РОЗВИТОК СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДУ ОСТРОГРАДСЬКОГО ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Віктор РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України
вул. Наукова 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 18 листопада 2003 р.

Розв'язано крайову задачу для бігармонічного рівняння і знайдено напружено-деформований стан прямокутної пластини, навантаженної на сторонах зусиллями. Виділено зовнішнє однорідне несамозрівноважене навантаження, для якого знайдено функцію напружень. Досліджено характеристичне рівняння для визначення власних значень і одержано власні функції. Самозрівноважений напружений стан подано у вигляді ряду за спеціально побудованими сен-венанівськими функціями, коефіцієнти якого знайдено з умови мінімуму інтеграла квадрату відхилення розв'язку від заданих граничних умов на сторонах пластини.

1. ВСТУП

Значні результати математичної фізики, отримані при розв'язуванні рівнянь із частинними похідними другого порядку, пов'язані із застосуванням спектрального методу Штурма–Ліувілля [1, 2]. Вперше ідеї методу Штурма–Ліувілля були сформульовані в роботі великого українського математика М.В.Остроградського [3], яка доповідалася у 1826 році в Паризькій Академії наук. В цій роботі вчений вперше розв'язав крайову задачу для коливання рідини у циліндричному резервуарі скінченної висоти. Звичайно, Фур'є раніше розглядав ряди за певними наборами функцій, проте ці функції він вибирав до розв'язування тієї чи іншої

УДК 539.3

крайової задачі. М.В.Остроградський же вперше запропонував побудову власних спектральних функцій в процесі інтегрування рівнянь із частинними похідними для тіл скінченних розмірів залежно від вигляду крайових умов. Внаслідок складності запропонованого методу і відсутності досліджень зі спеціальних функцій (за якими доводилося проводити розвинення в ряд), на той час не було можливості довести запропонований метод до отримання конкретних числових результатів. Як відомо, вся наукова діяльність ученого була спрямована на розв'язування практичних задач і отримання конкретних результатів, тому він надалі не розвивав запропонований метод. Робота [3] була мало доступною і не отримала подальшого розвитку. З огляду на це, розвинутий в статті спектральний метод розв'язування крайової задачі для еліптичного рівняння четвертого порядку пропоную назвати іменем Остроградського.

Запропонований метод реалізуємо при розв'язуванні крайової задачі для бігармонічного рівняння у прямокутній області. Така задача зустрічається в багатьох розділах математичної фізики [4, 5]. При певних граничних умовах така задача фізично буде відповідати плоскій задачі теорії пружності. Тому граничні умови і термінологію будемо використовувати із теорії пружності [4, 6].

Розглянемо плоску квазістатичну задачу для тонкої прямокутної пластини сталої товщини h, яка займає в плані прямокутну область $D = \{(x, y) \in [0, a] \times [-b, b]\}$. Для однорідного ізотропного матеріалу, за відсутності масових сил, така задача полягає у розв'язуванні бігармонічного рівняння

$$\nabla^2\nabla^2\Phi(x, y) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

де $\Phi(x, y)$– функція напружень [4, 6]. На контурі L прямокутника задані граничні умови в напруженнях

$$\sigma_n(x, y)|_L = \sigma_g|_L, \quad \tau_n(x, y)|_L = \tau_g|_L, \tag{2}$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_g, τ_g є кусково-неперервними функціями на контурі прямокутника L. Проблема знаходження напружено-деформованого стану (НДС) прямокутної пластини відома з середини XIX століття, проте вона й досі залишається науково і практично важливою та актуальною задачею [4–8]. У [5] наведено огляд літератури. В роботах [4, 7] відзначено, що основним математичним підходом при дослідженні цієї проблеми є метод розділення змінних. При застосуванні цього методу широко використовують підходи, які базуються на ідеях Г. Ляме і пов'язані з ідеями задачі Штурма–Ліувілля [8]. При безпосередньому застосуванні схеми Штурма–Ліувілля до розв'язування цієї проблеми цими підходами виникають значні проблеми математичного та обчислювального характеру [5]. А саме, не вдається побудувати систему власних ортонормованих функцій, пов'язаних з крайовою задачею, не розроблено методів, які дозволяють одночасно задовольнити дві граничні умови однією системою часткових розв'язків, не знайдено способу врахування крайового ефекту та ін.

Розв'язуванню крайової задачі для бігармонічного рівняння, а також розвитку ідей методу Штурма–Ліувілля, які вперше були висунуті в роботі [3], присвячується дана праця. У ній запропоновано розділення зовнішнього навантаження на основну (несамозрівноважену) і „збурену" (самозрівноважену) частини. Для несамозрівноваженого зовнішнього навантаження наведено функцію напружень у вигляді поліному. Напружений стан від навантаження (самозрівноваженого відносно окремої сторони прямокутника) внаслідок симетрії розділено на дві частини і подано у вигляді ряду за спеціально побудованими сен-венанівськими функціями. Модифіковано метод інтегральних моментів (див. також [9]). Запропоновано інтегральний метод оцінки точності одержаного розв'язку.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МЕТОДОМ РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ

Згідно з [6], нормальні та дотичні напруження подамо у вигляді

$$\begin{gathered} \sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y^2},\ \sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} = \tau(x,y) = -\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y}. \end{gathered} \tag{3}$$

Позначимо вершини прямокутника проти годиникової стрілки, починаючи від вершини (a, b), буквами A, B, C, D. Сторони між вершинами A і D, B і A і т.д. позначимо цифрами 1, 2, 3, 4. Розподілені нормальні та дотичні зовнішні навантаження σ_g, τ_g створюють на сторонах пластини відповідні нормальні T_j, дотичні Q_j зусилля і моменти M_j, $j = \overline{1,4}$, які задовольняють рівнянням рівноваги [6]. Пошук бігармонічної функції напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє граничним умовам (2), будемо послідовно зводити до простіших задач. Перше спрощення випливає із симетричності бігармонічного рівняння і прямокутної області відносно змінної y. Розглянемо граничні навантаження (2) як суму двох частин а) і б): а) парні відносно змінної y нормальні напруження, непарні — дотичні напруження, б) навпаки, непарні — нормальні, парні — дотичні напруження. Нижче будемо шукати розв'язок в цілому самозрівноваженої задачі а).

2.1. Розділення навантаження на несамозрівноважену і самозрівноважену частини. Внаслідок вибору задачі а) виконуються рівності $Q_1 = Q_3 = 0$, $M_1 = M_3 = 0$. Вісім силових факторів, які залишилися, позв'язані трьома рівняннями рівноваги. Поліномінальна функція напружень, яка може створювати такі силові фактори має вигляд

$$\Phi_0(x,y) = \frac{T_4}{2ha}x^2 + \frac{T_3}{4hb}y^2 + \frac{T_1 - T_3}{4ha^3b}\Big[y^2(3ax^2 - 2x^3) + \frac{1}{5}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3 \times \\ \times \left(x^2 - ax + 5b^2 - \frac{a^2}{4}\right)\Big] + + \frac{2M_4}{ha^3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3 + \\ + \frac{M_2 - M_4}{4ha^3b}\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}a^2\right]\left(x - \frac{a}{2}\right)(y + b). \quad (4)$$

Безпосереднім обчисленням можна перевірити, що $\Phi_0(x,y)$ задовольняє бігармонічне рівняння і створює задані узагальнені силові зусилля по сторонах пластини. Якщо підставити функцію (4) у вираз напружень (3), то знайдемо розподілені на контурі зусилля, які відповідають основному напруженому стану. Після виділення цих зусиль із граничних умов (2) залишається самозрівноважене („збурене") відносно кожної сторони пластини зовнішнє навантаження. Наступне спрощення знову полягає у розділенні на дві частини. Розглянемо нові граничні навантаження (2) як суму двох частин А) і Б): А) на горизонтальних сторонах $y = \pm b$ прямокутної пластини відсутні зовнішні навантаження, тобто

$$\sigma_y(x, \pm b) = 0, \quad \tau(x, \pm b) = 0, \quad x \in [0, a], \quad (5)$$

а на бокових сторонах $x = 0, x = a$ діють граничні навантаження (2); Б) навпаки, на бокових сторонах прямокутника відсутні зовнішні навантаження, на горизонтальних сторонах діють граничні навантаження (2).

Зауваження. Відзначимо, що таке розділення буде коректним тільки тоді, коли додатково виконуються локальні умови (дотичні навантаження дорівнюють нулеві в кутових точках прямокутної пластини). Інакше в кутових точках виконуються співвідношення $\tau_A = -\tau_D \neq 0$, $\tau_B = -\tau_C \neq 0$. У цьому випадку спочатку треба відняти зовнішні зусилля, які створює така бігармонічна функція

$$\Phi^{\sim}(x,y) = -\frac{\tau_B}{2hb}xy^2 - \frac{\tau_A - \tau_B}{12hab}(3x^2y^2 - x^4), \quad (6)$$

після чого одержуємо нульові дотичні напруження в кутових точках. Очевидно, що вилучення напруженого стану, який створює бігармонічна функція (6), необхідно проводити на початку обчислень. Як бачимо, при розділенні граничних умов на дві частини необхідно додатково перевіряти виконання певних інтегральних і локальних умов на межі прямокутника.

Враховуючи ідентичність задач А) і Б), нижче будемо шукати розв'язок сомозрівноваженої задачі А). Зовнішні навантаження в цій задачі також розділимо на дві частини: I) навантаження задане тільки на лівій стороні:

$$\sigma_x(0,y) = \sigma_1(y), \quad \tau(0,y) = \tau_1(y), \ \sigma_x(a,y) = 0, \quad \tau(a,y) = 0, \tag{7}$$

II) навантаження задане тільки на правій стороні пластини:

$$\sigma_x(0,y) = 0, \quad \tau(0,y) = 0, \quad \sigma_x(a,y) = \sigma_2(y), \quad \tau(a,y) = \tau_2(y), \tag{8}$$

де $\sigma_j(y), \tau_j(y) \in L_2[-b,b]$ і задовольняють коректні фізичні умови

$$\tau_j(\pm b) = 0, \quad |\sigma_j(y)| < \infty, \ |\tau_j(y)| < \infty, \ j = 1, 2. \tag{9}$$

Згідно з експериментом і відповідно до принципу Сен-Венана [6] „збурений" напружений стан швидко затухає при віддаленні від самозрівноважено навантаженої сторони пластини, отже, для його опису можна використовувати функції напружень, які швидко затухають.

Означення. *Будемо називати бігармонічну функцію напружень сен-венанівською, якщо виражені через неї за формулами* (3) *нормальні і дотичні напруження створюють на кожній стороні прямокутника нульові інтегральні нормальну* T_n *і зсувну* Q_t *сили та нульовий згинний момент* M_n*, і вона затухає при віддаленні від однієї „базової" сторони прямокутника.* Переформулюємо принцип Сен-Венана: *„Збурений" напружений стан пластини описується сен-венанівськими функціями.* Побудуємо такі функції.

2.2. Знаходження явного вигляду сен-венанівських функцій.

Означення. *Якщо функція напружень задовольняє нульові граничні умови* (5), *то її будемо називати власною функцією крайової задачі в напруженнях.*

Бігармонічна функція, яка задовольняє крайові умови (5) і затухає при віддаленні від сторони 3 має вигляд

$$\begin{aligned} &\Phi(x, \beta y) = \\ &= \mathrm{Re}\{[b\cos(\beta y) + a\sin(\beta y) + y(g\cos(\beta y) + c\sin(\beta y))]\exp(-\beta x)\}, \end{aligned} \tag{10}$$

де $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, a, g, c, b — невідомі комплексні коефіцієнти, а власні безрозмірні спектральні числа $z = b\beta$ знаходяться як корені характеристичного рівняння [5, 8, 10]

$$F(z) \equiv \sin(2z) + 2z = 0. \tag{11}$$

Теорема 1. *Функція $F(z)$ має зліченну кількість нулів $z_k = R\beta_k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. З означення порядку функції (див. [11]) випливає, що функція $F(z)$ є цілою функцією порядку 1. Приймемо $z = \sqrt{\zeta}$. Функція $F(\sqrt{\zeta})/\sqrt{\zeta}$ стосовно комплексної змінної ζ є функцією порядку $\frac{1}{2}$. Із теореми 5 із [11, с. 268] випливає твердження теореми 1.

Всі корені рівняння (11) (крім $z_0 = 0$, якому відповідає $\Phi_0(x, y)$) є комплексно-спряженими. Наведемо асимптотичні значення коренів рівняння (11)

$$\mathrm{Re}\, z_k = \frac{A_k}{4} - \frac{\ln A_k}{A_k} + O\left(\frac{\ln A_k}{A_k}\right)^2, \ \mathrm{Im}\, z_k \approx \frac{\ln A_k}{2} + \frac{\ln^2 A_k}{A_k^2} - 2\frac{\ln A_k}{A_k^2}, \tag{12}$$

де $A_k = \pi(4k - 1)$.

Розмістимо корені z_k, а, отже, і β_k в порядку зростання їхніх дійсних частин. Введемо безрозмірну змінну γ, $y = b\gamma$. Після підстановки функції напружень (10) у граничні умови (5) і використання рівняння (11) знайдемо явний вигляд власних функцій

$$\Phi_k(x, z_k\gamma) = \mathrm{Re}\{bg_k\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x\}, \tag{13}$$

де $\varphi_k(\gamma) = \gamma\sin(z_k\gamma) - tg(z_k)\cos(z_k\gamma)$, g_k – довільний комплексний коефіцієнт. Отже, розв'язування задачі зводиться до знаходження комплексних коефіцієнтів в наборі функцій (13), які задовольняли б у вигляді ряду граничні умови в напруженнях (7) на боковій стороні пластини. Підставляючи власні функції (13) у напруження (3), одержимо

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, \gamma) &= \mathrm{Re}\{bg_k\beta_k^2\varphi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\},\\
\sigma_x(x, \gamma) &= \mathrm{Re}\{bg_k\beta_k^2\chi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\},\\
\tau(x, \gamma) &= \mathrm{Re}\{bg_k\beta_k^2\psi_k(\gamma)\exp(-\beta_k x)\},
\end{aligned} \tag{14}$$

де $\chi_k(\gamma) = [\frac{1}{z_k} - \mathrm{ctg}(z_k)]\cos(z_k\gamma) - \gamma\sin(z_k\gamma)$, $\psi_k(\gamma) = -\mathrm{ctg}(z_k)\sin(z_k\gamma) + \gamma\cos(z_k\gamma)$. Легко перевірити наступні рівності: $\psi_k'(\gamma) = z_k\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(1) = \psi_k(-1) = 0$. Покажемо, що кожна власна функція (13) може описувати тільки самозрівноважений НДС.

Теорема 2. *Кожна власна функція напружень* (13) *є сен-венанівською.*

Доведення. Теорему доведемо безпосереднім обчисленням нормальної T_x і зсувної Q_x сил та згинного моменту M_x. Враховуючи значення $\sigma_x(x,\gamma)$ із (14), знайдемо інтегральне зусилля T_x, яке діє в довільному перерізі, паралельному до бокової сторони пластини

$$T_x = hb\int_{-1}^{1}\sigma_x(x,\gamma)d\gamma = hb\,\mathrm{Re}\{g_k\beta_k[\psi_k(1)-\psi_k(-1)]\exp(-\beta_k x)\} = 0,$$

бо $\psi_k(1) = \psi_k(-1) = 0$. Внаслідок парності напружень $\sigma_x(x,\gamma)$ за змінною γ одержимо, що $M_x = 0$, а внаслідок непарності дотичних напружень $\tau(x,\gamma)$ одержимо, що $Q_x = 0$. Отже, на вертикальних сторонах пластини умови виконуються. На горизонтальних сторонах сен-венанівська умова виконується внаслідок граничних умов (5). Власні функції експоненціально затухають при віддаленні від вертикальної сторони прямокутника. Теорему доведено.

Зроблене нами розбиття на дві задачі є обов'язковим. Для набору розв'язків (10), (13) виконується принцип Сен-Венана, оскільки в ці розв'язки входить експоненціально згасаюча функція від x. Згідно з теоремою 1, кількість власних функцій є злічена.

Теорема 3. *Система функцій* 1, $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$, $k \in \mathbb{N}$, *є повною крузі* $\{\gamma \in \mathbb{C} : |\gamma| \le 1\}$.

Доведення. Оскільки $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)-$ цілі функції порядку $\rho = 1$ і для послідовності нулів $z_k = R\beta_k$ виконується умова $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{k}{|z_k|} \le e$, і, крім того, $\mathrm{Re}\,z_1 < \pi$, то доведення теореми випливає із теореми 18 [12, с.283].

3. РОЗРАХУНОК „ЗБУРЕНОГО“ НДС „ДОВГОЇ“ ПЛАСТИНИ (ПАРНІ НАПРУЖЕННЯ σ_x, ЗАДАЧА „РОЗТЯГУ–СТИСКУ“)

Припустимо, що пластина за змінною x є достатньо „довгою“, тобто такою, що зовнішні „збурені“ зусилля прикладені до сторони пластини ($x = 0$) практично не викликають появи „збуреного“ НДС біля протилежної сторони. Це виконується, коли $a >> b$ і таку пластину будемо називати „довгою“. Щоб задовольнити граничні умови (7), функцію напружень подамо у вигляді ряду за сен-венанівськими функціями

$$\Phi(x,\gamma) = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{g_k \varphi_k(\gamma) \exp(-\beta_k x)\}, \tag{15}$$

де $\mathrm{Re}(\beta_k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Комплексний коефіцієнт g_k має дві незалежні невідомі — дійсну і уявну частини комплексного коефіцієнта g_k, що дає змогу одночасно задовольнити дві граничні умови.

Наведемо перших 6 коренів рівняння (11) [10]:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2,106196 + 1,125364i, & z_2 &= 5,356268 + 1,551574i,\\ z_3 &= 8,536668 + 1,775543i, & z_4 &= 11,69918 + 1,929404i,\\ z_5 &= 14,85406 + 2,046851i, & z_6 &= 18,00493 + 2,141890i, \end{aligned}$$

де i — уявна одиниця. Для знаходження коренів при $k > 6$ можна використати асимптотичну формулу (12). Враховуючи числові значення коренів $z_k = b\beta_k$, бачимо, що функція напружень (15) швидко спадає за змінною x, відповідно спадає і НДС, який описується нею. До того ж, при збільшенні номера власні функції швидко спадають при віддаленні від торця. Наприклад, функція Φ_1 зменшується у 100 разів на відстані $x \geqslant 2.2\,b$, а Φ_2 — на відстані $x \geqslant 0.85\,b$. Отже, вже при $a > 2.2\,b$ пластину можна розраховувати як „довгу“. Таке швидке спадання НДС пояснює принцип Сен-Венана.

Використовуючи співвідношення (3), (15), подамо перші дві граничні умови (7) у вигляді

$$\sigma_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{(x_k + iy_k)\chi_k(\gamma)\}, \tau_1(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{(x_k + iy_k)\psi_k(\gamma)\}, \tag{16}$$

де $x_k + iy_k = c_k = \frac{z_k^2 g_k}{b}$, x_k, y_k- дійсна і уявна частини комплексного коефіцієнта c_k.

Відзначимо, що дві останні граничні умови (7) виконуються з високою точністю, бо величину $|\exp(-\beta_k a)|$ можна зробити як завгодно малою.

Проблема. *Дослідити умови, при яких зображення* (16) *є справедливим, побудувати конструктивний алгоритм знаходження коефіцієнтів* x_k, y_k.

Не зупиняючись на строгому доведенні першої частини цієї проблеми, розробимо метод знаходження коефіцієнтів.

3.1. Мінімізація інтеграла квадрату відхилення розв'язку від заданих граничних умов.

Для знаходження невідомих дійсних коефіцієнтів x_k, y_k, а, отже, і комплексних коефіцієнтів g_k модифікуємо метод інтегральних моментів [1, 9]. Обмежимося у співвідношеннях (15), (16) скінченною кількістю N членів ряду. Оскільки окремі члени ряду (15) є розв'язками бігармонічного рівняння, а, отже, і плоскої задачі, то досить знайти невідомі коефіцієнти з умови мінімуму граничного відхилення знайденого розв'язку від зовнішніх навантажень (7) для скінченної кількості N членів ряду. Відзначимо, що граничні умови на горизонтальних сторонах пластини задовольняються тотожньо. Виділимо у функцій $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$ дійсну і уявну частини

$$\chi_k(\gamma) = \chi_{rk}(\gamma) + i\chi_{yk}(\gamma), \quad \psi_k(\gamma) = \psi_{rk}(\gamma) + i\psi_{yk}(\gamma).$$

Мірою наближення нашого розв'язку є інтеграл квадратичного відхилення знайдених напружень (16) від заданих зовнішніх зусиль на бокових сторонах (7)

$$\Psi\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\} = \int\limits_0^1 \Big\{ \Big(\sum_{k=1}^N (x_k\chi_{rk}(\gamma) - y_k\chi_{yk}(\gamma)) - \sigma_1(b\gamma)\Big)^2 + \\ + \Big(\sum_{k=1}^N (x_k\psi_{rk}(\gamma) - y_k\psi_{yk}(\gamma)) - \tau_1(b\gamma)\Big)^2 \Big\} d\gamma. \tag{17}$$

Дійсні x_k і уявні y_k частини комплексних коефіцієнтів c_k визначимо з умови мінімуму функціонала (17). Для цього знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial\Psi\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\}}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial\Psi\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\}}{\partial y_j}$, $j=\overline{1,N}$, і прирівняємо їх до нуля. В результаті обчислень отримаємо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення $2N$ невідомих x_k, y_k, $k=\overline{1,N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \{x_k B^1_{k,j} - y_k B^2_{k,j}\} = \int\limits_0^1 [\sigma_1(\gamma)\chi_{rj}(\gamma) + \tau_1(\gamma)\psi_{rj}(\gamma)] d\gamma,\ j=\overline{1,N}, \\ \sum_{k=1}^N \{x_k B^3_{k,j} - y_k B^4_{k,j}\} = \int\limits_0^1 [\sigma_1(\gamma)\chi_{yj}(\gamma) + \tau_1(\gamma)\psi_{yj}(\gamma)] d\gamma,\ j=\overline{1,N}, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\begin{aligned} & B^1_{k,j} = \mathrm{Re}(N_{k,j}),\ \ B^2_{k,j} = \mathrm{Im}(N_{k,j}),\ \ B^3_{k,j} = B^2_{j,k},\ \ B^4_{k,j} = \mathrm{Re}(A_{k,j}), \\ & N_{k,j} = P_1(k,j) + Q_1(k,j),\ \ A_{k,j} = P_2(k,j) + Q_2(k,j), \\ & 2P_m(k,j) = D(z_k,\overline{z}_j) + (-1)^{m+1} D(z_k,z_j), \\ & 2Q_m(k,j) = M(z_k,\overline{z}_j) + (-1)^{m+1} M(z_k,z_j), \quad m=1,2. \end{aligned}$$

Функції $M(z,w)$, $D(z,w)$ для значень аргументів $z \neq w$, знаходяться за формулами:

$$M(z,w) = m(z)m(w)F_{1,1}(z,w) - m(z)G(w,z) - m(w)G(z,w) + F_{0,3}(z,w),$$
$$D(z,w) = n(z)n(w)F_{0,1}(z,w) - n(z)G(z,w) - n(w)G(w,z) + F_{1,3}(z,w),$$

де

$$m(z) = \mathrm{ctg}(z), \quad n(z) = \frac{1}{z} - \mathrm{ctg}(z),$$
$$F_{0,1}(z,w) = W(z,w)[z\sin(z)\cos(w) - w\sin(w)\cos(z)],$$
$$G(z,w) = W(z,w)[z\sin(z)\sin(w) + w\cos(w)\cos(z)]+$$
$$+W^2(z,w)[(z^2+w^2)\cos(z)\sin(w) - 2zw\cos(w)\sin(z)],$$
$$W(z,w) = \frac{1}{z^2-w^2},$$
$$F_{0,3}(z,w) =$$
$$= F_{0,1}(z,w) + \frac{\cos(z+w)}{(z+w)^2} + \frac{\cos(z-w)}{(z-w)^2} - \frac{\sin(z+w)}{(z+w)^3} - \frac{\sin(z-w)}{(z-w)^3},$$
$$F_{1,3}(z,w) =$$
$$= F_{1,1}(z,w) - \frac{\cos(z+w)}{(z+w)^2} + \frac{\cos(z-w)}{(z-w)^2} + \frac{\sin(z+w)}{(z+w)^3} - \frac{\sin(z-w)}{(z-w)^3},$$
$$F_{1,1}(z,w) = W(z,w)[w\sin(z)\cos(w) - z\sin(w)\cos(z)].$$

За цими ж формулами знаходяться також функції $M(z_k,\overline{z}_j)$, $D(z_k,\overline{z}_j)$ для всіх значень індексів k,j. Коефіцієнти $D(z_k,z_k)$, $M(z_k,z_k)$ знаходяться за формулами:

$$D(z_k,z_k) = \frac{3}{2}\mathrm{ctg}^2(z_k) + \frac{7}{6}, \quad M(z_k,z_k) = -\frac{1}{3} - \frac{\mathrm{ctg}(z_k)}{2z_k}.$$

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь (18) чисельними методами, одержимо дійсні коефіцієнти x_k, y_k , а, отже, і комплексні коефіцієнти g_k, $k = 1,2,\ldots,N$. Знайдемо інтеграл квадратичного відхилення $\Psi\{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\}$ (17) і порівняємо його з інтенсивністю дії зовнішнього навантаження

$$\Psi_0 = \int_0^1 \Big(\sigma_1(b\gamma)^2 + \tau_1(b\gamma)^2\Big)d\gamma.$$

Якщо відносне значення буде меншим, ніж 0.001, то роз'язок знайдено. Якщо ж відносне значення більше, ніж 0.001, то збільшуємо кількість N членів ряду і повторно проводимо обчислення. Далі за формулами (3), (15) знайдемо НДС пластини.

4. РОЗРАХУНОК „ЗБУРЕНОГО“ НДС ПЛАСТИНИ ДОВІЛЬНИХ РОЗМІРІВ (ЗАДАЧА „РОЗТЯГУ–СТИСКУ“)

Функцію напружень в цьому випадку подамо у вигляді такого ряду за власними функціями

$$\Phi(x,\gamma) = b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{[g_k \exp(-\beta_k x) + q_k \exp(\beta_k(x-a))]\, \varphi_k(\gamma)\}, \qquad (19)$$

де g_k, $q_k, k \in \mathbb{N}, -$ невідомі комплексні коефіцієнти. Граничні умови (7), (8) після об'єднання і використання подання функції напружень (19) набувають вигляду

$$\sigma_m(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{z_k^2[g_k \exp(-\beta_k(m-1)) + q_k \exp(\beta_k(m-2)a)]\chi_k(\gamma)\},$$

$$\tau_m(b\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{z_k^2[g_k \exp(-\beta_k(m-1)) - q_k \exp(\beta_k(m-2)a)]\psi_k(\gamma)\}, \quad (20)$$

де $m = 1, 2$. Обмежимося у співвідношеннях (19), (20) скінченною кількістю N членів ряду. Введемо нові позначення невідомих $x_k + iy_k = z_k^2 g_k$, $x_{k+N} + iy_{k+N} = z_k^2 q_k$, $k = \overline{1, N}$. Для знаходження дійсних невідомих коєфіцієнтів x_k, y_k, $k = \overline{1, 2N}$ використаємо метод нтегральних моментів. Запишемо інтеграл квадратичного відхилення знайдених напружень (20) від заданих зовнішніх зусиль на бокових сторонах

$$\Psi\{x_1, \ldots, x_{2N}, y_1, \ldots, y_{2N}\} =$$

$$= \int_0^1 \Big\{ \sum_{m=1}^{2} \Big\{ \Big\{ \sum_{k=1}^{N} [x_k \chi_{rk}^m(\gamma) - y_k \chi_{yk}^m(\gamma)] - \sigma_m(b\gamma) \Big\}^2 +$$

$$+ \Big\{ \sum_{k=1}^{N} [x_k \psi_{rk}^m(\gamma) - y_k \psi_{yk}^m(\gamma)] - \tau_m(b\gamma) \Big\}^2 \Big\} \Big\} d\gamma, \qquad (21)$$

де $\chi_k^m(\gamma) = \chi_{rk}^m(\gamma) + i\chi_{yk}^m(\gamma)$, $\psi_k^m(\gamma) = \psi_{rk}^m(\gamma) + i\psi_{yk}^m(\gamma)$, а $\chi_{rk}^m(\gamma)$, $\psi_{rk}^m(\gamma) -$ дійсні, $\chi_{yk}^m(\gamma)$, $\psi_{yk}^m(\gamma) -$ відповідні уявні частини, що мають значення

$$\chi_k^m(\gamma) = \chi_k(\gamma) \exp(\beta_k(1-m)a), \;\; \chi_{k+N}^m(\gamma) = \chi_k(\gamma) \exp(\beta_k(m-2)a),$$

$$\psi_k^m(\gamma) = \psi_k(\gamma) \exp(\beta_k(1-m)a), \;\; \psi_{k+N}^m(\gamma) = -\psi_k(\gamma) \exp(\beta_k(m-2)a),$$

де $k=\overline{1,N}$. Як і в пункті 2, в результаті отримаємо систему $4N$ лінійних рівнянь для визначення $4N$ дійсних невідомих x_k, y_k, $k=\overline{1,2N}$:

$$\sum_{k=1}^{2N}\{x_kV^1_{k,j}-y_kV^2_{k,j}\}=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^1[\sigma_m(\gamma)\chi^m_{rj}(\gamma)+\tau_m(\gamma)\psi^m_{rj}(\gamma)]d\gamma,$$

$$\sum_{k=1}^{2N}\left\{x_kV^2_{j,k}-y_kV^4_{k,j}\right\}=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^1\left[\sigma_m\left(\gamma\right)\chi^m_{yj}\left(\gamma\right)+\tau_m\left(\gamma\right)\psi^m_{yj}\left(\gamma\right)\right]d\gamma, \qquad (22)$$

де $j=\overline{1,2N}$, а коефіцієнти $V^m_{k,j}$ для значень індексів $k,j\leqslant N$; $k,j\geqslant N$, знаходяться за формулами:

$$V^1_{k,j}=(1+V_kV_j)B^1_{k,j}-V_kW_jB^2_{j,k}-W_kV_jB^2_{k,j}+W_kW_jB^4_{k,j},$$

$$V^2_{k,j}=(1+V_kV_j)B^2_{k,j}-W_kW_jB^2_{j,k}-W_jV_kB^4_{k,j}+W_kV_jB^1_{k,j},$$

$$V^4_{k,j}=(1+V_kV_j)B^4_{k,j}+V_jW_kB^2_{j,k}+W_jV_kB^2_{k,j}+W_kW_jB^1_{k,j},$$

а для значень індексів $k\geqslant N$, $j<N$; $j\geqslant N$, $k<N$, маємо

$$V^1_{k,j}=(V_k+V_j)E^1_{k,j}-W_jE^2_{j,k}-W_kE^2_{k,j},$$

$$V^2_{k,j}=(V_k+V_j)E^2_{k,j}-W_jE^4_{k,j}+W_kE^1_{k,j},$$

$$V^4_{k,j}=(V_k+V_j)E^4_{k,j}+W_kE^2_{j,k}+W_jE^2_{k,j}.$$

Коефіцієнти $B^m_{n,l}$, $E^m_{n,l}$, V_l, W_l для значень індексів $n\geqslant N, l\geqslant N$ обчислюються за формулами:

$$B^m_{k+N,j+N}=B^m_{k,j},\ E^m_{k,j+N}=E^m_{k+N,j}=E^m_{k,j},\ V_{k+N}=V_k,\ W_{k+N}=W_k,$$

де $m=\overline{1,4}$, а

$$V_k=\mathrm{Re}(\exp(-\beta_ka)),\ W_k=\mathrm{Im}(\exp(-\beta_ka)),\ E^1_{k,j}=\mathrm{Re}(P_1(k,j)-Q_1(k,j)),$$

$$E^2_{k,j}=\mathrm{Im}(P_1(k,j)-Q_1(k,j)),\ E^4_{k,j}=\mathrm{Im}(P_2(k,j)-Q_2(k,j)).$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (20) числовим методом і знайдемо дійсні коефіцієнти x_k, y_k, $k=\overline{1,2N}$, а, отже, й комплексні коефіцієнти g_k, q_k, $k=\overline{1,N}$. Знайдемо інтеграл квадратичного відхилення

$\Psi\{x_1, \ldots, x_{2N}, y_1, \ldots, y_{2N}\}$ (21) і порівняємо його з інтенсивністю дії зовнішнього навантаження

$$\Psi_0 = \int\limits_0^1 \sum_{m=1}^{2} \left[\sigma_m^2 (b\gamma) + \tau_m^2 (b\gamma)\right] d\gamma.$$

Якщо відносне значення буде менше, ніж 0.001, то роз'язок знайдено. Якщо відносне значення більше, ніж 0.001, то збільшуємо кількість N членів ряду і повторно проводимо обчислення. Далі за формулами (3), (19) знайдемо „збурений" НДС пластини.

ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

1. Узагальнено спектральний метод Штурма–Ліувілля інтегрування рівнянь другого порядку до розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння. Запропонований метод можна розвинути і використати при інтегруванні рівнянь із частинними похідними четвертого і вищих порядків.

2. Плоский НДС пластини можна розділити на два напружених стани: основний, який описується поліноміальною функцією напружень і „збурений", який описується сен-венанівськими функціями. Для того, щоб розділення граничних умов на дві частини було коректним, кожна із виділених частин повинна задовольняти інтегральні і локальні умови (умови рівноваги та рівність дотичних напружень в кутових точках).

3. Як приклад застосування цього методу, розроблено алгоритми розрахунку НДС прямокутної ізотропної пластини для довільного силового навантаження (задача „розтягу-стиску"). Запропоновано регуляризацію розв'язку цієї задачі шляхом виділення основного НДС і самозрівноваженої частини, яка має локальний характер. Знайдено подання функції напруження самозрівноваженого напруженого стану у вигляді ряду. Показано, що компоненти цього ряду створюють на кожній стороні прямокутної пластини нульові інтегральні нормальну і зсувну сили та згинний момент. Цей алгоритм можна розвинути і використати при розв'язуванні задачі „згину" прямокутної пластини.

4. Розроблено інтегральний метод визначення комплексних коефіцієнтів ряду, який базується на методі моментів і принципу найменших

квадратів. Знайдено в явному вигляді коефіцієнти матриці лінійної системи рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів ряду. Запропонований метод розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння є узагальненням схеми Штурма–Ліувілля інтегрування рівнянь із частинними похідними другого порядку, оскільки при його застосуванні до рівняння другого порядку він співпадає з методом Штурма–Ліувілля [1]. Цей метод можна розвинути і використати при розв'язуванні мішаних крайових задач.

5. Запропоновано метод розрахунку пластини довільних розмірів. Показано, що компоненти НДС прямокутної пластини будь-яких розмірів виражаються через введені власні функції. Пояснено принцип Сен-Венана.

[1] *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. – М.: Наука, 1983. – 432 с.

[2] *Курант З., Гильберт Д.* Методы математической физики. – М.–Л.: Гос. изд.-во техн.-теорет. лит., 1951. – Т. I.– 476 с. – Том II.– 546 с.

[3] *Остроградский М. В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне. (Доложен в Парижской Академии 6 ноября 1826 г.)// Полное собрание трудов.– К.: Изд-во АН УССР, 1959. – Т.1. – С. 7–22.

[4] *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных розмеров.– К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.

[5] *Meleshko V. V.* Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. Vol. 56, No 1. (January 2003) P. 33–85.

[6] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

[7] *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – В 3-х т.– Равновесие упругих тел канонической формы. Т. 3. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.

[8] *Прокопов В. К.* Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. – Труды II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела. –М.: Наука, 1966. – С. 253–260.

[9] *Ревенко В. П.* Спектральна задача осесиметричної теорії пружності // Вісник Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003.– вип. 61. – С. 249–258.

[10] *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.

[11] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций.– В 2-х т.: Дальнейшее построение теории. – Т. 2. – М.: Наука, 1968. – 624 с.

[12] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.

SPECTRAL METHOD TO INTEGRATION OF BIHARMONIC EQUATION IN RECTANGULAR DOMAIN

Victor REVENKO

Pidstryhach Instytute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

A biharmonic equation is solved and the stress-strain state (SSS) of a rectangular plate loaded on the sides by arbitrary efforts is defined. A characteristic equation is solved and eigenfunctions are defined. An SSS representation is obtained for arbitrary external loading in the form of series in eigenfunctions. A method of integral moments is proposed to define the series coefficients. The Saint-Venan principle is verified.