ПАРАДЕТЕРМІНАНТНИЙ ДОБУТОК ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

©*2011 р. Роман ЗАТОРСЬКИЙ*

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *romazz@rambler.ru*

Редакція отримала статтю 7 вересня 2011 р.

Введено комутативні операції парадетермінантного та параперманентного добутків трикутних матриць, для яких парадетермінант та параперманент є мультиплікативними функціями трикутних матриць.

1 Вступ

В [1] введено поняття трикутної матриці та добутку трикутних матриць. Однак для такого добутку не виконується рівність

$$\operatorname{ddet}(AB) = \operatorname{ddet}(A) \cdot \operatorname{ddet}(B). \tag{1}$$

Метою цієї статті є побудова алгоритму множення трикутних матриць, для якого виконуватиметься комутативний закон та рівність (1).

УДК: 512.64; MSC 2000: 15A15
Ключові слова і фрази: парадетермінант, трикутна матриця, мультиплікативна функція

2 Допоміжні поняття та твердження

Означення 1 ([2]). *Множиною $\Xi(n)$ назвемо множину впорядкованих n-вибірок*

$$\xi = (\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$$

із мультимножини з первинною специфікацією $\{1^1, 2^2, \ldots, n^n\}$, елементи яких задовольняють умови:

1) натуральне число $\xi(j)$ задовольняє нерівність

$$j \leq \xi(j) \leq n, \ \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

2) для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ виконуються рівності

$$\xi(j) = \xi(j+1) = \ldots = \xi(\xi(j)).$$

Твердження 1 ([2]). *Між елементами множини $\Xi(n)$ і елементами множини $C(n,+)$ впорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки існує взаємнооднозначна відповідність.*

Доведення розіб'ємо на кілька кроків.

1. Якщо елемент $\xi \in \Xi(n)$ має первинну специфікацію

$$[1^{\alpha(1)}, 2^{\alpha(2)}, \ldots, n^{\alpha(n)}],$$

то виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(i) = \ n.$$

Тому показники $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n)$ первинної специфікації елемента ξ утворюють деяке впорядковане розбиття числа n. Це дає відображення

$$\varphi : \xi \mapsto (\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n))$$

із множини $\Xi(n)$ в множину $C(n,+)$.

2. Ін'єктивність відображення φ. Нехай

$$\xi_1 = (\xi_1(1), \xi_1(2), \ldots, \xi_1(n)), \ \ \xi_2 = (\xi_2(1), \xi_2(2), \ldots, \xi_2(n)) \text{ –}$$

два різні елементи множини $\Xi(n)$ з первинними специфікаціями

$$[1^{\alpha_1(1)}, 2^{\alpha_1(2)}, \ldots, n^{\alpha_1(n)}], \ \ [1^{\alpha_2(1)}, 2^{\alpha_2(2)}, \ldots, n^{\alpha_2(n)}].$$

Нехай i — найменший індекс, для якого виконується нерівність $\xi_1(i) \neq \xi_2(i)$. Можна вважати, що $\xi_1(i) < \xi_2(i)$. Тоді з умови 2) означення 1 випливає нерівність $\alpha_1(\xi_2(i)) < \alpha_2(\xi_2(i))$, тобто елементам ξ_1 і ξ_2 відповідають різні впорядковані розбиття множини $C(n,+)$.

3. Обернене відображення з $\Xi(n)$ в $C(n,+)$ побудуємо згідно з наступним алгоритмом. Нехай $p = (p(1), p(2), \dots, p(s)) \in C(n,+)$.

п.1. *поч*

п.2. $i := 1;\ \ p := p(i);\ \ j := 1$

п.3. $\xi(j) = \ldots = \xi(p) = p$

п.4. $j := p + 1;\ \ i := i + 1$

п.5. *якщо* $i \leq s$, *то* $p := p + p(i)$; *перейти до п.3.*

п.6. *кін*

Позаяк $1 \leq p(i)$, то після виконання п.4 і п.5 цього алгоритму буде виконуватися нерівність $j \leq p$, яка разом із рівностями п.3. забезпечить виконання обох умов означення 1. □

Наслідок 1. $|\Xi(n)| = 2^{n-1}$.

Нехай $\xi \in \Xi(n)$ і r — число різних компонент елемента ξ. Число $n - r$ назвемо *декрементом* елемента ξ, а число $\varepsilon(\xi) = (-1)^{n-r}$ — його *знаком.*

Множини $\Xi(n)$ можна будувати за допомогою наступного рекурсивного алгоритму.

Твердження 2 ([2])**.** *(i)* $\Xi(1) = \{(1)\}$.

(ii) Якщо множина $\Xi(k)$ *вже побудована, то елементи множини* $\Xi(k+1)$ *можна отримати, будуючи на основі кожного елемента* $\xi = (\xi(1), \dots, \xi(k))$ *множини* $\Xi(k)$ *два елементи множини* $\Xi(k+1)$. *Перший — дописуванням на* $(k+1)$*-ше місце числá* $k+1$, *а другий — заміною всіх компонент, що дорівнювали* k, *на* $k+1$ *та дописуванням на* $(k+\ 1)$*-ше місце компоненти* $k+1$.

Доведення. Із зауваження після означення 1 випливає, що $(k+1)$-ше місце в кожній впорядкованій мультимножині множини $\Xi(k+1)$ займатиме число $k+1$, тому, дописуючи до елементів множини $\Xi(k)$ на $(k+1)$-ше місце число $k+1$, ми отримаємо 2^{k-1} різних елементів множини $\Xi(k+1)$. Множину цих елементів позначимо через $\Xi(k; k+1)$.

Заміна в кожній мультимножині множини $\Xi(k)$ числá k на число $k+1$ разом з дописуванням на $(k+1)$-ше місце числá $k+1$ також не порушує умов означення множини $\Xi(n)$, бо всі елементи $\xi(i)$, менші за k, задовольняють ці умови, а число $k+1$, з'явившись на j–тому місці, заповнює також всі наступні місця по $(k+1)$-ше включно. Ця процедура дає ще 2^{k-1} різних елементів множини $\Xi(k+1)$. Позначимо множину цих елементів через $\Xi(k+1; k+1)$.

Кратність входження числа $k+1$ до кожного елемента множини $\Xi(k; k+1)$ дорівнює 1, а кратність входження цього ж числа до кожного елемента множини $\Xi(k+1; k+1)$ більша за 1. Тому всі елементи цих двох множин різні і належать $\Xi(k+1)$-множині.

Позаяк $\Xi(k; k+1) \cup \Xi(k+1; k+1) \subseteq \Xi(k+1)$ і $|\Xi(k; k+1) \cup \Xi(k+1; k+1)| = 2^k$, то з наслідку 1 випливає рівність $\Xi(k; k+1) \cup \Xi(k+1; k+1) = \Xi(k+1)$. □

Означення 2. *Елементи $\xi_1, \xi_2 \in \Xi(n)$ назвемо **дружніми**, якщо їх бази задовольняють нерівність*

$$[\xi_1] \cap [\xi_2] \neq \{n\},$$

*у протилежному випадку ці елементи називатимемо **недружніми**.*

Твердження 3 ([2])**.** *Існує рівно 3^{n-1} впорядкованих пар недружніх елементів множини $\Xi(n)$, тобто*

$$\sum_{\alpha \in \Xi(n)} |\Xi_\alpha(n)| = |\{(\alpha, \beta) \in \Xi(n) \times \Xi(n) : [\alpha] \cap [\beta] = \{n\}\}| = 3^{n-1}.$$

Доведення. Позначимо $x_n = \sum_{\alpha \in \Xi(n)} |\Xi_\alpha(n)|$. Використовуючи позначення із доведення твердження 2, можемо записати:

$$\Xi(n) \times \Xi(n) = (\Xi(n-1, n) \times \Xi(n-1, n)) \cup (\Xi(n-1, n) \times \Xi(n, n)) \cup$$
$$\cup (\Xi(n, n) \times \Xi(n-1, n)) \cup (\Xi(n, n) \times \Xi(n, n)).$$

Порахуємо число пар недружніх елементів у кожній з 4 компонент правої частини

1) На $(n-1)$-му місці в кожному елементі множини $\Xi(n-1, n)$ стоїть число $(n-1)$. Тому довільна пара елементів цієї множини є недружньою.

2) Для кожного елемента $\alpha \in \Xi(n)$ існує єдиний елемент $\alpha' \in \Xi(n-1)$, на основі якого α будується за допомогою алгоритму з твердження 2.

Нехай $\alpha \in \Xi(n-1,n)$ і $\beta \in \Xi(n,n)$. Якщо елементи множини $\Xi(n)$, що є впорядкованими наборами натуральних чисел, розглядати як деякі мультимножини, то можна розглядати їх перетин. Тоді якщо $\alpha' \cap \beta' = \{(n-1)^p\},\ 1 \le p$, то $\alpha \cap \beta = \{n\}$, тобто елементи α і β недружні. Якщо ж $\alpha' \cap \beta' = \{\dots, \alpha(i), \dots, (n-1)^p\}$, то $\alpha \cap \beta = \{\dots, \alpha(i), \dots, n\}$, і елементи α і β дружні. Таким чином, кількість пар недружніх елементів, які належать множині $\Xi(n-1,n) \times \Xi(n,n)$, дорівнює

$$\sum_{\alpha \in \Xi(n-1)} |\Xi_\alpha(n-1)| = x_{n-1}.$$

3) Випадок $(\alpha,\beta) \in \Xi(n,n) \times \Xi(n-1,n)$ аналогічний попередньому.

4) Четвертий випадок також аналогічний до другого випадку. Пара елементів α і β із декартового добутку $\Xi(n,n) \times \Xi(n,n)$ недружна лише тоді, коли $\alpha' \cap \beta' = \{(n-1)^p\},\ 1 \le p$, тобто четвертий випадок дає знову x_{n-1} недружніх елементів.

Таким чином, маємо рекурентне співвідношення $x_n = 3x_{n-1}$ і початкову умову $x_1 = 1$, з яких і випливає справедливість твердження. □

3 Парадетермінантний добуток трикутних матриць

Означення 3. *Неповним добутком двох парадетермінантів* $\operatorname{ddet}(A)$ *і* $\operatorname{ddet}(B)$ *трикутних матриць* A *і* B *n–го порядку назвемо вираз, який задається рівністю*

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) =$$

$$= \sum_{(\xi_i,\xi_j) \in \Xi(n) \times \Xi(n)} (-1)^{\varepsilon(\xi_i)+\varepsilon(\xi_j)} k(\xi_i,\xi_j) a_{\xi_i(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\xi_i(n),n} \cdot b_{\xi_j(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\xi_j(n),n},$$

де

$$k(\xi_i,\xi_j) = \begin{cases} 1, & [\xi_i] \cap [\xi_j] = \{n\}, \\ 0, & [\xi_i] \cap [\xi_j] \ne \{n\}, \end{cases} \tag{2}$$

а $\varepsilon(\xi_i), \varepsilon(\xi_j)$ *— знаки елементів* $\xi_i, \xi_j \in \Xi(n)$.

Рівність (2) парі (ξ_1, ξ_j) недружніх елементів ξ_i і ξ_j ставить у відповідність число $k(\xi_i, \xi_j) = 1$, а парі дружніх елементів — число $k(\xi_i, \xi_j) = 0$.

Аналогічно можна дати означення неповного добутку двох параперманентів трикутних матриць

Означення 4. *Неповним добутком двох параперманентів* $\mathrm{pper}(A)$ *і* $\mathrm{pper}(B)$ *трикутних матриць* A *і* B n*–го порядку назвемо вираз* $\mathrm{pper}(A) \circ \mathrm{pper}(B)$, *який задається рівністю*

$$\mathrm{pper}(A) \circ \mathrm{pper}(B) =$$
$$= \sum\nolimits_{(\xi_i,\xi_j)\in\Xi(n)\times\Xi(n)} k(\xi_i, \xi_j) a_{\xi_i(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\xi_i(n),n} \cdot b_{\xi_j(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\xi_j(n),n}.$$

Уточнимо рівність (2). Занумеруємо всі елементи $\Xi(n)$-множини у порядку їх генерування при допомозі рекурсивного алгоритму, який базується на твердженні 2. При цьому отримаємо послідовність

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2^{n-1}},$$

кожен член якої є деякою мультимножиною із базою $\{1, 2, \ldots, n\}$. Якщо всі значення функції, заданої рівністю (2), помістити в таблицю, причому одиницю замінити замальованим кружечком, а нуль — порожньою клітинкою, то з'явиться фрактальна фігура[1] n-го покоління.

При $n = 5$ отримаємо фрагмент фрактальної фігури п'ятого покоління, який зображений у наступній таблиці:

[1] Фрактал — це нескінченно самоподібна геометрична фігура, кожен фрагмент якої повторюється при зменшенні масштабу (див. [3]). Це поняття було запропоноване Бенуа Мандельбротом у 1975 році. Народження фрактальної геометрії пов'язують із виходом у світ його монографії "The Fractal Geometry of Nature", 1977.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{14}	ξ_{15}	ξ_{16}
ξ_1																$\bullet$
ξ_2															$\bullet$	$\bullet$
ξ_3														$\bullet$		$\bullet$
ξ_4													$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
ξ_5												$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
ξ_6											$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$
ξ_7										$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$
ξ_8									$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
ξ_9								$\bullet$								$\bullet$
ξ_{10}							$\bullet$	$\bullet$							$\bullet$	$\bullet$
ξ_{11}						$\bullet$		$\bullet$						$\bullet$		$\bullet$
ξ_{12}					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$					$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
ξ_{13}				$\bullet$				$\bullet$				$\bullet$				$\bullet$
ξ_{14}			$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$
ξ_{15}		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$
ξ_{16}	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Для побудови алгоритму знаходження значення неповного добутку парадетермінантів та неповного добутку параперманентів, важливою задачею є задача описання пар (i, j) індексів аргументів функції

$$k(\xi_i, \xi_j),\ 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1},\ 2^{n-1} - i + 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1},$$

яким у фрактальному трикутнику n-го покоління відповідає 1.

Можна встановити залежність між фрагментами фрактальних фігур та числовими трикутниками нулів та одиниць, при цьому отримаємо *бінарний трикутник Паскаля*[2]. Бінарний трикутник Паскаля можна отримати, замінюючи у класичному трикутнику Паскаля непарні числа одиницею, а парні — нулем, тобто відповідними числами класичного трикутника Паскаля за модулем 2. Таким чином, отримуємо аналогічний рекурсивний алгоритм побудови бінарного трикутника Паскаля, замінюючи у виразі

$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} + c_{i-1,j}$$

операцію суми логічною операцією $\oplus$ "виключного або". Тепер легко встановити справедливість рівності

$$k(\xi_i, \xi_j) = \binom{i-1}{i+j-(2^{n-1}+1)} \bmod 2,$$

[2] Значно загальніший трикутник було отримано французьким математиком Люка (див. [4], стор. 222–226.)

де індекси i, j задовольняють нерівності

$$1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1},\ 2^{n-1} - i + 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}.$$

Приклад 1. Знайдемо неповний добуток двох парадетермінантів $A = \langle a_{ij} \rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 3}$ і $B = \langle b_{ij} \rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 3}$

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) =$$

$$= a_{33}b_{33}(a_{11}a_{22}b_{31}b_{32} + a_{21}a_{22}b_{11}b_{32} - a_{21}a_{22}b_{31}b_{32} + a_{11}a_{32}b_{21}b_{22} -$$

$$- a_{11}a_{32}b_{31}b_{32} + a_{31}a_{32}b_{11}b_{22} - a_{31}a_{32}b_{21}b_{22} - a_{31}a_{32}b_{11}b_{32} + a_{31}a_{32}b_{31}b_{32}).$$

Для обчислення неповного добутку двох парадетермінантів (параперманентів) трикутних матриць зручно користуватися наступною таблицею.

Приклад 2. Знайдемо неповний добуток двох парадетермінантів

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{array}{cccc} 2 & & & \\ 1 & -3 & & \\ -2 & -1 & 1 & \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right\rangle, \quad \operatorname{ddet}(B) = \left\langle \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 3 & 2 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle.$$

Будуємо таблицю

ddet *(A)* \ ddet *(B)*		*1234*	*2234*	*1334*	*3334*	*1244*	*2244*	*1444*	*4444*
		2	*-6*	*-1*	*2*	*-4*	*12*	*10*	*-40*
1234	*6*								*-240*
2234	*-3*							*-30*	*120*
1334	*-2*						*-24*		*80*
3334	*-2*					*8*	*-24*	*-20*	*80*
1244	*-24*				*-48*				*960*
2244	*12*			*-12*	*24*			*120*	*-480*
1444	*-8*		*48*		*-16*		*-96*		*320*
4444	*12*	*24*	*-72*	*-12*	*24*	*-48*	*144*	*120*	*-480*

В цій таблиці перший рядок і перший стовпчик заповнені елементами

$\Xi(4)$-множини, другий рядок і другий стовпчик — відповідними значеннями доданків парадетермінантів $\operatorname{ddet}(B)$ і $\operatorname{ddet}(A)$. Решта комірок таблиці заповнені значеннями добутків доданків, що відповідають недружнім парам елементів $\Xi(n)$–множини. Шукане значення неповного добутку парадетермінантів дорівнює сумі всіх чисел, які лежать нижче і правіше подвійних ліній таблиці. Отже, $\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) = 470$.

Зауваження 1. *Із симетрії квадратної таблиці відносно її діагоналі випливає справедливість рівностей*

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) = \operatorname{ddet}(B) \circ \operatorname{ddet}(A),$$

$$\operatorname{pper}(A) \circ \operatorname{pper}(B) = \operatorname{pper}(B) \circ \operatorname{pper}(A).$$

Нехай $R_{ij}(A)$ і $R_{ij}(B)$ — роги матриць A і B. Позначимо через d_{ij} і p_{ij} відповідно неповний добуток парадетермінантів і параперманентів цих рогів, тобто

$$d_{ij} = \operatorname{ddet}(R_{ij}(A)) \circ \operatorname{ddet}(R_{ij}(B)) = \operatorname{ddet}(R_{ij}(B)) \circ \operatorname{ddet}(R_{ij}(A)),$$

$$p_{ij} = \operatorname{pper}(R_{ij}(A)) \circ \operatorname{pper}(R_{ij}(B)) = \operatorname{pper}(R_{ij}(B)) \circ \operatorname{pper}(R_{ij}(A)),$$

причому вважатимемо, що

$$d_{i,i+1} = p_{i,i+1} = 1.$$

Означення 5. *Парадетермінантним добутком двох трикутних матриць A і B n-го порядку назвемо трикутну матрицю $C = A \overset{d}{\circ} B$ того ж порядку, елементи c_{ij} якої задаються рівністю*

$$c_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}},$$

тут δ_{ij} — символ Кронекера, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

Аналогічно вводиться параперманентний добуток двох трикутних матриць.

Означення 6. *Параперманентним добутком двох трикутних матриць A і B n-го порядку назвемо трикутну матрицю $C = A \overset{p}{\circ} B$ того ж порядку, елементи c_{ij} якої задаються рівністю*

$$c_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i,j+1}}.$$

Очевидними є наступні рівності:

$$A \overset{d}{\circ} B = B \overset{d}{\circ} A,$$
$$(A \overset{d}{\circ} B) \overset{d}{\circ} C = A \overset{d}{\circ} (B \overset{d}{\circ} C),$$
$$A \overset{d}{\circ} (B + C) = A \overset{d}{\circ} B + A \overset{d}{\circ} C.$$

Аналогічні рівності виконуються і для параперманентного добутку трикутних матриць.

Теорема 1. *Для трикутних матриць A і B одного і того ж порядку виконуються рівності:*

$$\operatorname{ddet}(A \overset{d}{\circ} B) = \operatorname{ddet}(A) \cdot \operatorname{ddet}(B),$$
$$\operatorname{pper}(A \overset{p}{\circ} B) = \operatorname{pper}(A) \cdot \operatorname{pper}(B).$$

Доведення. 1) Перш за все зазначимо, що факторіальний добуток елемента

$$c_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}}$$

дорівнює $(-1)^{i-j} d_{ij}$ і що у парадетермінанті

$$\operatorname{ddet}(A \overset{d}{\circ} B) = \operatorname{ddet} \left((-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}} \right)$$

модулі всіх доданків

$$d_{i(1),1} d_{i(2),i(1)+1} \cdot \ldots \cdot d_{i(r),i(r-1)+1} d_{n,i(r)+1} \tag{3}$$

різні. Підставимо в ці доданки замість неповних парадетермінантних добутків їх значення і отримаємо суму різних добутків певних доданків парадетермінанта матриці A на певні доданки парадетермінанта матриці B.

2) Доведемо, що парадетермінант $\operatorname{ddet}(A \overset{d}{\circ} B)$ складається із $2^{2(n-1)}$ доданків. Кожному впорядкованому розбиттю натурального числа n на r компонент відповідає доданок (3). Неповний парадетермінантний добуток d_{ij} складається із 3^{i-j} доданків (див. твердження 3). Отже, кожен доданок виду (3), в свою чергу, складається із 3^{n-r} доданків. Але існує рівно

$$\binom{n-1}{r-1}$$

r–розбиттів натурального числа n. Тому всім r–розбиттям числа n відповідає

$$3^{n-r}\binom{n-1}{r-1}$$

доданків. Таким чином, всім впорядкованим розбиттям натурального числа n відповідає

$$\sum_{r=1}^{n} 3^{n-r}\binom{n-1}{r-1} = (3+1)^{n-1} = 2^{2(n-1)}$$

доданків. Рівно стільки різних доданків ми отримаємо в результаті добутку парадетермінантів $\mathrm{ddet}\,(A)$ і $\mathrm{ddet}\,(B)$.

3) Те, що знак кожного доданку у лівій частині рівності (3) збігається зі знаком цього доданку в правій частині цієї рівності, випливає із зв'язку параперманента із парадетермінантом (див. [1], рівн. 2.4.42 на стор. 116).

Друга рівність цієї теореми доводиться аналогічно. $\square$

Твердження 4. *Для довільної трикутної матриці A справедливі рівності*

$$A \overset{d}{\circ} E = E \overset{d}{\circ} A = A,$$
$$A \overset{p}{\circ} E = E \overset{p}{\circ} A = A,$$

тут E — одинична трикутна матриця того ж порядку, що і трикутна матриця A.

Доведення. Перша рівність цього твердження випливає з очевидних рівностей

$$\mathrm{ddet}\ (R_{ij}(A))_{i-j+1} \circ \mathrm{ddet}\ (E)_{i-j+1} = \{a_{ij}\}$$

і того факту, що факторіальний добуток елемента

$$c_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1}\frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}}$$

дорівнює

$$d_{ij} = \mathrm{ddet}\ (R_{ij}(A))_{i-j+1} \circ \mathrm{ddet}\ (E)_{i-j+1}\,.$$

Друга рівність доводиться аналогічно. $\square$

[1] *Заторський Р.А.* Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.

[2] *Заторський Р.А.* Деякі методи та задачі комбінаторного аналізу. Спеціальний курс математики. — Івано-Франківськ: Лік, 2006. — 136 с.

[3] *Федер Е.* Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

[4] *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 272 с.

PARADETERMINANT PRODUCT OF TRIANGLE MATRICES AND ITS PROPERTIES

Roman ZATORSKY

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *romazz@rambler.ru*

We introduce two operations (paradeterminant product and parapermanent product) of triangle matrices for which paradeterminant and parapermanent are multiplicative functions of triangle matrices.