, інтерполяційна шкала просторів V_ϑ породжена операторами $(-J)^{\vartheta}$ має властивість $[V_1, V_2]_\vartheta \simeq V_{1+\vartheta}$, де останній простір також наділений нормою графіка $\|x\|_{V_{1+\vartheta}} := \left\|(-J)^{\vartheta} x\right\|_{V_1}$, $(0 < \vartheta < 1)$ і рівність справджується з точністю до ізоморфізму. При $0 \leq \vartheta' < \vartheta \leq 2$ справедливі неперервні вкладення $V_\vartheta \hookrightarrow V_{\vartheta'}$. Згідно з ([3], с. 170-171), півгрупа $0 < t \longmapsto e^{tJ}$ відображає простір V_ϑ в простір $V_{1+\vartheta}$ та рівномірно обмежена і сильно неперервна над V_ϑ, до того ж

$$e^{tJ} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda}\, R(\lambda, J)\, d\lambda \in \mathscr{L}(V_\vartheta) \bigcap \mathscr{L}(V_{1+\vartheta}).$$

Нехай тепер A — довільний оператор класу $\mathcal{A}$. Зауважимо (див. [2]), що оскільки виконується наступний ізоморфізм банахових просторів $\mathscr{D}\left[(-A)^{\vartheta}\right] \simeq V_\vartheta$, де $\mathscr{D}\left[(-A)^{\vartheta}\right]$ — область визначення $(-A)^{\vartheta}$, то в наведених міркуваннях можна замінити фіксований оператор J на довільний оператор $A \in \mathcal{A}$.

3 Формулювання проблеми та допоміжні твердження

Нехай $0 < \eta < \vartheta \leq 1$, $A, J \in \mathcal{A}$. У просторі

$$W_\eta := C\big([0,T];\, V_\eta\big), \qquad \|z\|_{W_\eta} = \max_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{V_\eta}$$

неперервних вектор-функцій $v\colon [0,T] \ni t \longmapsto v(t) \in V_\eta$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + g_0\big(t, v(t)\big), \qquad v_0(0) = g \in V_\eta, \qquad t \in (0,T], \tag{1}$$

розв'язок якої задовольняє рівняння на $(0,T]$ та початкову умову за нормою V_η, і щодо якого виконується наступна умова.

Припущення 1°: Нехай відображення

$$g_0\colon [0,T] \times V_\eta \ni (t,z) \longmapsto g_0(t,z) \in V_\vartheta$$

належить простору неперервних V_ϑ-значних вектор-функцій $C\big([0,T] \times V_\eta; V_\vartheta\big)$.

Відзначимо, що $V_\vartheta \hookrightarrow V_\eta$. У просторах неперервних вектор-функцій $C(\cdot)$, як звичайно, задаємо рівномірну норму. Розглянемо далі простір вектор-функцій

$$W_{1,\eta} := C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big) \bigcap C^1\big([0,T]; V_\eta\big),$$

неперервних на $[0,T]$ із значеннями в $V_{1+\eta}$, які також є сильно неперервно диференційованими зі значеннями похідної v'_t в просторі V_η.

Лема 3.1. *Нехай виконується припущення* 1° *і*

$$(Hv)(t) := I\big(t, v(t)\big) + e^{tA}g, \qquad I\big(t, v(t)\big) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} g_0\big(\tau, v(\tau)\big)\, d\tau, \tag{2}$$

де $t \in [0,T]$, $v \in W_\eta$. *Тоді:*

(i) *інтегральний оператор H належить простору обмежених операторів із W_η в $W_{1,\eta}$ та існує така стала $K > 0$, що виконується нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t)\big\|_{1+\eta} \leq K \left[T \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0\big(t, v(t)\big)\big\|_\vartheta + \|g\|_\eta\right]; \tag{3}$$

(ii) *розв'язок* $v \in W_\eta$ *інтегрального рівняння*

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} g_0\big(\tau, v(\tau)\big)\, d\tau + e^{tA} g \tag{4}$$

є розв'язком класу $W_{1,\eta}$ *задачі* (1).

Зауважимо ([8], с. 209), що стала K в оцінці (3) пропорційна такій сталій B, що

$$\big\| R(\lambda, J) \big\|_{\mathscr{L}(V_\vartheta; V_{1+\vartheta})} \le \frac{B}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}}, \qquad \forall \lambda \in \Lambda_0. \tag{5}$$

Доведення. За властивостями півгрупи $0 \le t \longmapsto e^{tA}$ [5, 7], маємо $e^{tA} g \in V_{1+\eta} \subset V_\eta$ при $g \in V_\eta$, отже, значення функції $e^{tA} g$ належать $W_{1+\eta}$. Оскільки оператор A генерує півгрупу ([3], с. 139), то значення її похідної $(e^{tA} g)'_t = A e^{tA} g$ належать W_η. Припустимо спочатку, що виконується сильніша умова щодо функції $f(t) := g_0\big(t, v(t)\big)$, а саме, нехай $f \in C\big([0,T]; V_1\big)$. Тоді

$$\int_\tau^t A e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma = \int_\tau^t \frac{d}{d\varsigma} e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma = e^{(t-\tau)A} f(\tau) - f(\tau),$$

звідки при $v \in W_\eta$ отримуємо

$$\begin{aligned} I\big(t, v(t)\big) &= \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_\tau^t A e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma\, d\tau = \\ &= \int_0^t \left[f(\tau) + A \int_\tau^t e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma \right] d\tau = \int_0^t \Big[g_0\big(\tau, v(\tau)\big) + A I\big(\tau, v(\tau)\big) \Big] d\tau. \end{aligned}$$

Тому функція $[0,T] \ni t \longmapsto I\big(t, v(t)\big)$ належить простору $C^1\big([0,T]; V_\eta\big)$ і $I'_t\big(t, v(t)\big) = g_0\big(t, v(t)\big) + A I\big(t, v(t)\big)$. Якщо функція v є розв'язком інтегрального рівняння (4), а, отже, $v(t) \equiv (Hv)(t) \equiv I\big(t, v(t)\big) + e^{tA} g$, то матимемо $v \in W_{1,\eta}$ та

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t) &= \frac{d}{dt} I\big(t, v(t)\big) + A e^{tA} g = g_0\big(t, v(t)\big) + A I\big(t, v(t)\big) + A e^{tA} g = \\ &= g_0\big(t, v(t)\big) + A(Hv)(t) = g_0\big(t, v(t)\big) + A v(t), \\ v(0) &= (Hv)(0) = g. \end{aligned}$$

Отже, функція v є розв'язком задачі (1). В умовах леми $f(t) = g_0\big(t, v(t)\big) \in V_\vartheta$ при $v(t) \in V_\eta$ для всіх $t \in [0,T]$. Візьмемо $f_\varepsilon(t) := e^{\varepsilon A} f(t)$, $(\varepsilon > 0)$. Для кожного ε задовольняється рівняння та початкова умова задачі (1), а тому для завершення доведення достатньо повторити міркування з [2] про існування границі при $\varepsilon \to 0$. $\square$

4 Теорема існування

Нехай $W_{\eta,C} = \big\{z \in W_\eta \colon \|z\|_{W_\eta} \le C\big\}$ – замкнена куля в W_η, $V_{\eta,C} = \big\{z \in V_\eta \colon \|z\|_{V_\eta} \le C\big\}$ – замкнена куля в V_η, $C_1 = \|g\|_{V_\eta}$.

Припущення 2°: Нехай існують додатні сталі K_1, K_2, q, C такі, що

$$\|g_0(t,z)\|_{V_\vartheta} \le K_1 \|z\|^q_{V_\eta}, \quad t \in [0,T], \ \forall z \in V_{\eta,C},$$
$$\|g_0(t,z_1) - g_0(t,z_2)\|_{V_\vartheta} \le K_2 \|z_1 - z_2\|^q_{V_\eta}, \quad t \in [0,T], \forall z_1, z_2 \in V_{\eta,C}.$$

Теорема 4.1. *За припущень* 1°, 2° $\big($*та при певних додаткових обмеженнях щодо* $K_1 T C_1^{q-1}$ *у випадку* $q \ge 1\big)$ *існує розв'язок* v *задачі* (1) *класу* $W_{1,\eta}$.

Зауважимо, що згадані вище додаткові обмеження щодо сталих мають вигляд:

$$C' K T K_1 < 1 \ \text{ для } \ q = 1, \tag{6}$$
$$(C'K)^q T K_1 C_1^{q-1} \le \left(\frac{r}{q}\right)^q (q-1)^{q-1}, \quad r < \min\left\{1, \frac{K_1}{K_2 a^*(q)}\right\} \tag{7}$$

для $q > 1$, де стала C' є нормою неперервного вкладення $V_{1+\eta} \hookrightarrow V_\eta$, $a^*(q) = 2^{2-q}$ при $q \in (1,2)$, $a^*(q) = 1$ при $q \ge 2$.

Доведення. Враховуючи лему 1, достатньо довести розв'язність інтегрального рівняння (4) у банаховому просторі W_η. За лемою 1 інтегральний оператор $H \colon W_\eta \ni v \longmapsto Hv$ діє в простір $W_{1,\eta} \subset W_\eta$. Для доведення існування його нерухомої точки застосуємо принцип стискуючих відображень при $q \ge 1$ та принцип Шаудера у випадку $q \in (0,1)$.

З оцінки (3) для довільної $v \in W_{\eta,C}$ одержуємо

$$\begin{aligned}\|Hv\|_{W_\eta} &= \max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t)\big\|_{V_\eta} \le C' \max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t)\big\|_{V_{1+\eta}} \le \\ &\le C'K \left[T \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0\big(t, v(t)\big)\big\|_{V_\vartheta} + C_1\right] \le \\ &\le C'K \left(TK_1 \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|^q_{V_\eta} + C_1\right) \le C'K\big(TK_1C^q + C_1\big).\end{aligned}$$

Перепишемо отриману нерівність у наступному вигляді

$$\|Hv\|_{W_\eta} \le b_1C^q + b_2, \quad \text{де} \quad b_1 = C'KTK_1, \quad b_2 = C'KC_1. \tag{8}$$

Якщо $q = 1$, то за властивостями функції $h_1(C) = b_1C + b_2$ змінної C для довільних додатних сталих b_2 та $b_1 < 1$ існує таке додатне число C таке, що $b_1C + b_2 < C$. Звідси матимемо

$$\|Hv\|_{W_\eta} < C, \qquad \forall v \in W_{\eta,C}, \tag{9}$$

а отже, $H\colon W_{\eta,C} \longmapsto W_{\eta,C}$.

Якщо ж $q \in (0, 1)$, то за властивостями функції $h(C) = b_1C^q + b_2$, для довільних додатних сталих b_1, b_2 існує така додатна стала C_0, що при всіх $C > C_0$ виконується $b_1C^q + b_2 < C$, а тому і (9). Отже, з нерівності

$$b_1C^q + b_2 < rC, \qquad r \in (0, 1] \tag{10}$$

випливає існування сталих $C > 0$, при яких також виконується (9).

Для виконання (10) при $q > 1$ достатньо ([9], с. 320) існування $\min\limits_{C\ge0} h_2(C) \le -b_2$ функції $h_2(C) = b_1C^q - rC$. Число $C_0 = \sqrt[q-1]{\frac{r}{b_1q}}$ є точкою її мінімуму. Знаходимо

$$h_2(C_0) = C_0\left(b_1C_0^{q-1} - r\right) = C_0\left(b_1\frac{r}{b_1q} - r\right) = -C_0r\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Звідси отримуємо співвідношення

$$-C_0r\left(1 - \frac{1}{q}\right) \le -b_2 \Longleftrightarrow C_0 \ge \frac{b_2q}{r(q-1)} \Longleftrightarrow b_1b_2^{q-1} \le \left(\frac{r}{q}\right)^q (q-1)^{q-1}.$$

Отже, за умови (7) при $q > 1$ існує стала $C > 0$ така, що виконується (9). Тому й у цьому випадку отримуємо, що $H\colon W_{\eta,C} \longmapsto W_{\eta,C}$.

Аналогічно, враховуючи оцінку (3) та припущення 2°, для довільних $v_1, v_2 \in W_{\eta,C}$ одержуємо

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv_1)(t) - (Hv_2)(t)\big\|_{V_\eta} \le C' \max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv_1)(t) - (Hv_2)(t)\big\|_{V_{1+\eta}} \le$$
$$\le C'KT \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0\big(t, v_1(t)\big) - g_0\big(t, v_2(t)\big)\big\|_{V_\vartheta} \le$$
$$\le C'KTK_2 \max_{t\in[0,T]} \|v_1(t) - v_2(t)\|^q_{V_\eta},$$

а отже, неперервність оператора H в кулі $W_{\eta,C}$.

При $q > 1$ для довільних $v_1, v_2 \in W_{\eta,C}$ матимемо

$$\|v_1 - v_2\|^q_{W_\eta} \le a^*(q) q \max\left\{\|v_1\|^{q-1}_{W_\eta}, \|v_2\|^{q-1}_{W_\eta}\right\} \cdot \|v_1 - v_2\|_{W_\eta} \le$$
$$\le a^*(q) q C^{q-1} \|v_1 - v_2\|_{W_\eta},$$

а тоді

$$\|Hv_1 - Hv_2\|_{W_\eta} \le a' \|v_1 - v_2\|_{W_\eta}, \quad \text{де} \quad a' = a'(C) = C'KTK_2 a^*(q) q C^{q-1}.$$

Оскільки
$$a'(C_0) = C'KTK_2 a^*(q) q \cdot \frac{r}{b_1 q} = r a^*(q) \frac{K_2}{K_1},$$
то вибором числа r (див. (7)) досягаємо нерівності $a'(C_0) < 1$.

Отже, у випадку $q > 1$ (та при $q = 1$ за умови (6)) існує таке $C > 0$, що оператор H стискуючий на $W_{\eta,C}$ і за принципом стискуючих відображень інтегральне рівняння (4) має розв'язок у W_η. Більше того, такий розв'язок єдиний у $W_{\eta,C}$.

У випадку $q \in (0,1)$ доведемо компактність оператора H на $W_{\eta,C}$. Вище доведена рівномірна обмеженість $\|Hv\|_{W_\eta}$ на $W_{\eta,C}$. Покажемо одностайну неперервність множини $W_{\eta,C}$ в W_η. Для довільних $v \in W_{\eta,C}$, $s \in \mathbb{R}$ маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\big\|_{V_\eta} = \max_{t\in[0,T]} \left\|\int_t^{t+s} e^{(t-\tau)A} g_0\big(\tau, v(\tau)\big) d\tau\right\|_{V_\eta} \le$$
$$\le K_3 |s| \max_{t\in[0,T]} \big\|g_0\big(t, v(t)\big)\big\|_{V_\vartheta},$$

де K_3 – певна додатна стала. Остання нерівність прямо випливає з результатів [2, 5]. Враховуючи припущення 2°, матимемо

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\big\|_{V_\eta} \le K_3 |s| \big[TK_1 C^q + C_1\big].$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $s_1 = s_1(\varepsilon) > 0$ $\big($а саме, $s_1 = \frac{\varepsilon}{K_3[TK_1C^q+C_1]}\big)$, що при всіх $v \in W_{\eta,C}$, $|s| < s_1$,

$$\max_{t\in[0,T]} \big\|(Hv)(t+s) - (Hv)(t)\big\|_{V_\eta} < \varepsilon.$$

Отже, за лемою Арцела оператор H компактний на $W_{\eta,C}$. Тому за принципом Шаудера при $q \in (0,1)$ одержуємо існування розв'язку $v \in W_\eta$ інтегрального рівняння (4), а враховуючи лему 1, і задачі (1). □

Зауваження 4.1. *Застосовуючи метод послідовних наближень, за припущення* 1° *та припущення*

$$\|g_0(t,z_1) - g_0(t,z_2)\|_{V_\vartheta} \leq K_2||z_1 - z_2||_{V_\eta}, \quad t \in [0,T], \quad z_1, z_2 \in V_\eta$$

замість припущення 2°*, можемо довести однозначну розв'язність інтегрального рівняння* (4) *та задачі* (1).

Зауваження 4.2. *Із припущення* 1° *щодо задачі Коші* (1)*, заданої у вихідному просторі* W_η*, випливає, що її розв'язок автоматично належить неперервно вкладеному підпростору гладких вектор-функцій* $W_{1,\eta} \looparrowright W_\eta$*. Отже, результат теореми можна трактувати як властивість автоматичної підвищеної регулярності розв'язків.*

Частковий випадок задачі (1) одержимо, коли A є регулярним еліптичним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, і який задовольняє умови параболічності Агмона. У цьому випадку відповідна задача Коші (1) буде крайовою задачею для півлінійного диференціального параболічного рівняння.

[1] *Da Prato G., Grisvard P.* Equations d'evolution abstractes non lineaire de type parabolique // Ann. Mat. Pure Appl. — 1979. — **120**, №4. — P. 329–396.

[2] *Лопушанский А.О.* Абстрактная параболическая задача Коши в комплекмных интерполяционных шкалах // Дифференц. уравнения. — 2010. — **46**, №12. — С. 1799–1803.

[3] *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992. — 351 с.

[4] *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т.2. — М.: Мир, 1966. — 1064 с.

[5] *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і аналітичні півгрупи // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2006. — **49**, №2. — С. 65–73.

[6] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[7] *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і комплекмні интерполяційні шкали // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2006. — **49**, №4. — С. 19–27.

[8] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[9] *Крейн С.Г.* Функциональный анализ (под общей редакцией С.Г. Крейна). Сер. "СМБ". — М.: Наука, 1972. — 544 с.

THE REGULARITY OF ABSTRACT CAUCHY PROBLEM SOLUTIONS FOR SEMI-LINEAR PARABOLIC EQUATION

Andriy LOPUSHANSKY

Rzeszów University,
16A Rejtana Str., Rzeszów 35-310, Poland

e-mail: *alopushanskyj@gmail.com*

New sufficient conditions of the over-regularity of the Cauchy problem solutions for semi-linear abstract parabolic equation are obtained.