АЛГЕБРИ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ: ТВІРНІ ЕЛЕМЕНТИ ТА ОПЕРАТОР ЗСУВУ

Вікторія КРАВЦІВ

[1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *maksymivvika@gmail.com*

Редакція отримала статтю 10 серпня 2011 р.

У роботі описано генератори алгебри блочно-симетричних поліномів $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ і спектр алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. Введено оператор симетричного зсуву і доведено аналог формули Мартіна для алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$.

Вступ

Симетричні поліноми від багатьох комплексних змінних є класичним об'єктом алгебри, теорії інваріантів і аналізу. Вивчення симетричних поліномів на нескінченновимірних банахових просторах відносно дії повної групи симетрії $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ почалося у роботі А.С. Немировського та С.М. Семенова [1]. Вони показали, що симетричні поліноми на просторах ℓ_p виражаються через алгебраїчну комбінацію елементарних симетричних поліномів. Ці результати було узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою у роботі [2] М. Гонзалеса, Р. Гонзала і Х. Харамілла. Алгебри симетричних аналітичних функцій на комплексних просторах ℓ_p досліджувалися в [3] і в інших роботах (див., напр., [4]).

УДК: 517.98; MSC 2000: 46-02, 46E30, 46J20

Ключові слова і фрази: блочно-симетричні поліноми, твірні елементи, характери, оператор зсуву, формула Мартіна

При дослідженні конкретної комутативної алгебри дуже важливо вміти описати її спектр (множину максимальних ідеалів). Для опису спектру алгебр симетричних аналітичних функцій в [3, 4] використовується існування та явний вигляд алгебраїчного базису у відповідних просторах симетричних поліномів. Зокрема, у цих роботах запропоновано операцію симетричного зсуву, за допомогою якої виводяться важливі властивості симетричних поліномів. У даній роботі ми досліджуємо поліноми на скінченних або нескінченних декартових добутках банахового простору (точніше, відповідно на скінченних або нескінченних ℓ_1-сумах копій банахового простору) із симетричним базисом, які є інваріантними відносно дії деякої природної підгрупи $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ (ми будемо їх називати блочно-симетричними). Зокрема, перший розділ присвячено дослідженню алгебраїчних залежностей між твірними елементами алгебри блочно-симетричних поліномів на скінченній ℓ_1-сумі копій комплексного простору $\mathbb{C}^2$ та спектру цієї алгебри, а також опису множини твірних елементів алгебри блочно-симетричних поліномів на нескінченній ℓ_1-сумі копій комплексного простору $\mathbb{C}^s$, де $2 \leq s < \infty$. У другому розділі вводиться оператор симетричного зсуву на алгебрі блочно-симетричних поліномів на скінченній ℓ_1-сумі копій комплексного простору $\mathbb{C}^2$ і показується, що він є неперервним гомоморфізмом цієї алгебри в себе. За допомогою введеного оператора зсуву у третьому розділі виводиться аналог формули Мартіна для блочно-симетричних поліномів на скінченній ℓ_1-сумі копій комплексного простору $\mathbb{C}^2$, яка дозволяє обчислити однорідну компоненту P_k, $k = 1, \ldots, n$ довільного неоднорідного полінома P степеня n.

1 Твірні елементи алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$

Нехай
$$\mathcal{X} = \left(\sum X\right)_{\ell_1} = \oplus_{\ell_1} X,$$
тобто $\mathcal{X}$ є скінченною $\oplus_{\ell_1}^m X$ або нескінченною $\oplus_{\ell_1} X$ ℓ_1-сумою копій банахового простору X. Тоді кожен елемент $\overline{x} \in \mathcal{X}$ можна подати у вигляді послідовності $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $x_n \in X$, з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Зокрема, ми будемо розглядати простори

$$\mathcal{X}_\infty^s = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^s \quad \text{та} \quad \mathcal{X}_m^s = \oplus_{\ell_1}^m \mathbb{C}^s,$$

де $2 \le s < \infty$. Скажемо, що поліном P на просторі $\mathcal{X}_m^s$ називається *блочно-симетричним (або векторно-симетричним)*, якщо:

$$P\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix}_1, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}_m\right) = P\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix}_{\sigma(1)}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}_{\sigma(m)}\right),$$

де $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \vdots \\ w_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^s$ і σ – довільна підстановка на множині $\{1, 2, \dots, m\}$. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}$.

Послідовність $(S_i)_{i=1}^\infty \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ поліномів називається *алгебраїчно незалежною*, якщо з того, що $q(S_1(\overline{x}), \dots, S_n(\overline{x})) \equiv 0$ для деяких $n \in \mathbb{N}$ і $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, випливає що:

$$q(z_1, \dots, z_n) \equiv 0,$$

де $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ — алгебра поліномів на $\mathbb{C}^n$. В іншому випадку ця послідовність називається *алгебраїчно залежною.* Множина поліномів є *системою твірних елементів (або множиною твірних елементів)* для алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$, якщо кожен поліном з цієї алгебри можна подати як скінченну алгебраїчну комбінацію елементів з даної множини, тобто для кожного $P \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ існує поліном $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ такий, що $P(\overline{x}) = q(S_1(\overline{x}), \dots, S_n(\overline{x}))$ для деякого n. Послідовність поліномів $(S_i)_{i=1}^\infty$ називається *алгебраїчним базисом* $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$, якщо вона є системою твірних для $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ і алгебраїчно незалежною. Зауважимо, що алгебраїчний базис не завжди існує. Позначимо через $\tau_{vs}(\mathcal{X})$ — систему твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$.

Блочно-симетричні поліноми з $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^s)$ є інваріантними відносно дії групи підстановок S_m на множині $\{1, \dots, m\}$ на просторі $\mathcal{X}_m^s \simeq \mathbb{C}^{sm}$.

Оскільки, S_m — скінченна група, то за теоремою Гільберта-Нагати [5, ст. 68-69] існує скінченна кількість твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^s)$, які є, взагалі кажучи, алгебраїчно залежними.

Спочатку розглянемо алгебру блочно-симетричних поліномів $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ на просторі $\mathcal{X}_m^2$.

Відомо (див., напр., [6, ст. 59]), що поліноми вигляду:

$$R_n^{p,q}(x,y) = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p\\ j_1<\ldots<j_q\\ i_k\neq j_l}} x_{i_1}\ldots x_{i_p} y_{j_1}\ldots y_{j_q},$$

де p, q – кількість x_{i_k} і y_{j_l} відповідно і $p+q=n$, утворюють множину твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$.

У роботі [7] побудовано іншу систему твірних і доведено наступну теорему:

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ – алгебра блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2$. Тоді твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ будуть поліноми вигляду:*

$$H_n^r(x,y) = \sum_{k=1}^{m} x_k^r y_k^{n-r}, \quad 0 \leq r \leq n, \tag{1}$$

де $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$ і $n \leq m$. Ці поліноми є алгебраїчно залежними.

У роботі [7] знайдено явний вигляд алгебраїчної залежності для випадку алгебра блочно-симетричних поліномів $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^2)$ на просторі $\mathcal{X}_2^2$. Безпосередня перевірка показує, що у випадку алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_3^2)$ одна з алгебраїчних залежностей буде мати вигляд:

$$\Big(\big((6c_4-4c_1c_2)^3(4((-c_2^2c_5^2+4c_5^3+4c_2^3c_9-18c_2c_5c_9+27c_9^2)/108)-$$

$$-(c_2c_5/3-2c_2^3/27-c_9)^2)(4((-c_1^2c_3^2+4c_3^3+4c_1^3c_6-18c_1c_3c_6+27c_6^2)/108)-$$

$$-(c_1c_3/3-2c_1^3/27-c_6)^2)\big)/54-(((6c_4-4c_1c_2)^3)/(27^22)+$$

$$+2(c_1c_3/3-2c_1^3/27-c_6)(c_2c_5/3-2c_2^3/27-c_9))^3-$$

$$-192(((6c_4-4c_1c_2)^3)/(27^22)+2(c_1c_3/3-2c_1^3/27-c_6)\times$$

$$\times(c_2c_5/3-2c_2^3/27-c_9))((-c_2^2c_5^2+4c_5^3+4c_2^3c_9-18c_2c_5c_9+27c_9^2)/108)\times$$

$$\times((-c_1^2c_3^2+4c_3^3+4c_1^3c_6-18c_1c_3c_6+27c_6^2)/108)\Big)^2-$$

$$-\Big(24(((6c_4-4c_1c_2)^3)/(27^2 2)+2(c_1c_3/3-2c_1^3/27-c_6)(c_2c_5/3-2c_2^3/27-c_9))^2+$$

$$+8^3((-c_1^2c_3^2+4c_3^3+4c_1^3c_6-18c_1c_3c_6+27c_6^2)/108)\times$$

$$\times((-c_2^2c_5^2+4c_5^3+4c_2^3c_9-18c_2c_5c_9+27c_9^2)/108)\Big)^2\times$$

$$\times((-c_1^2c_3^2+4c_3^3+4c_1^3c_6-18c_1c_3c_6+27c_6^2)/108)\times$$

$$\times((-c_2^2c_5^2+4c_5^3+4c_2^3c_9-18c_2c_5c_9+27c_9^2)/108),$$

де $c_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $c_2 = y_1 + y_2 + y_3$, $c_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $c_4 = x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2$, $c_5 = y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3$, $c_6 = x_1x_2x_3$, $c_9 = y_1y_2y_3$.

Зауважимо, що у системах твірних елементів $\{H_n^m\}_{n=1}^m$ та $\{R_n^{p,q}\}_{n=1}^m$, $p+q=n$ алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ є елементи, симетричні відносно дії групи підстановок S_m на множині координатних функціоналів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Кількість таких поліномів у кожній системі твірних дорівнює $2m$. Ці симетричні поліноми є алгебраїчно незалежними. Інші елементи системи твірних не є симетричними (але є блочно-симетричними). Будемо називати систему твірних елементів $\tau_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ *правильною*, якщо вона містить $2m$ симетричних алгебраїчно незалежних поліномів.

У загальному випадку опис алгебраїчних залежностей запропоновано у наступній теоремі.

Теорема 2. *Нехай $\tau_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ — правильна система твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. Тоді алгебраїчні залежності між елементами системи $\tau_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ можна подати у вигляді:*

$$\xi^{m!} - a_1\xi^{m!-1} + \cdots + (-1)^{m!-1}a_{m!-1}\xi^1 + (-1)^{m!}a_{m!} = 0, \qquad (2)$$

де ξ — несиметричний елемент системи $\tau_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ і a_k — симетричні поліноми.

Доведення. Нехай $\xi_1 = \xi_1(x,y)$ — довільний несиметричний твірний елемент алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. Зафіксуємо у цьому поліномі вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Зробивши всеможливі перестановки x_i $1 \le i \le m$, яких буде $m!$, отримаємо деякі нові поліноми $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{m!}$. Очевидно, що кожен з поліномів $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{m!}$ задовольняє таку тотожність:

$$G(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{m!}) =$$

$$= \xi^{m!} - a_1 \xi^{m!-1} + \cdots + (-1)^{m!-1} a_{m!-1} \xi^1 + (-1)^{m!} a_m! = 0,$$

За формулами Вієта знайдемо $a_1, a_2, \ldots, a_{m!}$.

$$\begin{aligned} &a_1 = \sum_{i=1}^{m!} \xi_i \\ &a_2 = \sum_{i<j=1}^{m!} \xi_i \xi_j \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m!} = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \cdots \xi_{m!}. \end{aligned} \tag{3}$$

Отже, коефіцієнти a_i $1 \le i \le m!$ є симетричними поліномами.

Покажемо, що залежностей вигляду (2) буде достатньо. Дійсно, з відомого результату (див. лему 5 із [5, с. 103]) між твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ існує не менш, ніж $\frac{m^2+3m}{2} - 2m = \frac{m^2-m}{2}$ алгебраїчних залежностей. З іншого боку, поліноми вигляду $H_n^0(x,y)$ і $H_0^n(x,y)$ $1 \le n \le m$ є алгебраїчно незалежними і таких поліномів є $2m$. Отже, ми маємо $\frac{m^2-m}{2}$ алгебраїчних залежностей. Оскільки несиметричних твірних елементів також буде $\frac{m^2-m}{2}$ і для кожного з них існує алгебраїчна залежність вигляду (2), то ці залежності можна розглядати як основні, а всі інші будуть виражатися через їх радикали. $\square$

Означення 1. *Характером алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ називається гомоморфізм з $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ в поле $\mathbb{C}$.*

Прикладом характерів є функціонали, які задаються значеннями в точках простору $\mathcal{X}_m^2$. Такі характери позначають $\delta_{\overline{z}_0}(P) = P(\overline{z}_0)$. Позначимо через $\mathcal{M}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ — множину характерів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$, яку називають *спектром* цієї алгебри.

Наслідок 1. *Кожен характер φ алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ має вигляд $\varphi(P) = \delta_{(x^0,y^0)}(P) := P(x^0, y^0)$ для деякої точки $(x^0, y^0) \in \mathcal{X}_m^2$, $P \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$.*

Доведення. Нехай φ — характер алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$, Позначимо через $\mathcal{T}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ — систему твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. Розглянемо дію φ на симетричних компонентах системи твірних $\mathcal{T}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$.

Нехай $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ — симетричні поліноми з системи твірних $\mathcal{T}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ відносно змінної x. Тоді $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ є алгебраїчним базисом в алгебрі симетричних поліномів на $\mathbb{C}^m$. Відомо, що існує точка $x^0 \in \mathbb{C}^m$, така що $\varphi(Q_j) = Q_j(x^0)$ $j = 1, \ldots, m$. Аналогічно, якщо $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m$ — симетричні поліноми з системи твірних $\mathcal{T}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ відносно змінної y, то існує $y^0 \in \mathbb{C}^m$, така що $\varphi(Q'_j) = Q'_j(y^0)$ $j = 1, \ldots, m$. Покажемо, що для будь-якої несиметричної компоненти ξ системи твірних $\mathcal{T}_{vs}(\mathcal{X}_m^2) : \varphi(\xi) = \xi(x^0, y^0)$. Дійсно, подіємо характером φ на тотожність (2), тобто

$$\begin{aligned}
&\varphi(\xi^{m!} - a_1\xi^{m!-1} + \cdots + (-1)^{m!-1}a_{m!-1}\xi^1 + (-1)^{m!}a_{m!}) = \varphi(\xi)^{m!} - \\
&-\varphi(a_1)\varphi(\xi)^{m!-1} + \cdots + (-1)^{m!-1}\varphi(a_{m!-1})\varphi(\xi)^1 + (-1)^{m!}\varphi(a_{m!}) = \\
&= \varphi(\xi)^{m!} - a_1(x^0, y^0)\varphi(\xi)^{m!-1} + \cdots + (-1)^{m!-1}a_{m!-1}(x^0, y^0)\varphi(\xi)^1 + \\
&+(-1)^{m!}a_{m!}(x^0, y^0) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Це рівняння має $m!$ розв'язків $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m!}$, і за теоремою Вієта їх можна знайти з системи

$$\begin{aligned}
&a_1(x^0, y^0) = \sum_{i=1}^{m!} \varphi_i, \\
&a_2(x^0, y^0) = \sum_{i<j=1}^{m!} \varphi_i\varphi_j, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m!}(x^0, y^0) = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \cdots \varphi_{m!}.
\end{aligned} \tag{5}$$

З іншого боку, оскільки (2) — тотожність, то вона виконуєть при підстановці $(x, y) = (x^0, y^0)$. Тобто, (5) виконується, якщо $\varphi = \delta_{(x^0, y^0)}$ або $\varphi = \delta_{(x^0_\sigma, y^0)}$ для деякої підстановки σ. Таких функціоналів є $m!$. Але, оскільки рівняння (5) також має $m!$ розв'язків, то $\varphi = \delta_{(x^0_\sigma, y^0)}$ для деякої підстановки σ на множині $\{1, 2, \ldots, m\}$. $\square$

Зауважимо, що між твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ існує $N = \frac{m^2-m}{2}$ алгебраїчних залежностей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$.

Нехай J_m^2 — радикальний ідеал, породжений поліномами $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$. Тоді $V_m^2 := V(J_m^2) = \bigcap\limits_{j=1}^{N} \Phi_j$ — нулі ідеалу — алгебраїчний многовид розмірності N у $\mathbb{C}^M$, де $M = \frac{m^2+3m}{2}$ — кількість твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. З теорії інваріантів (див. [6, 5]) відомо, що алгебра $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ ізоморфна алгебрі поліномів на V_m^2.

З теореми 2 і наслідку 1 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$, де $N = \frac{m^2-m}{2}$ — алгебраїчні залежності між твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. Тоді спектр $\mathcal{M}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ цієї алгебри записується у вигляді:*

$$\mathcal{M}_{vs}(\mathcal{X}_m^2) = \bigcap_{j=1}^{N} Ker\Phi_j.$$

Далі розглянемо простір $\mathcal{X}_m^s = \oplus_{\ell_1}^m \mathbb{C}^s$.

Нагадаємо (див., напр., [6]), що поліном вигляду

$$D_{yx}P = \frac{\partial P}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} y_2 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial x_n} y_n$$

називається *поляризованим поліномом* від $P(x)$ з новими змінними y_i. Симетричний поліном $P(x, y, \ldots, z)$ отримується з полінома $P(x)$ степеня r шляхом повної поляризації:

$$D_{zx} \ldots D_{yx} P(x) = r! P(x, y, \ldots, z).$$

У роботі [6] за допомогою процесу повної поляризації елементарних симетричних поліномів $S_i(x) = \sum\limits_{k_1 < \ldots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}$ отримано систему твірних в алгебрі $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^s)$ вигляду:

$$R_n^{p,q,\ldots,r}(x, y, \ldots, z) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_q \\ \ldots \\ l_1 < \ldots < l_r \\ i_p \neq j_q \neq \ldots \neq l_r}}^{m} x_{i_1} \ldots x_{i_p} y_{j_1} \ldots y_{j_q} \ldots z_{l_1} \ldots z_{l_r},$$

де $p, q, \ldots, r$ – кількість x_{i_p}, y_{j_q}, $\ldots$, z_{l_r} відповідно, $p + q + \ldots + r = n$ і $(x_i, y_i, \ldots, z_i) \in \mathbb{C}^s$.

Справедливою буде наступнаактуальна теореме:

Теорема 4. *Твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ є поліноми*

$$\begin{aligned} &H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1, x^2, \ldots, x^s) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^1)^{k_1} (x_i^2)^{k_2} \ldots (x_i^s)^{k_s}, \\ &k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n. \end{aligned} \tag{6}$$

Доведення. Нехай $P(x^1, x^2, \ldots, x^s) \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_\infty)$ — блочно-симетричний поліном степеня m, де $x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^s) \in \mathbb{C}^s$, $i \geq 1$.

Розглянемо звуження $P_m(x^1, x^2, \ldots, x^s)$ полінома $P(x^1, x^2, \ldots, x^s)$ на простір $\mathcal{X}^s_m$, де $x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^s) \in \mathbb{C}^s$, $1 \leq i \leq m$. Твірні елементи (1) алгебри $P_{vs}(\mathcal{X}^2_m)$ запишемо у вигляді:

$$H_n^{k_1,k_2}(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^{m} (x_i^1)^{k_1} (x_i^2)^{k_2}, \quad k_1 + k_2 = n. \tag{7}$$

Застосувавши процес повної поляризації, описаний у роботі [6], до твірних елементів (7) з новими змінними $x_i^3, \ldots, x_i^s$, отримаємо твірні елементи $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_m)$ вигляду:

$$\begin{aligned} &H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1, x^2, \ldots, x^s) = \sum_{i=1}^{m} (x_i^1)^{k_1} (x_i^2)^{k_2} \ldots (x_i^s)^{k_s}, \\ &k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n. \end{aligned} \tag{8}$$

Зауважимо, що кількість твірних $H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1, x^2, \ldots, x^s)$ алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_m)$ дорівнює

$$M = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+(s-1))}{(s-1)!}.$$

Поліноми $H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1, x^2, \ldots, x^s)$ залежать від sm числових змінних. З відомого результату (див. лему 5 із [5, с. 103]) між ними існує не менше ніж $M - sm$ алгебраїчних залежностей. З іншого боку, поліноми

$$H_n^{n,0,\ldots,0}(x^1, x^2, \ldots, x^s), \ldots, H_n^{0,0,\ldots,n}(x^1, x^2, \ldots, x^s), \quad 1 \leq n \leq m$$

є алгебраїчно незалежними і таких поліномів є sm. Отже, ми маємо

$$N = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+(s-1))}{(s-1)!} - sm$$

алгебраїчних залежностей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$. Тобто Φ_j $1 \leq j \leq N$ є ненульовими поліномами від M змінних, які перетворюються у тотожній нуль, якщо замість змінних підставити $H_n^{k_1,k_2,\ldots,k_s}(x^1, \ldots, x^s)$ $1 \leq n \leq m$.

Нехай J^s_m — радикальний ідеал, породжений поліномами $\Phi_1, \Phi_2, \ldots,$ Φ_N Тоді $V^s_m := V(J^s_m) = \bigcap\limits_{j=1}^{N} \Phi_j$ — нулі ідеалу — алгебраїчний многовид розмірності N у $\mathbb{C}^M$. З теорії інваріантів (див. [6, 5]) відомо, що алгебра $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_m)$ ізоморфна алгебрі поліномів на V^s_m, яка визначається як

$$\mathcal{P}(\mathbb{C}^M)\Big/J^s_m.$$

Оскільки $\{H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x^1,x^2,\dots,x^s)\}$ — система твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_m)$, то для кожного $P\in\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^s_m)$ існує поліном $G\in\mathcal{P}(\mathbb{C}^M)$ такий, що:

$$\begin{aligned}&P(x^1,x^2,\dots,x^s)=G(H_1^{1,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,\\&H_n^{n,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,\\&H_m^{0,0,\dots,m}(x^1,x^2,\dots,x^s)),\quad k_1+k_2+\ldots+k_s=n,\quad 1\le n\le m.\end{aligned}\tag{9}$$

При цьому звуження G на V^s_m однозначно визначається поліномом P. Справді, якщо $G_1,G_2\in\mathcal{P}(\mathbb{C}^M)$ такі, що

$$\begin{gathered}P(x^1,x^2,\dots,x^s)=G_1(H_1^{1,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,H_n^{n,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\\\dots,H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,H_m^{0,0,\dots,m}(x^1,x^2,\dots,x^s))=\\=G_2(H_1^{1,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,H_n^{n,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,\\H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,H_m^{0,0,\dots,m}(x^1,x^2,\dots,x^s)),\end{gathered}$$

то $G_1-G_2\in J^s_m$, тому звуження G_1-G_2 на V^s_m буде тотожним нулем.

Зауважимо, що для кожного натурального l многовид V^s_m природно вкладається у V^s_{m+l}. Тепер знову розглянемо звуження цього полінома, але уже на підпростір $\mathcal{X}^s_{m+l}$, де $l>0$. Тоді для нього існує поліном $\widetilde{G}(u_1,\dots,u_M)$ такий, що:

$$\begin{aligned}&P(x^1,x^2,\dots,x^s)=\widetilde{G}(H_1^{1,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,\\&H_n^{n,0,\dots,0}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x^1,x^2,\dots,x^s),\dots,\\&H_m^{0,0,\dots,m}(x^1,x^2,\dots,x^s)),\quad k_1+k_2+\ldots+k_s=n,\quad 1\le n\le m.\end{aligned}\tag{10}$$

Це зображення також буде справедливим і на многовиді V^s_{m+l}. З того, що $V^s_m\subset V^s_{m+l}$ і єдиності G на V^s_m випливає, що на многовиді V^s_m $\widetilde{G}=G$. Оскільки G і $\widetilde{G}$ залежать від поліномів $H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}(x^1,x^2,\dots,x^s)$ степеня не більшого за m, то $\widetilde{G}=G$ на V^s_{m+l}. Отже, серед зображень $P(x^1,x^2,\dots,x^s)$ у вигляді (10) можна вибрати $\widetilde{G}(u_1,\dots,u_M)=G(u_1,\dots,\,u_M)$ на $\mathcal{X}^s_{m+l}$. З довільності l випливає що зображення (9) буде справедливим і на просторі $\mathcal{X}^s_\infty$. $\square$

Зауваження 1. *Аналогічно, як і в теоремі 4 можна довести, що іншу систему твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ утворюють поліноми вигляду:*

$$R_n^{p,q,\dots,r}(x,y,\dots,z) = \sum_{\substack{i_1<\dots<i_p \\ j_1<\dots<j_q \\ \dots \\ l_1<\dots<l_r \\ i_p\neq j_q\neq\dots\neq l_r}}^{\infty} x_{i_1}\dots x_{i_p} y_{j_1}\dots y_{j_q}\dots z_{l_1}\dots z_{l_r},$$

де $p,q,\dots,r$ – кількість x_{i_p}, y_{j_q}, $\dots$, z_{l_r} відповідно, $p+q+\dots+r=n$ і $(x_i,y_i,\dots,z_i)\in\mathbb{C}^s$.

2 Оператор симетричного зсуву на алгебрі $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$

Нехай

$$(x,y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \dots \right)$$

і

$$(z,t) = \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} z_m \\ t_m \end{pmatrix}, \dots \right)$$

належать простору $\mathcal{X}_\infty^2$, де (x_i,y_i) і (z_i,t_i) належать простору $\mathbb{C}^2$. Визначимо симетричний зсув $(x,y)\bullet(z,t)\in\mathcal{X}_\infty^2$ формулою:

$$(x,y)\bullet(z,t) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_m \\ t_m \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Основними властивостями симетричного зсуву є:

1. $R_n^{p,q}((x,y)\bullet(z,t)) = \sum\limits_{\substack{i,j,l,m=0 \\ i+l=p,j+m=q \\ i+j=k,l+m=n-k}}^{\max\{p,q\}} \sum\limits_{k=0}^{n} R_k^{i,j}(x,y) R_{n-k}^{l,m}(z,t)$

2. $H_n^r((x,y)\bullet(z,t)) = H_n^r(x,y) + H_n^r(z,t);$

3. $\|(x,y)\bullet(z,t)\| = \|(x,y)\| + \|(z,t)\|;$

4. $(x,y)^{\bullet m} = (x^{\bullet m}, y^{\bullet m}).$

Зауважимо, що для функції

$$\mathcal{R}(x,y) = \sum_{\substack{n=1\\ q+p=n}}^{\infty} t_1^p t_2^q R_n^{p,q}(x,y) + 1.$$

буде виконуватися наступна властивість:

$$\mathcal{R}((x,y) \bullet (z,t)) = \mathcal{R}(x,y)\mathcal{R}(z,t).$$

Справедливість цієї рівності випливає з властивості 1.

Нехай $(x,y)^{\bullet m} = \underbrace{(x,y) \bullet \ldots \bullet (x,y)}_{m}$. Тоді з властивості 2 випливає, що:

$$H_n^r((x,y)^{\bullet m}) = mH_n^r(x,y).$$

Позначимо через $T_{(z,t)}^s$ оператор симетричного зсуву

$$P(x,y) \mapsto P((x,y) \bullet (z,t)),$$

де $P \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$.

Твердження 1. *Оператор $T_{(z,t)}^s$ є неперервним гомоморфізмом алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ в себе.*

Доведення. Нехай $(x,y),(z,t) \in \mathcal{X}_\infty^2$ і $P(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_\infty^2)$. Покажемо, що і $P((x,y) \bullet (z,t)) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_\infty^2)$. Дійсно, $P((x,y) \bullet (z,t)) = G(H_1^r((x,y) \bullet (z,t)), \ldots, H_n^r((x,y) \bullet (z,t))) = G(H_1^r(x,y) + H_1^r(z,t), \ldots, H_n^r(x,y) + H_n^r(z,t)) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_\infty^2)$. Нехай $P(x,y), Q(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_\infty^2)$. Оскільки:

$$\begin{gathered}
T_{(z,t)}^s(P(x,y) + Q(x,y)) = P((x,y) \bullet (z,t)) + Q((x,y) \bullet (z,t)) = \\
= T_{(z,t)}^s(P(x,y)) + T_{(z,t)}^s(Q(x,y)), \\
T_{(z,t)}^s(P(x,y)Q(x,y)) = P((x,y) \bullet (z,t))Q((x,y) \bullet (z,t)) = \\
= T_{(z,t)}^s(P(x,y))T_{(z,t)}^s(Q(x,y)),
\end{gathered}$$

то оператор $T_{(z,t)}^s$ є гомоморфізмом алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ в себе.

Нехай $(x,y),(z,t) \in \mathcal{X}_\infty^2$ і $\|(x,y)\| \le r, \|(z,t)\| \le r$. Тоді $\|(x,y) \bullet (z,t)\| \le 2r$. Звідси отримаємо:

$$|T_{(z,t)}^s(P(x,y))| \le \sup_{\|(x,y)\bullet(z,t)\| \le 2r} |P((x,y) \bullet (z,t))| = \|P\|_{2r}.$$

Отже, оператор симетричного зсуву є неперервним гомоморфізмом. $\square$

3 Аналог формули Мартіна для блочно-симетричних поліномів

Нехай $P(x) = P_n(x) + \ldots + P_0(x)$ – розклад деякого полінома $P(x)$ на однорідні доданки. Згідно з формулою Мартіна, для будь-яких попарно різних чисел $\overrightarrow{t} = (t_0, \ldots, t_n)$ існує квадратна невироджена матриця $B(n, \overrightarrow{t}) = (b_{nl})$ яка залежить тільки від $\overrightarrow{t} = (t_0, \ldots, t_n)$ така, що:

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} b_{nl} P(t_l x). \tag{11}$$

Скажемо, що блочно-симетричний поліном $P(x, y)$ є цілком однорідним поліномом степеня (n, m), якщо $P(x, y)$ є n-однорідним і відповідний йому поліном $G(x, y)$ є m-однорідним. Наприклад, $H_2^1 H_2^0 + (H_2^2)^2$ є цілком однорідним поліномом степеня $(4, 2)$. Зауважимо, що кожен блочно-симетрични поліном можна зобразити єдиним чином у вигляді скінченної суми цілком однорідних.

Розглянемо поліном $G(u, v)$. Нехай $G(u, v) = G_n(u, v) + \ldots + G_0(u, v)$ – розклад полінома $G(u, v)$ на однорідні доданки. Для цього полінома запишемо формулу Мартіна:

$$G_n(u, v) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj} G(c_j(u, v)),$$

де матриця $A(n, \overrightarrow{c}) = (a_{nj})$ залежить тільки від набору попарно різних натуральних чисел $\overrightarrow{c} = (c_0, \ldots, c_n)$.

Цю формулу можна переписати у вигляді:

$$G_n(H_1^r(x, y), \ldots, H_n^r(x, y)) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj} G(c_j H_1^r(x, y), \ldots, c_j H_n^r(x, y)). \tag{12}$$

Оскільки

$$P((x, y)^{\bullet c_j}) = G(c_j H_1^r(x, y), \ldots, c_j H_n^r(x, y)),$$

то з формули (12) отримаємо:

$$G_n(H_1^r(x, y), \ldots, H_n^r(x, y)) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj} P((x, y)^{\bullet c_j}). \tag{13}$$

Зауважимо, що якщо поліном $P(x,y)$ є n-однорідний, то $G_k(x,y)$ є (n,k)-цілком однорідний.

Очевидно, що для довільного $0 \leq j \leq n$ рівність (11) можна записати у вигляді:

$$P_n((x,y)^{\bullet c_j}) = \sum_{l=0}^{n} b_{nl} P(t_l (x,y)^{\bullet c_j}). \tag{14}$$

Розглянувши суму $\sum\limits_{j=0}^{n} a_{nj} P_n((x,y)^{\bullet c_j})$ і скомбінувавши рівності (14) і (13), отримаємо наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай $P(x,y) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} G(i,j)$ – розклад блочно-симетричного полінома $P(x,y)$ на цілком однорідні доданки. Тоді для будь-якого набору попарно різних натуральних чисел $\overrightarrow{c} = (c_0, \ldots, c_n)$ і попарно різних чисел $\overrightarrow{t} = (t_0, \ldots, t_n)$ існують невироджені матриці $A(n, \overrightarrow{c}) = (a_{nk})$ і $B(n, \overrightarrow{t}) = (b_{nl})$, які залежать відповідно від $\overrightarrow{c} = (c_0, \ldots, c_n)$ і $\overrightarrow{t} = (t_0, \ldots, t_n)$ такі, що:*

$$G(i,j) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{jk} b_{il} P(t_l (x,y)^{\bullet c_k}).$$

[1] *Немировский А.С., Семенов С.М.* О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве // Мат. сборник. — 1973. — **92**, № 2. — С. 257–281.

[2] *Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. — 1999. — **59.** — P. 681—697.

[3] *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. — 2003. — **35.** — P. 55–64.

[4] *Чернега І.В.* Симетричні поліноми на банахових просторах // Карпатські мат. публ. — 2009. — **1**, №2. — С. 105–125.

[5] *Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д.* Геометрическая теория инвариантов. — М: Мир, 1974. — 278 с.

[6] *Вейль Г.* Классические группы: их инварианты и представления. — М: Мир, 1973. — 404 с.

[7] *Загороднюк А.В., Кравців В.В.* Симетричні поліними на добутках банахових просторів // Карпатські мат. публ. — 2010. — **2**, №1. — С. 59–71.

ALGEBRA OF BLOCK-SYMMETRIC POLYNOMIALS: GENERATING ELEMENTS AND TRANSLATION OPERATOR

Viktoria KRAVTSIV

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *maksymivvika@gmail.com*

The paper contains a description of sets of generators of algebra of block-symmetric polynomials $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^s)$ and a description of the spectrum of $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$. A translation operator is introduced and an analogue of Martin's formula on the $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ is proved.