ІТЕРАТИВНЕ АГРЕГУВАННЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

©2011 р. Михайло КОПАЧ[1], *Анатолій ОБШТА*[2], *Богдан ШУВАР*[2]

[1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76000
[2]Національний університет „Львівська Політехніка”
вул. Бандери 12, Львів 79013

e-mail: *kopachm2009@gmail.com*

Редакція отримала статтю 27 вересня 2011 р.

Застосовано методику ітеративного агрегування до нелінійних рівнянь у банахових просторах. Встановлено достатні умови збіжності запропонованих алгоритмів.

Вступ

Численні застосування ітераційних алгоритмів як важливого, а деколи і неминучого інструменту нелінійного аналізу сприяють ініціюванню вивчення прикладних можливостей відомих та побудові і дослідженню нових ітераційних методів. Зокрема, це зумовлено потребою їх пристосування до реалізації в багатопроцесорному режимі з розпаралеленням обчислювальних схем. Структура цих алгоритмів здебільшого має за основу принципи декомпозиції, одним з основних засобів якої є

УДК: 517.988.8; MSC 2000: 47J25
Ключові слова і фрази: ітеративне агрегування, нелінійні операторні рівняння, банахів простір
Робота підтримана грантом ДФФД України № Ф35/531-2011

використання агрегаційного підходу. Наприклад, для систем лінійних алгебраїчних рівнянь він означає об'єднання окремих груп невідомих в агрегати тим чи іншим способом. Це дозволяє вихідну задачу замінити іншою, що має меншу розмірність (див., напр., [1]). До використання такої ідеї пристосовані, зокрема, методи ітеративного агрегування (див., напр., [2, стор. 155-158], а також [3]), проекційні [4] та проекційно-ітеративні методи [5]. У цій замітці досліджено один з варіантів агрегаційно-ітеративних алгоритмів для рівняння

$$x = Ax + Fx, \tag{1}$$

у якому лінійний неперервний оператор A та, взагалі кажучи, нелінійний неперервний оператор F діють з E в E, де E — банахів простір. Методику дослідження методів ітеративного агрегування для лінійного рівняння $x = Ax + b$ використану в [6, 7], поширено на рівняння виду (1).

1 Побудова алгоритму

Задамо оператори $S : E \to E'$, $\Lambda : E \to E'$, де E' — банахів простір, який, взагалі кажучи, не тотожний з E. Будемо вважати, що справджується рівність

$$S(A + \widetilde{A}) = \Lambda S, \tag{2}$$

яку можна прийняти за означення оператора $\widetilde{A}$. Разом з рівнянням (1) будемо розглядати допоміжне рівняння

$$y = \Lambda y + S\widetilde{A}x - SFx. \tag{3}$$

Множину ε_0 означимо наступним чином

$$\varepsilon_0 = \{(x, y)| \quad Sx + y = \Theta', \quad x \in E, \quad y \in E'\}, \tag{4}$$

де Θ' — нульовий елемент в E'. Позначимо через I' тотожний оператор в E'.

Лема 1. *Якщо існує оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$, *обернений до* $I' - \Lambda$, *то для розв'язку* (x^*, y^*) *системи* (1), (3) *матимемо, що* $(x^*, y^*) \in \varepsilon_0$.

Доведення. З (1)–(3) отримаємо

$$Sx+y = SAx+SFx+\Lambda y+S\widetilde{A}x-SFx = S(A+\widetilde{A})x+\Lambda y = \Lambda(Sx+y).$$

Отже, $(I'-\Lambda)(Sx+y)=\Theta'$ або $Sx+y=(I'-\Lambda)^{-1}\Theta'=\Theta'$ при $x=x^*$, $y=y^*$. Лему доведено. □

Побудуємо ітераційний процес

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + Fx^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \tag{5}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + S\widetilde{A}x^{(n)} - SFx^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \tag{6}$$

вважаючи заданими оператори $a^{(n)} : E' \to E$ та $\alpha_0^{(n)} : E' \to E$, для яких справджуються рівності

$$Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)} = \Lambda \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

які при заданих $a^{(n)}$ можна прийняти за означення операторів $\alpha_0^{(n)}$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми* 1 *та задані елементи* $x_0 \in E$, $y_0 \in E'$ *такі, що* $(x_0, y_0) \in \varepsilon_0$. *Тоді для ітераційного процесу* (5), (6) *матимемо, що* $(x^{(n)}, y^{(n)}) \in \varepsilon_0$.

Доведення. Припускаючи, що рівність (4) справджується при $x = x^{(n)}$, $y = y^{(n)}$ $(n > 0)$, отримуємо

$$Sx^{(n+1)}-y^{(n+1)} = SAx^{(n)}+SFx^{(n)}+Sa^{(n)}(y^{(n)}-y^{(n+1)})+\Lambda y^{(n+1)}+S\widetilde{A}x^{(n)}-$$
$$-SFx^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) = S(A+\widetilde{A})x^{(n)} + (Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)})y^{(n)}+$$
$$+(\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha_0^{(n)})y^{(n+1)} = \Lambda(Sx^{(n)} + y^{(n)}) = \Lambda\Theta' = \Theta'.$$

Цим і завершується доведення леми. □

Якщо задані лінійні оператори $\psi^{(n)}$, $\psi_0^{(n)}$ такі, що $\psi^{(n)} : E' \to E$, $\psi_0^{(n)} : E' \to E$, $(n = 0, 1, \ldots)$, то з лем 1 та 2, як безпосередні їх наслідки, отримуємо рівності

$$\psi^{(n)}S(x^{(n)} - x^*) + \psi^{(n)}(y^{(n)} - y^*) = \Theta, \tag{7}$$

$$\psi_0^{(n)}S(x^{(n)} - x^*) + \psi_0^{(n)}(y^{(n)} - y^*) = \Theta', \tag{8}$$

які використаємо для дослідження збіжності процесу (5), (6).

2 Збіжність ітерацій

З рівностей (3), (6) і припущення про існування оператора $(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}$, оберненого до $(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})$, при $n = 0, 1, \ldots$ матимемо

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} - y^* = (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(S\widetilde{A} - SQ_n)(x^{(n)} - x^*) + \\ + (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)})(y^{(n)} - y^*), \end{gathered} \tag{9}$$

де оператор Q_n означений (див. [8, стор. 82]) за допомогою формули

$$Q_n \omega = \int_0^1 F'(x^{(n)} + \tau(x^* - x^{(n)}))\omega d\tau.$$

Тут $F'(z)$ є похідною Фреше від оператора F в точці z. Поєднуючи (8) і (9), маємо

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} - y^* = (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(S\widetilde{A} - SQ_n - \psi_0^{(n)} S)(x^{(n)} - x^*) + \\ + (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)})(y^{(n)} - y^*). \end{gathered} \tag{10}$$

З (1) і (5) випливає

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) + Fx^{(n)} - Fx^* + a^{(n)}(y^{(n)} - y^*) - a^{(n)}(y^{(n+1)} - y^*).$$

Враховуючи (10), знайдемо

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = (A - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} S\widetilde{A})(x^{(n)} - x^*) + \\ + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} S(Fx^{(n)} - Fx^*) + Fx^{(n)} - Fx^* + \\ + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^*). \end{gathered}$$

Звідси одержуємо

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = (A + Q_n - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(S\widetilde{A} - SQ_n))(x^{(n)} - x^*) + \\ + (a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda))(y^{(n)} - y^*). \end{gathered}$$

На підставі (7) матимемо

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = (A + Q_n - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(S\widetilde{A} - SQ_n - \psi^{(n)} S)) \times \\ \times (x^{(n)} - x^*) + (a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda) - \psi^{(n)})(y^{(n)} - y^*). \end{gathered} \tag{11}$$

Позначимо

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{11}^{(n)} & H_{12}^{(n)} \\ H_{21}^{(n)} & H_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad z^{(n)} - z^* = \begin{pmatrix} x^{(n)} - x^* \\ y^{(n)} - y^* \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} H_{11}^{(n)} &= A + Q_n - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(S\widetilde{A} - SQ_n) - \psi^{(n)}S, \\ H_{12}^{(n)} &= a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda) - \psi^{(n)}, \\ H_{21}^{(n)} &= (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(S\widetilde{A} - SQ_n + \psi_0^{(n)}S), \\ H_{22}^{(n)} &= (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(\alpha_0^{(n)} - \psi^{(n)}). \end{aligned}$$

Тоді сукупність рівностей (10), (11) можна записати як одну

$$z^{(n+1)} - z^* = H^{(n)}(z^{(n)} - z^*). \tag{12}$$

Запровадимо норму $||x, y||_0$ пар елементів $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, наприклад, за формулою

$$||x, y||_0^2 = ||x||_E^2 + ||y||_E^2.$$

Відповідну норму оператора $H^{(n)}$ позначимо через $||H^{(n)}||_0$.

Теорема 1. *Нехай* $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \varepsilon_0$ *і*

$$||H^{(n)}|| \leq q < 1 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Тоді послідовності $\{x^{(n)}\}$ *та* $\{y^{(n)}\}$*, утворені за допомогою алгоритму* (5), (6) *збігаються до* x^* *та* y^**відповідно не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q *і справджується співвідношення*
$(x^*, y^*) \in \varepsilon_0$ *та* $(x^{(n)}, y^{(n)}) \in \varepsilon_0$ *при* $n = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Попередній виклад і отримані за його допомогою рівності (12) разом з умовою (13) дозволяють застосувати принцип стиску, що і доводить теорему. □

Вибір $\psi^{(n)}$ за формулою

$$\psi^{(n)} = a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda)$$

зводить дослідження збіжності ітераційного процесу (5), (6) до оцінки норми оператора

$$H_0^{(n)} = A + Q_n - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1} S(I' - A + Q_n),$$

бо у цьому випадку замість рівностей (12) будемо мати тотожні з ними рівності

$$x^{(n+1)} - x^* = H_0^{(n)}(x^{(n)} - x^*).$$

Це дає підставу сформулювати твердження, яке є частковим випадком теореми 1.

Теорема 2. *Якщо* $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \varepsilon_0$ *і справджується умова*

$$||H_0^{(n)}||_E \leq q_0 < 1,$$

то послідовність $\{x^{(n)}\}$, *утворена за допомогою алгоритму* (5), (6), *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_0.

3 Приклад

Нехай E' є множиною дійсних чисел, оператор S означений за допомогою формули

$$Sx = (\varphi, x), \tag{14}$$

де (φ, x) — значення лінійного функціоналу φ на елементах x банахового простору E. Візьмемо

$$a^{(n)} = \tfrac{Ax^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}, \quad \alpha_0^{(n)} = \tfrac{(A^*\varphi, x^{(n)})}{(\varphi, x^{(n)})}$$

де A^* — спряжений до A оператор. Тоді ітераційний процес (5), (6) зводиться до однопараметричного методу ітеративного агрегування щодо лінійного доданку у рівнянні (1). Його можна подати у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + Fx^{(n)} + \tfrac{Ax^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(\varphi, x^{(n+1)} - x^{(n)}), \tag{15}$$

а також

$$x^{(n+1)} = \tfrac{(\varphi, x^{(n+1)})}{(\varphi, x^{(n)})} Ax^{(n)} + Fx^{(n)}.$$

Звідси для $(\varphi, x^{(n+1)})$ отримуємо

$$(\varphi, x^{(n+1)}) = \frac{(\varphi, Fx^{(n)})(\varphi, x^{(n)})}{(\varphi, x^{(n)} - Ax^{(n)})}.$$

Якщо рівність (2), при виборі оператора S за формулою (14), зводиться до рівності

$$A^*\varphi = A\varphi, \tag{16}$$

то ітераційний процес (15) збігається зі звичайним методом послідовних наближень

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + Fx^{(n)}.$$

Тут $x^{(0)} \in \varepsilon_0'$ з множиною ε_0' означеною в наступний спосіб

$$\varepsilon_0' = \{x | (\varphi, x) = 0, x \in E\},$$

погодженою з формулою (4). Частковим випадком теореми 2 є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай справджується рівність* (16) *і оператор* $Kx = Ax - Gx + Fx$, *де* $Gx = \psi(\varphi, x)$, $\psi \in E$, *задовольняє умову Ліпшиця*

$$||Kx - Ky|| \le q_1 ||x - y||$$

зі сталою $q_1 < 1$. *Тоді ітераційний процес* (15) *збігається до розв'язку рівняння* (1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_1.

[1] *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. – М.: Наука, 1981. – 351 с.

[2] *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 255 с.

[3] *Marek I., Mayer P.* Convergence theory of some classes of iterative aggregation-disaggregation methods for computing stationary probability vectors of stochastic matrices // Linear Algebra Appl. – 2003. – **363**. – P. 177–200.

[4] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

[5] *Курпель Н.С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – К.: Наукова думка, 1968. – 243 с.

[6] *Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.* Дослідження збіжності ітеративного агрегування // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2010. – **91**. – С. 26–34.

[7] *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.

[8] *Далецкий Ю.А., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[9] *Валеев К.Г.* Расщепление спектра матриц. – К.: Вища школа, 1986. – 269 с.

THE ITERATIVE AGGREGATION FOR NON-LINEAR OPERATOR EQUATIONS

Myhailo KOPACH[1], *Anatolij OBSHTA*[2], *Bohdan SHUVAR*[2]

[1]Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine
[2]National University "Lvivska Polytechnica"
12 Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine

e-mail: *kopachm2009@gmail.com*

It was applied the methodology of iterative aggregation to the non-linear equations in Banach spaces. There were established the sufficient conditions for convergence of these algorithms.