Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2015. — Т.12

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2015. — V.12

ЗБІЖНІСТЬ НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ НЕРЛУНДА ДО ВІДНОШЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ПОЛІ P-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Михайло Симотюк[1], Оксана Медвідь[1]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, вул. Наукова, 3-б, 79060*

М. Симотюк, О. Медвідь. *Збіжність неперервного дробу Нерлунда до відношення гіпергеометричних функцій в полі p-адичних чисел* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2015. — Т.12. — С. 52–60.

Встановлено умови збіжності неперервного дробу Нерлунда до відношення значень гіпергеометричних функцій Гауса в полі p-адичних чисел.

M. Symotyuk, O. Medvid, *The convergence of continued Nörlund's fraction to a ratio of hypergeometric functions in the field of p-adic numbers*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **12** (2015), 52–60.

Some conditions of convergence of continued Nörlund's fraction to the ratio of hypergeometric functions in the field of p-adic numbers are established.

---

1. Вступ. Формулювання основних результатів

Неперервним дробом Нерлунда називається такий ланцюговий дріб [1, 2]:

$$b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(z)}{b_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 30B70, 40A15 *УДК:* 517

Ключові слова та фрази: гіпергеометрична функція Гауса, неперервний дріб Нерлунда, p-адичні числа

E-mail: quaternion@ukr.net, medvid@ukr.net

де

$$
\begin{aligned}
a_n(z) &= \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(c+n-1)} z(1-z), \qquad && n \geq 1, \\
b_n(z) &= 1 - \frac{a+b+2n+1}{c+n} z, && n \geq 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$

a, b, c – довільні комплексні числа, причому $c \notin \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. Зауважимо, що якщо хоча б одне з чисел a, b належить до множини $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, то дріб (1) перетворюється в частку многочленів.

Дріб (1) виникає при побудові розвинення відношення гіпергеометричних функцій Гауса

$$
\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} \tag{3}
$$

у ланцюговий дріб [2]. Нагадаємо [3], що гіпергеометрична функція Гауса визначається всередині круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ як сума гіпергеометричного ряду Гауса

$$
F(a,b,c;z) = {}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{4}
$$

де $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, $(\cdot)_n$ – символ Похгаммера:

$$
(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Для всіх $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, функція Гауса $F(a,b,c;z)$ є аналітичним розв'язком диференціального рівняння

$$
z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]\, y' - aby = 0 \tag{5}
$$

і справджує такі формули диференціювання:

$$
\frac{d^n F(a,b,c;z)}{dz^n} = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n, c+n; z), \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ c \notin \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}. \tag{6}
$$

При послідовному диференціюванні рівняння (5) на підставі формул (6) одержуються наступні рекурентні співвідношення

$$
w_n(z) = b_n(z) + \frac{a_{n+1}(z)}{w_{n+1}(z)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{7}
$$

де функції $a_n(z)$, $b_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, визначені рівностями (2), а

$$
w_n(z) = \frac{F(a+n, b+n, c+n; z)}{F(a+n+1, b+n+1, c+n+1; z)}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{8}
$$

Тоді з рівностей (7), (8) отримаємо, що

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} = b_0(z) + \cfrac{a_1(z)}{b_1(z) + \cfrac{a_2(z)}{\ddots + \cfrac{\ddots}{b_{n-1}(z) + \cfrac{a_n(z)}{w_n(z)}}}}, \quad n \geq 2.$$

Таким чином, дістаємо розвинення дробу (3) у неперервний дріб Нерлунда [2]

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} \sim b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(z)}{b_n(z)}. \tag{9}$$

Послідовність функцій

$$f_0(z) = b_0(z), \quad f_n(z) \equiv b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

називається послідовністю підхідних дробів дробу Нерлунда (1). Кажуть, що неперервний дріб (1) збігається (рівномірно) до функції $G(z)$ на множині M, якщо послідовність підхідних дробів (10) збігається (рівномірно) на M при $n \to \infty$ до $G(z)$. Цікавим є питання про те, для яких значень a, b, c, z дріб (1) збігається до відношення (3).

У роботі [2] встановлено, що для $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, дріб (1) збігається до відношення (3) на множині $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1/2\}$, а також для $z = 1/2$, якщо $\operatorname{Im}(a+b) < \operatorname{Re}(2c - a - b - 1)$.

У цій роботі результати робіт [2] вперше перенесено на випадок, коли параметри a, b, c, z неперервного дробу (1) є p-адичними числами, а збіжність послідовності підхідних дробів (1) розглядається у p-адичній нормі. Основними результатами цієї роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ *є такими, що*

$$|a|_p \neq |b|_p, \quad \min\{|a|_p, |b|_p\} > 1, \quad |c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}.$$

Тоді неперервний дріб Нерлунда (1) *рівномірно збігається в* p*-адичному крузі* $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < 1\}$.

Теорема 2. *Нехай* $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ *є такими, що*

$$|a|_p \neq |b|_p, \quad \min\{|a|_p, |b|_p\} > 1, \quad |c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p, |ab|_p\}.$$

Тоді неперервний дріб Нерлунда (1) *рівномірно збігається в* p*-адичному крузі* $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < p^{1/(1-p)}\}$ *до відношення* (3).

2. Основні поняття p-адичних чисел

Для доведення теорем 1 та 2 нагадаємо деякі поняття теорії p-адичних чисел [4]. На множині раціональних чисел p-адична норма (p — просте число) запроваджується за правилом

$$|0|_p = 0, \quad |x|_p = \frac{1}{p^{\,\mathrm{ord}_p x}}, \quad x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\},$$

де p-адичний ординал $\mathrm{ord}_p\, x$ числа $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ визначається рівністю

$$\mathrm{ord}_p\, x = \begin{cases} \max\{m \in \mathbb{Z}_+ : x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^m)\}, & \text{якщо } x \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0, \\ \mathrm{ord}_p\, a - \mathrm{ord}_p\, b, & \text{якщо } x = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

Поповнення поля $\mathbb{Q}$ за введеною p-адичною нормою називається полем p-адичних чисел, це поле позначається символом $\mathbb{Q}_p$. Для p-адичної норми виконується посилена нерівність трикутника, тобто

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Q}_p \qquad |x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

З цієї нерівності випливає *принцип рівнобедреного трикутника* [4] для поля $\mathbb{Q}_p$, який полягає у тому, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{Q}_p$ виконується альтернатива: або $|x|_p = |y|_p$, або

$$|x \pm y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}, \quad \text{якщо} \quad |x|_p \neq |y|_p.$$

3. Властивості елементів дробу Нерлунда

Встановимо властивості функцій $a_n(z)$, $n \geq 1$, $b_n(z)$, $n \geq 0$, визначених рівностями (2). Позначимо: $D(r) = \{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < r\}$, $r > 0$.

Лема 1. *Якщо* $|a|_p \neq |b|_p$, $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}$, *то для всіх* $z \in D(1)$ *виконуються рівності*

$$|a_n(z)|_p = |abc^{-2}|_p \cdot |z|_p, \ \ n \geq 1, \ \ \textit{та} \ \ |b_n(z)|_p = 1, \ \ n \geq 0.$$

Доведення. Оскільки $|n|_p \leq 1$ для довільного $n \in \mathbb{Z}$, то з принципу рівнобедреного трикутника і умов леми випливають рівності

$$\begin{gathered} |a + n|_p = |a|_p, \ \ |b + n|_p = |b|_p, \ \ |c + n|_p = |c|_p, \ \ n \in \mathbb{N}, \\ |a + b + 2n + 1|_p = |a + b|_p = \max\{|a|_p, |b|_p\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{11}$$

Враховуючи, що $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}$, з формул (2), (11) дістаємо, що для всіх $z \in D(1)$ виконуються співвідношення

$$|a_n(z)|_p = |abc^{-2}|_p \cdot |z|_p \cdot |1-z|_p = |abc^{-2}|_p \cdot |z|_p, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$|b_n(z)|_p = \max\left\{1, \frac{\max\{|a|_p, |b|_p\}}{|c|_p} \cdot |z|_p\right\} = 1, \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Лему доведено. □

4. Властивості чисельників і знаменників підхідних дробів

Знайдемо тепер p-адичні норми чисельників і знаменників підхідних дробів (10). Для цього зауважимо, що рекурентні послідовності функцій $\{A_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, які визначені за допомогою рівностей

$$\begin{cases} A_0(z) = b_0(z), & A_1(z) = a_1(z) + b_0(z)b_1(z), \\ B_0(z) = 1, & B_1(z) = b_1(z), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n(z) = b_n(z)A_{n-1}(z) + a_n(z)A_{n-2}(z), & n \geq 2, \\ B_n(z) = b_n(z)B_{n-1}(z) + a_n(z)B_{n-2}(z), & n \geq 2, \end{cases} \tag{12}$$

є чисельниками та знаменниками підхідних дробів (10), тобто

$$f_n(z) = A_n(z)/B_n(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лема 2. *Нехай* $|a|_p \neq |b|_p$, $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}$. *Якщо* $z \in D(1)$, *то*

$$|A_n(z)|_p = 1, \quad |B_n(z)|_p = 1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{13}$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції.

Рівність $|B_0(z)|_p = 1$ є очевидною. Оскільки $A_0(z) = b_0(z)$, $B_1(z) = b_1(z)$, то з леми 1 випливає, що $|A_0(z)|_p = 1$, $|B_1(z)|_p = 1$. З леми 1 для всіх $z \in D(1)$ отримуємо, що $|a_1(z)|_p = \left|abc^{-2}\right|_p |z|_p < 1 = |b_0(z)b_1(z)|_p$, тому, згідно з принципом рівнобедреного трикутника, $|A_1(z)|_p = |b_0(z)|_p |b_1(z)|_p = 1$. Таким чином, рівності (13) є істинними для $n = 0, 1$ і базу індукції встановлено.

Припустимо, що рівності (13) є істинними для всіх $n < k$, де $k \geq 3$. Тоді з леми 1 та припущення індукції випливає, що для $z \in D(1)$

$$|b_k(z)A_{k-1}(z)|_p = 1, \quad |a_k(z)A_{k-2}(z)|_p = \left|abc^{-2}\right|_p |z|_p < 1,$$

$$|b_k(z)B_{k-1}(z)|_p = 1, \quad |a_k(z)B_{k-2}(z)|_p = |a_k(z)|_p = \left|abc^{-2}\right|_p |z|_p < 1.$$

Враховуючи рекурентні співвідношення (12), з отриманих співвідношень на підставі принципу рівнобедреного трикутника дістаємо

$$|A_k(z)|_p = \max\{|b_k(z)A_{k-1}(z)|_p, |a_k(z)A_{k-2}(z)|_p\} = 1,$$

$$|B_k(z)|_p = \max\{|b_k(z)B_{k-1}(z)|_p, |a_k(z)B_{k-2}(z)|_p\} = 1,$$

тобто рівності (13) виконуються і для $n = k$. Отже, крок індукції встановлено і лему доведено. □

5. Збіжність послідовності підхідних дробів

Встановимо умови збіжності послідовності $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, визначеної формулою (10).

Лема 3. *Нехай* $|a|_p \neq |b|_p$, $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}$. *Якщо* $z \in D(1)$, *то для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(z) - f_{n-1}(z)|_p = |a_1(z)|_p \cdot \ldots \cdot |a_n(z)|_p. \tag{14}$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за n. За лемою 2, $|B_0(z)B_1(z)|_p = 1$, тому для $n = 1$ маємо

$$|f_1(z) - f_0(z)|_p = \left|\frac{A_1(z)}{B_1(z)} - \frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right|_p = \left|\frac{A_1(z)B_0(z) - A_0(z)B_1(z)}{B_0(z)B_1(z)}\right|_p =$$
$$= |a_1(z) + b_0(z)b_1(z) - b_0(z)b_1(z)|_p = |a_1(z)|_p.$$

Припустимо, що формула (14) є правильною для $n = k$, $k \geq 1$. Доведемо її істинність для $n = k + 1$. Дійсно, оскільки за лемою 2, $|B_n(z)|_p = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$|f_{k+1}(z) - f_k(z)|_p = \left|\frac{A_{k+1}(z)}{B_{k+1}(z)} - \frac{A_k(z)}{B_k(z))}\right|_p =$$
$$= \left|\frac{A_{k+1}(z)B_k(z) - A_k(z)B_{k+1}(z)}{B_k(z)B_{k+1}(z)}\right|_p =$$
$$= |A_{k+1}(z)B_k(z) - A_k(z)B_{k+1}(z)|_p.$$

Застосовуючи для функцій $A_{k+1}(z)$, $B_{k+1}(z)$ рекурентні співвідношення (12), згідно з припущенням індукції та лемами 1, 2, отримаємо, що

$$|f_{k+1}(z) - f_k(z)|_p = |b_{k+1}(z)A_k(z)B_k(z) + a_{k+1}(z)A_{k-1}(z)B_k(z) -$$
$$- b_{k+1}(z)A_k(z)B_k(z) - a_{k+1}(z)A_k(z)B_{k-1}(z)|_p =$$
$$= |a_{k+1}(z)(A_{k-1}(z)B_k(z) - A_k(z)B_{k-1}(z))|_p =$$
$$= |a_{k+1}(z)|_p|f_k(z) - f_{k-1}(z)|_p = |a_1(z)|_p \cdot \ldots \cdot |a_{k+1}(z)|_p.$$

Лему доведено. □

Із лем 1, 3 випливає *доведення теореми 1.* Дійсно, з умов теореми 1 на підставі лем 1, 3 отримуємо, що для довільних $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, і $z \in D(1)$ виконується оцінка

$$|f_n(z) - f_m(z)|_p \leq \max_{n+1 \leq j \leq m} |f_j(z) - f_{j-1}(z)|_p < (|abc^{-2}|_p |z|_p)^n < |abc^{-2}|_p^n.$$

Оскільки $|abc^{-2}|_p < 1$, то послідовність $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є фундаментальною, а отже, збіжною в $\mathbb{Q}_p$.

6. Збіжність послідовності підхідних дробів до відношення гіпергеометричних функцій

Із леми 3 випливає, що в крузі $D(1)$ існує функція $f : D(1) \to \mathbb{Q}_p$, яка є поточковою границею послідовності $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z).$$

Із леми 2 випливає, що насправді образ відображення f є підмножиною одиничного кола $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p = 1\}$. З'ясуємо, при яких вимогах на параметри $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ функція $f(z)$ дорівнює відношенню (3).

Лема 4. *Нехай* $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > |ab|_p$. *Якщо* $z \in D(p^{1/(1-p)})$, *то*

$$|F(a, b, c; z)|_p = 1.$$

Доведення. Добре відомо [4], що

$$\left|\frac{1}{n!}\right|_p \leq p^{n/(p-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

З формул (11), (15) отримаємо, що для всіх $n \geq 1$

$$\left|\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n\right|_p \leq \frac{|a|_p^n |b|_p^n p^{n/(p-1)}}{|c|_p^n} |z|_p^n < \frac{|a|_p^n |b|_p^n}{|c|_p^n}, \quad z \in D(p^{1/(1-p)}). \tag{16}$$

Оскільки $|c|_p > |ab|_p$, то з оцінок (16) випливає збіжність ряду (4), а з принципу рівнобедреного трикутника — рівність

$$|F(a, b, c; z)|_p = \max\left\{1; \sup_{n \geq 1} \left|\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n\right|_p\right\} = 1.$$

Лему доведено. □

Лема 5. *Нехай* $|a|_p \neq |b|_p$, $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p, |ab|_p\}$. *Якщо* $z \in D(p^{1/(1-p)})$, *то*

$$\left| f_n(z) - \frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} \right|_p = |a_1(z)|_p \cdot \ldots \cdot |a_{n+1}(z)|_p, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Доведення. Встановимо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} = \frac{a_{n+1}(z)A_{n-1}(z) + w_{n+1}(z)A_n(z)}{a_{n+1}(z)B_{n-1}(z) + w_{n+1}(z)B_n(z)}, \tag{18}$$

де функції $w_n(z)$ визначені рівностями (8). Використаємо метод математичної індукції за n. Для $n = 1$ маємо очевидну рівність

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} = b_0 + \frac{a_1(z)}{w_1(z)}.$$

Припустимо, що формула (18) є істинною для $n < k$. Доведемо її істинність для $n = k$. Оскільки за припущенням індукції

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} = \frac{a_k(z)A_{k-2}(z) + w_k(z)A_{k-1}(z)}{a_k(z)B_{k-2}(z) + w_k(z)B_{k-1}(z)},$$

а $w_k(z) = b_k(z) + \dfrac{a_{k+1}(z)}{w_{k+1}(z)}$ (див. формулу (7)), то

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} = \frac{a_k(z)A_{k-2}(z) + \left(b_k(z) + \frac{a_{k+1}(z)}{w_{k+1}(z)}\right) A_{k-1}(z)}{a_k(z)B_{k-2}(z) + \left(b_k(z) + \frac{a_{k+1}(z)}{w_{k+1}(z)}\right) B_{k-1}(z)} =$$
$$= \frac{a_{k+1}(z)A_{k-1}(z) + w_{k+1}(z)A_k(z)}{a_{k+1}(z)B_{k-1}(z) + w_{k+1}(z)B_k(z)},$$

тобто формула (18) виконується і для $n = k$. Таким чином, формула (18) є істинною для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Для доведення леми врахуємо, що з формули (18) випливає, що

$$\left| f_n(z) - \frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} \right|_p =$$
$$= \left| \frac{a_n(z)A_{n-2}(z) + b_n(z)A_{n-1}(z)}{a_n(z)B_{n-2}(z) + b_n(z)B_{n-1}(z)} - \frac{a_n(z)A_{n-2}(z) + w_n(z)A_{n-1}(z)}{a_n(z)B_{n-1}(z) + w_n(z)B_{n-1}(z)} \right|_p =$$
$$= \frac{|b_n(z) - w_n(z)|_p |f_{n-1}(z) - f_{n-2}(z)|_p |a_n(z)|_p}{|a_n(z)B_{n-2}(z) + b_n(z)B_{n-1}(z)|_p |a_n(z)B_{n-2}(z) + w_n(z)B_{n-1}(z)|_p}.$$

Оскільки, з леми 4 та формули (8) випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ $|w_n(z)|_p = 1$, то з лем 2, 3 та формули (7) отримуємо рівності (17).

Лему доведено. □

Із лем 1, 5 випливає *доведення теореми 2*, бо для довільних $n \in \mathbb{N}$, $z \in D(p^{1/(1-p)})$ виконуються співвідношення

$$\left| f_n(z) - \frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} \right|_p = (|abc^{-2}|_p |z|_p)^{n+1} < |abc^{-2}|_p^{n+1},$$

з яких випливає рівномірна збіжність послідовності функцій (10) до відношення (3), адже $|abc^{-2}|_p < 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. N.E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1924.
2. L. Lorentzen, H. Waadeland, *Continued fractions with applications*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1992.
3. W.B. Jones, W.J. Thron, *Continued Fractions. Analytic Theory and Applications*, Addison-Wesley Publ., 1980.
4. N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer-Verlag, NY, 1984.

Надійшло 24.12.2015

Після переробки 14.03.2016