ОПЕРАТОРИ КОМПОЗИЦІЇ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Андрій ЗАГОРОДНЮК[1], *Зоряна МОЖИРОВСЬКА*[2]

[1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018
[2]Львівська комерційна академія, вул. Тугана-Барановського 10, Львів 79005

e-mail: *andriyzag@yahoo.com, nzoriana@yandex.ru*

Редакція отримала статтю 15 березня 2011 р.

У роботі розглянуто оператор композиції на функціональних гільбертових просторах. Зокрема, встановлено умови, при яких оператор композиції буде гіперциклічним.

1 Вступ

Послідовність операторів $\{T_n : E \to E : n \in \mathbb{N}\}$ на просторі Фреше E називається *універсальною*, якщо існує деякий *універсальний* вектор $x \in E$ такий, що
$$\overline{\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}} = E.$$
Скажемо, що оператор T на E є *гіперциклічним*, якщо послідовність ітерацій $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ є універсальною, тобто T є гіперциклічним, якщо існує деякий вектор $x \in E$ з щільною орбітою
$$\overline{\mathrm{Orb}(T,x)} := \overline{\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}} = E.$$

УДК: 517.524; MSC 2000: 46A32, 47B33
Ключові слова і фрази: тензорні добутки операторів, оператори композиції, гіперциклічні оператори
Робота підтримана грантом ДФФД України № Ф35/531-2011

Вивчення гіперциклічних операторів розпочалося після відомого результату Біркгофа, який стверджує, що оператор композиції зі зсувом $x \mapsto x + a$, $a \neq 0$, $T_a : f(x) \mapsto f(x + a)$ є гіперциклічним у просторі цілих функцій $H(\mathbb{C})$ на комплексній площині $\mathbb{C}$. У роботі [1] доведено, що оператор композиції зі зсувом T_a є гіперциклічним у просторі аналітичних функцій, які є слабко неперервними і обмеженими на обмежених підмножинах сепарабельного банахового простору. Детальний опис гіперциклічних операторів можна знайти в [2].

Позначимо через $\{T_n : E \to E : n \in \mathbb{N}\}$ послідовність (неперервних і лінійних) операторів на сепарабельному просторі Фреше. Ми сформулюємо загальну достатню умову універсальності. Ця умова була встановлена в роботах [3], [4] і називається критерієм гіперциклічності. Ми скористаємось загальною формою цього критерію, яка записана в статті [5].

Означення 1. *Скажемо, що послідовність операторів $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій універсальності, якщо існують щільні підмножини X, Y з E і відображення $S_n : Y \to E$, $n \in \mathbb{N}$ такі, що*

i) $T_n x \to 0$, $n \to \infty$ *для всіх* $x \in X$,

ii) $S_n y \to 0$, $n \to \infty$ *для всіх* $y \in Y$,

iii) $(T_n \circ S_n)y \to y$, $n \to \infty$ *для всіх* $y \in Y$.

Оператор T на E задовольняє критерій гіперциклічності відносно зростаючої послідовності (n_k) додатних цілих чисел, якщо послідовність ітерацій $\{T^{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій універсальності.

Оператор T, які задовольняє критерій гіперциклічності, описаний в [5] як такий, що оператор $T \oplus T$ є гіперциклічним. Цей результат встановив еквівалентність між відомою проблемою Гереро [6], яка запитує: “Чи оператор $T \oplus T$ є гіперциклічним, якщо T є гіперциклічним оператором?” та цікавим питанням: “Чи кожен гіперциклічний оператор на сепарабельному просторі Фреше задовольняє критерій гіперциклічності?” Оскільки всі відомі “природні” гіперциклічні оператори задовольняють критерій гіперциклічності, розумно припустити, що відповідь має бути позитивною. Проте, у 2008 році ця проблема була розв’язана з негативною відповіддю Де Ла Роза та Рідом (див. [7]).

Зауваження 1. *(1) Нехай маємо послідовність операторів $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ і зростаючу послідовність додатних цілих чисел (n_k). Легко бачити, що якщо $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій універсальності, тоді $\{T_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ також задовольняє критерій універсальності. Існування універсальних векторів для $\{T_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ означає універсальність послідовності операторів $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(2) Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що щільні підмножини $X, Y \subset E$ є підпросторами і, що відображення S_n є лінійними.

Шапіро [8] сформулював іншу добру в застосуванні умову, яка відома як *Порівняльний принцип гіперциклічності*:

Якщо оператор $T : (E, \tau) \to (E, \tau)$ є таким, що існує щільний підпростір $F \hookrightarrow E$ і топологія τ' на F такі, що $T|_F : (F, \tau') \to (F, \tau')$ є гіперциклічним, тоді T є також гіперциклічним.

Розглянемо тепер умови, при яких тензорні добутки операторів є гіперциклічними.

Означення 2. *Скажемо, що послідовність операторів $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ на E задовольняє критерій тензорної універсальності, якщо існують щільні підмножини X та Y з E і відображення $S_n : Y \to E$, $n \in \mathbb{N}$ такі, що*

i) $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ *є обмеженою для кожного* $x \in X$,

ii) $\{S_n y\}_{n=1}^{\infty}$ *є обмеженою для кожного* $y \in Y$,

iii) $(T_n \circ S_n)y \to y$, $n \to \infty$ *для всіх* $y \in Y$.

Оператор T на E задовольняє критерій тензорної гіперциклічності відносно зростаючої послідовності додатних цілих чисел (n_k), якщо послідовність ітерацій $\{T^{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій тензорної універсальності.

Зауваження 2. *Подібно до зауваження* 1 *легко бачити, що якщо $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій тензорної універсальності і (n_k) є зростаючою послідовністю додатних цілих чисел, тоді $\{T_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ також задовольняє критерій тензорної універсальності. Також, не зменшуючи загальності, ми можемо вважати, що підмножини X та Y фактично є підпросторами з E і відображення S_n є лінійними.*

Повний опис тензорних добутків локально опуклих просторів можна знайти в роботі [9, Розділ 35]. Для заданої тензорної норми "a" (див. [9, Розділ II]) ми маємо відповідну локально опуклу топологію на тензорному добутку $G \otimes H$ двох локально опуклих просторів G та H. За властивістю метричного відображення для тензорних норм отримуємо, що оператор $T_1 \otimes T_2 : G_1 \otimes_a G_2 \to H_1 \otimes_a H_2$ є неперервним, якщо $T_1 : G_1 \to H_1$ та $T_2 : G_2 \to H_2$ є неперервними операторами між локально опуклими просторами (див. [9, 35.2]). Простір з топологією a позначатимемо через $G \otimes_a H$, а його поповнення через $G \widetilde{\otimes}_a H$.

Нам знадобиться теорема і наслідок, які були сформульовані і доведені Мартінез-Гіменезом та Перісом в роботі [10].

Теорема 1. *Нехай E та F — сепарабельні простори Фреше. Якщо послідовність операторів $\{T_n^1 : E \to E : n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій універсальності та послідовність операторів $\{T_n^2 : F \to F : n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє критерій тензорної універсальності, тоді*

$$\{T_n^1 \widetilde{\otimes} T_n^2 : E \widetilde{\otimes}_a F \to E \widetilde{\otimes}_a F : n \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє критерій універсальності і тому є універсальною для довільної тензорної норми a.

Наслідок 1. *Нехай E та F — сепарабельні простори Фреше, оператори $T : E \to E$, $R : F \to F$, такі, що T задовольняє критерій гіперциклічності і R задовольняє критерій тензорної гіперциклічності, тоді послідовність*

$$T \widetilde{\otimes} R : E \widetilde{\otimes}_a F \to E \widetilde{\otimes}_a F$$

є гіперциклічним для довільної тензорної норми a.

У цій статті ми доведемо гіперциклічність оператора композиції на функціональному гільбертовому просторі з тензорною структурою. Нагадаємо, що під оператором композиції ми розуміємо відображення $f \mapsto f \circ T$, де f — аналітична функція на банаховому просторі E, а T — деяке аналітичне відображення цього простору в себе.

2 Випадок абстрактного гільбертового простору

Нехай E — сепарабельний гільбертів простір і E^* — спряжений простір до E. Позначимо через $\otimes_s^n E$ симетричний алгебраїчний тензорний степінь простору E. Кожний елемент з $\otimes_s^n E$ зображається у вигляді скінченної суми елементів

$$x_1 \cdots x_n = x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_1, \ldots, x_n \in E$, а S_n — група підстановок на множині $\{1, \ldots, n\}$.

Нехай простір $\otimes_{s,h}^n E$ буде поповненням $\otimes_s^n E$ відносно гільбертової норми h. Тоді простір $\otimes_{s,h}^n E^*$ є топологічним підпростором простору $(\mathcal{P}(E^n), h)$ n-однорідних поліномів на E з гільбертовою нормою h.

Позначимо

$$W = \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n : \quad P_n \in \otimes_{s,h}^n E^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

— поповнення простору скінченних сум $\oplus_n (\mathcal{P}(E^n), h)$ відносно деякої гільбертової топології τ_h такої, що всі підпростори $\mathcal{P}(E^n)$ будуть замкненими в W.

Нехай $T : E \to E$ лінійний оператор на гільбертовому просторі E. Введемо оператор композиції $C_T(f) := f \circ T$.

Теорема 2. *Нехай E — гільбертів простір, E^* — сепарабельний спряжений простір і оператор $T : E \to E$ такий, що $T^* : E^* \to E^*$ задовольняє критерій гіперциклічності. Тоді, якщо оператор композиції*

$$C_T : (W, \tau_h) \to (W, \tau_h), \quad f \mapsto f \circ T$$

є неперервним на W, то C_T є гіперциклічним на просторі W.

Доведення. Позначимо

$$G := \{ f \in W : f(0) = 0, \quad P_n(f) \in \otimes_{s,h}^n E^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} \}.$$

Якщо $f \in G$, тоді $P_n(C_T(f)) = P_n(f) \circ T = (T^* \otimes \cdots \otimes T^*)(P_n(f)) \in \otimes_s^n E^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Розширення $\widetilde{\otimes}_{s,h}^n T^* =: T_n^*$ з $T^* \otimes \cdots \otimes T^*$ до $\widetilde{\otimes}_{s,h}^n E^* = \overline{\otimes_s^n E^*}^{\tau_h}$ задовольняє критерій гіперциклічності відносно послідовності (m_k) (незалежно від n), тому виконуються умови теореми 1. Отже, існують щільні підпростори $X_n, Y_n \subset \widetilde{\otimes}_{s,h}^n E^*$ і $S_{n,m_k} : Y_n \to \widetilde{\otimes}_{s,h}^n E^*$, $k \in \mathbb{N}$ такі, що T_n^*, X_n, Y_n і $\{S_{n,m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє критерій універсальності, $n \in \mathbb{N}$. Визначимо тепер щільні підпростори простору W

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\oplus_{k=1}^n X_k), \quad Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\oplus_{k=1}^n Y_k)$$

і відображення

$$S_{m_k} : Y \to W, \quad S_{m_k} := \oplus_{n\in\mathbb{N}} S_{n,m_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси легко бачити, що C_T, X, Y і $\{S_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови критерію гіперциклічності, тому C_T є гіперциклічним на W. $\square$

3 Гільбертів простір $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$

Нехай E — гільбертів простір з ортонормованою базою $e_1, \dots, e_n, \dots$ і скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Вектори $e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_n}^{k_n}$, $k_j \geq 0$, $k_1 + \dots + k_n = n$, $i_1 < \dots < i_n$, породжують лінійну базу в $\otimes_s^n E$. Скажемо, що гільбертів простір $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ з деякою нормою $\|\cdot\|_\eta$ є *(абстрактним) симетричним простором Фока над простором* E, якщо вектори 1, $e_{[i]}^{(k)} := e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_n}^{k_n}$ утворюють ортогональну базу в $\mathcal{F}$, де $n = |(k)| = 1, \dots, \infty$, $k_j \geq 0$, $i_1 < \dots < i_n$.

Очевидно, що норма $\|\cdot\|_\eta$ цілком визначається своїми значеннями на базових векторах. Отже, за набором $\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta$ довільних додатних чисел можна отримати різні симетричні простори Фока над E. Іншими словами, $\mathcal{F}(E)$ є поповненням простору

$$\mathbb{C} \oplus E \oplus \otimes_s^2 E \oplus \dots \oplus \otimes_s^n E \oplus \dots$$

відносно норми $\|\cdot\|_\eta$.

Визначимо норму на базових векторах $e_{[i]}^{(k)}$ наступним чином

$$\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_{\eta_E}^2 = \frac{k_1! \cdots k_n! n!}{(k_1 + \dots + k_n)!} = k_1! \cdots k_n!.$$

Нехай $(\otimes_s^n E, \|\cdot\|_{\eta_E})$ — поповнення простору $\otimes_s^n E$ по нормі $\|\cdot\|_{\eta_E}$. Позначимо через $\mathcal{F}_{\eta_E}$ — ℓ_2-суму просторів $\otimes_s^n E$. Задамо відображення $\eta_E : E \to \mathcal{F}_\eta$

$$\eta_E(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^{(2)} + \dots + \frac{1}{n!}x^{(n)} + \cdots,$$

$x \in E$.

Розглянемо функції на E, які визначаються формулою

$$f_w(x) = \langle \eta_E(x) \mid w \rangle, \tag{1}$$

для довільного елемента $w \in \mathcal{F}_{\eta_E}$. Можемо стверджувати, що $f_w(x)$ є аналітичною функцією на $\mathcal{F}_{\eta_E}$ для кожного $w \in \mathcal{F}_{\eta_E}$. Нехай $w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$, $w_n \in \otimes_s^n E$, тоді

$$P_n(x) = \langle \eta_E(x) \mid w_n \rangle = \frac{1}{n!} \langle x^{(n)} \mid w_n \rangle$$

буде n-однорідним поліномом на E і ряд

$$f_w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$$

буде розкладом функції f_w у ряд Тейлора. При цьому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \|w_n\|_{\eta_E}^2 = \|w\|_{\eta_E} < \infty.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$ простір аналітичних функцій, які визначаються формулою (1) з нормою $\|f_w\| := \|w\|_{\eta_E}$. Лінійна оболонка образу відображення $\eta_E(x)$ є щільною в $\mathcal{F}_{\eta_E}$ і тому кожен функціонал $\langle \cdot \mid w \rangle \in (\mathcal{F}_{\eta_E})^*$ породжує аналітичну функцію з $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$ за формулою (1) (див. [11]). Отже, $\mathcal{H}_{\eta_E}(E) = (\mathcal{F}_{\eta_E})^*$.

Наступна теорема показує, що кожний неперервний оператор C_T на $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$ є композицією з T, що має вигляд $T(z) = Az+Q$, де $A : E \to E$ лінійний оператор і $Q \in E$.

Теорема 3. *Нехай $T : E \to E$ — аналітичне відображення. Якщо оператор C_T неперервний на $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$, тоді $T(z) = Az+Q$, де $A : E \to E$ — лінійний оператор, $Q \in E$. Крім того, $\| A \| < 1$ і, якщо $\| A\zeta \| = \| \zeta \|$ для деякого $\zeta \in E$, тоді $(A\zeta \mid Q) = 0$.*

Доведення цієї теореми цілком аналогічне доведенню теореми для гільбертового простору Фока аналітичних функцій на $\mathbb{C}^n$, яке є в роботі [12].

З теореми 3 випливає, що на просторі $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$ немає неперервних гіперциклічних операторів композиції з лінійними операторами. Це також можна побачити у наступному прикладі.

Приклад 1. *Нехай $f \in \mathcal{H}_{\eta_E}(E)$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E$. Можемо записати*

$$f(x) = \langle \eta_E(x) | \omega \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{k} | \omega_k \rangle,$$

де $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_n} \alpha_{i_1\ldots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$, $\omega_k \in \otimes^k_{s,h} E$, *тобто*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1<\ldots<i_n} \alpha_{i_1\ldots i_k}(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \cdots (x, e_{i_n}).$$

Нехай T *— оператор зваженого зсуву вправо, тобто* $T(e_n) = \lambda e_{n+1}$, $|\lambda| > 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді* T^* *є оператором зваженого зсуву вліво, тобто* $T^*(e_n) = \lambda e_{n-1}$. *Розглянемо оператор композиції* C_T :

$$C_T(f)(x) = f(T(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1<\ldots<i_n} \alpha_{i_1\ldots i_k}(T(x), e_{i_1})(T(x), e_{i_2}) \cdots (T(x), e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1<\ldots<i_n} \alpha_{i_1\ldots i_k}(x, T^*(e_{i_1}))(x, T^*(e_{i_2})) \cdots (x, T^*(e_{i_n})) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1<\ldots<i_n} \alpha_{i_1\ldots i_k}(x, \lambda e_{i_1-1})(x, \lambda e_{i_2-1}) \cdots (x, \lambda e_{i_n-1}).$$

Отже, оператор композиції C_T *переводить базисні вектори* $e_{i_1} \cdots e_{i_n}$ *у* $\lambda^n e_{i_1} \cdots e_{i_n}$. *Як було зауважено, цей оператор композиції є розривним.*

Зауваження 3. *Якщо поповнити область визначення оператора* C_T *по нормі графіка, то на цьому щільному підпросторі простору* $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$ *оператор композиції* C_T *буде неперервним і гіперциклічним за теоремою* 2.

[1] *Aron R., Bès J.* Hypercyclic differentiation operators // Contemporary Math. – 1999. – **232**. – P. 39–46.

[2] *Bayart F., Matheron E.* Dynamics of linear operators. – New York: Cambridge Univ. Press, 2009. – 338 p.

[3] *Gethner R.M., Shapiro J.H.* Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – **100**, № 2. – P. 281–288.

[4] *Kitai C.* Invariant closed sets for linear operators. – Ph.D. Thesis, University of Toronto, 1982.

[5] *Bès J., Peris A.* Hereditarily hypercyclic operators // J. Func. Anal. – 1999. – **167**, № 1. – P. 94–112.

[6] *Herrero D.A.* Hypercyclic operators and chaos // J. Operator Theory. – 1992. – **28**, № 1. – P. 93–103.

[7] *De La Rosa M., Read C.J.* A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic // J. Oper. Theory. – 2009. – **62**, № 2. – P. 369–380.

[8] *Shapiro J. H.* Composition operators and classical function theory. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 223 p.

[9] *Defant A., Floret K.* Tensor norms and operator ideals. – Amsterdam: North-Holland, 1993. – 567 p.

[10] *Martìnez-Gimènez F., Peris A.* Universality and chaos for tensor products of operators // J. Approx. Theory. – 2003. – **124**. – P. 7–24.

[11] *Загороднюк А., Можировська З.* Гільбертові простори цілих функцій від нескінченної кількості змінних // Матем. вісник НТШ. – 2006. – **3**. – С. 44–55.

[12] *Carswell B., MacCluer B. D., Schuster A.* Composition operators on the Fock space // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2003. – **69**. – P. 871–887.

COMPOSITION OPERATORS ON A HILBERT SPACE

Andriy ZAGORODNYUK[1], *Zoryana MOZHYROVSKA*[2]

[1]Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine
[2]Lviv Commercial Academy,
10 Tuhan-Baranovsky Str., Lviv 79005, Ukraine
e-mail: *andriyzag@yahoo.com, nzoriana@yandex.ru*

In the paper we have considered composition operator on a function Hilbert spaces. In particular, we have established conditions under which composition operator is hypercyclic one.