ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ТИПУ ХИЖАК-ЖЕРТВА

©2011 р. Василь ДАВИДОВИЧ

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ 01601

e-mail: *davydovych@imath.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 13 вересня 2011 р.

Досліджується нова нелінійна система реакції-дифузії для моделювання взаємодії типу хижак-жертва. Для системи встановлено максимальну алгебру інваріантності, що дозволило провести її редукцію до систем звичайних диференціальних рівнянь та знайти широкі класи точних розв'язків вихідної нелінійної системи. Також запропоновано метод узагальнення отриманих розв'язків та наведено властивості і біологічну інтерпретацію деяких з них.

1 Вступ

Протягом останніх десятиліть відбувається значне зростання кількості робіт, присвячених моделюванню процесів які відбуваються в живій природі. При дослідженні екосистем важлива роль приділяється питанню конкуренції видів. З цією метою, починаючи з класичних робіт А. Лотки [1] і В. Вольтера [2], було запропоновано багато моделей (див., напр., [3, 4]).

Нещодавно в роботі [5] було запропоновано нову модель для опису екологічних систем, у яких взаємодіє велика кількість видів тварин

УДК: 517.957; MSC 2000: 35K57

Ключові слова і фрази: система реакції-дифузії, симетрія Лі, точний розв'язок

та рослин. Модель ґрунтується на нелінійній системі звичайних диференціальних рівнянь. Тут ми розглядаємо узагальнення цієї системи для випадку врахування дифузії у просторі, але обмежуємося двома видами, тобто систему

$$
\begin{aligned}
U_t &= d_1 U_{xx} + U\Big(- a_1 + b_1 \big(\tfrac{V}{U}\big)^{\lambda}\Big),\\
V_t &= d_2 V_{xx} + V\Big(a_2 - b_2 \big(\tfrac{U}{V}\big)^{1-\lambda}\Big),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де a_k, b_k, d_k – довільні додатні сталі, $k = 1, 2$; $0 < \lambda < 1$; $U = U(t, x)$ – концентрація популяції хижаків, $V = V(t, x)$ – концентрація популяції жертв. Модель (1) характеризує взаємодію популяцій типу хижак-жертва, і є нетривіальною модифікацією класичної системи Лотки-Вольтера

$$
\begin{aligned}
U_t &= d_1 U_{xx} + U\big(- a_1 + b_1 V\big),\\
V_t &= d_2 V_{xx} + V\big(a_2 - b_2 U\big).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Особливістю системи (1) є те, що вона інваріантна відносно масштабних перетворень розміру обох популяцій

$$U = \epsilon u,\ V = \epsilon v,$$

де $\epsilon > 0$ – довільна стала.

Знерозміривши систему (1) заміною

$$U \to u,\ V \to \Big(\frac{b_1}{a_1}\Big)^{\frac{1}{\lambda}} v,\ x \to \sqrt{\frac{d_1}{a_1}}\ x,\ t \to \frac{1}{a_1}\ t,$$

отримуємо систему

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - u + u^{1-\lambda} v^{\lambda},\\
v_t &= d v_{xx} + a v - b u^{1-\lambda} v^{\lambda},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

де $d = \frac{d_2}{d_1},\ a = \frac{a_2}{a_1},\ b = \frac{b_2}{a_1}\Big(\frac{b_1}{a_1}\Big)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Очевидно, що стаціонарними точками системи (3) будуть всі точки прямої $u = v$ при $a = b$, та єдина точка (0;0) при довільних a та b. Провівши нескладні обчислення (див., напр., [6]), визначили, що точка (0;0) – сідлова точка (нестійка стаціонарна точка). Тип точок прямої $u = v$ залежить від значення параметрів системи. Зокрема при $\lambda >$

$\frac{a}{a+1}$ всі точки прямої $u = v$, окрім (0;0), є стійкими вузлами, а при $\lambda < \frac{a}{a+1}$ – нестійкими вузлами. На відміну від системи (3), класична система Лотки-Вольтера (2) має дві стаціонарні точки, тип яких не залежить від значення параметрів, а саме: (0;0) – сідлова точка, $(\frac{a_2}{b_2}; \frac{a_1}{b_1})$ – центр. Цей факт вказує на те, що системи (2) та (3) мають суттєво різні властивості, тому по-різному описують взаємодію видів.

Робота побудована таким чином. У другому пункті проаналізовано максимальну алгебру інваріантності (МАІ) системи (3). Зокрема встановлено, що структура МАІ залежить лише від значення коефіцієнта d досліджуваної системи. На основі отриманих операторів проведено редукцію системи реакції-дифузії (РД) (3) до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).

У третьому пункті побудовано точні розв'язки системи (3). У четвертому пункті знайдено розв'язки, які є узагальненням отриманих розв'язків, встановлено їх основні властивості, та наведено можливу інтерпретацію.

2 Максимальна алгебра інваріантності

Система (3) належить до класу систем рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + c^1(u,v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + c^2(u,v), \end{aligned} \tag{4}$$

які, як відомо, описують велику кількість процесів в біології [3, 4] та фізиці [7]. В більшості випадків функції c^k $(k = 1, 2)$ є нелінійними, що негайно веде до того, що система (4) є неінтегровною [8]. Тому важливим є застосування методів, які дають змогу будувати точні розв'язки таких систем. Одним з ефективних методів є використання симетрії Лі [9] для знаходження розв'язків. Незважаючи на те, що пошук симетрій Лі систем рівнянь РД був ініційований давно [10], вичерпний опис всеможливих симетрій (4) було завершено лише в останнє десятиріччя [11]–[15].

Для знаходження МАІ системи (3) застосуємо висліди робіт [12, 13].

Теорема 1. *У випадку $d = 1$ МАІ системи (3) є алгеброю Ґалілея $AG(1.1) = \langle P_t, P_x, I, G\rangle$, з базовими операторами $P_t = \partial_t,\ P_x = \partial_x,\ I = u\partial_u + v\partial_v,\ G = -2t\partial_x + x(u\partial_u + v\partial_v)$.*

При $d \neq 1$ система рівнянь РД (3) інваріантна відносно тривимірної МАІ з базовими операторами P_t, P_x, I.

Проведемо редукцію системи (3) до систем ЗДР, використовуючи найзагальніший вигляд операторів інваріантності

$$X = \alpha_0\partial_t + \alpha_1\partial_x + \alpha_2 u\partial_u + \alpha_2 v\partial_v \tag{5}$$

при $d \neq 1$;

$$X = \alpha_0\partial_t + (-2\alpha_3 t + \alpha_1)\partial_x + (\alpha_3 x + \alpha_2)u\partial_u + (\alpha_3 x + \alpha_2)v\partial_v \tag{6}$$

при $d = 1$.

Для початку розглянемо оператор (5) системи (3) при $d \neq 1$.

Нехай $\alpha_0 \neq 0$. Ввівши позначення $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_0},\ \beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$ і розв'язавши систему Ойлера-Лаґранжа (систему характеристичних рівнянь [16])

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha} = \frac{du}{\beta u} = \frac{dv}{\beta v},$$

отримуємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(\omega)\exp\beta t,\ \omega = x - \alpha t,\\ &v = \psi(\omega)\exp\beta t, \end{aligned} \tag{7}$$

який зводить систему (3) до системи ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} - \beta) = 0,\\ &d\psi'' + \alpha\psi' + \psi(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - \beta) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

У випадку $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \neq 0$ отримуємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(\omega)\exp\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x,\ \omega = t,\\ &v = \psi(\omega)\exp\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x \end{aligned} \tag{9}$$

та редуковану систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi' - \varphi\Big(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} + \big(\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\big)^2\Big) = 0,\\ &\psi' - \psi\Big(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} + d\big(\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\big)^2\Big) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Розглянемо оператор (6) системи (3) при $d = 1$. У випадку $\alpha_3 = 0$ отримуємо анзаци (7) ($\alpha_0 \neq 0$) і (9) ($\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \neq 0$), та відповідні їм системи ЗДР (8) та (10) з параметром $d = 1$.

Нехай $\alpha_3 \neq 0$. Оскільки система (3) інваріантна відносно зсувів по часу і по x, то не порушуючи загальності, покладемо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ в операторі (6). Отримуємо оператор

$$X = \alpha_0\partial_t - 2\alpha_3 t\partial_x + \alpha_3 xu\partial_u + \alpha_3 xv\partial_v. \tag{11}$$

Проінтегрувавши систему Ойлера-Лаґранжа для оператора (11), отримуємо:

1) при $\alpha_0 = 0$ анзац та редукована система матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\omega)\exp\big(-\tfrac{x^2}{4t}\big),\ \omega = t,\\ v &= \psi(\omega)\exp\big(-\tfrac{x^2}{4t}\big), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\varphi' + \varphi(1 - \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} + \tfrac{1}{2\omega}) = 0,\\ &\psi' + \psi(b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - a + \tfrac{1}{2\omega}) = 0; \end{aligned} \tag{13}$$

2) при $\alpha_0 \neq 0$, поділивши оператор (11) на α_0 і ввівши позначення $\alpha = -\frac{2\alpha_3}{\alpha_0}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\omega)\exp\big(\tfrac{1}{6}\alpha^2 t^3 - \tfrac{1}{2}\alpha xt\big),\ \omega = \tfrac{\alpha}{2}t^2 - x,\\ v &= \psi(\omega)\exp\big(\tfrac{1}{6}\alpha^2 t^3 - \tfrac{1}{2}\alpha xt\big), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \varphi(-1 + \varphi^{-\lambda}\psi^{\lambda} - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0,\\ &\psi'' + \psi(a - b\varphi^{1-\lambda}\psi^{\lambda-1} - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

3 Побудова точних розв'язків системи (3)

Знайдемо точні розв'язки системи (3), використовуючи побудовані анзаци та редуковані системи ЗДР.

Для початку розглянемо систему (8) при $d \neq 1$. Як добре відомо, розв'язування нелінійних систем ЗДР другого порядку є окремою складною задачею. Нам вдалося знайти розв'язок (8) при додатковому припущенні

$$\psi(\omega) = \mu\varphi(\omega), \tag{16}$$

де μ – стала, тобто функції φ та ψ є лінійно залежними.

При виконанні умови (16) система (8) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(\mu^\lambda - 1 - \beta) = 0, \\ &d\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(a - b\mu^{\lambda-1} - \beta) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Помноживши перше рівняння системи (17) на d і віднявши результат від другого рівняння, отримуємо:

$$\alpha(1-d)\varphi' = \varphi\big(d\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} + \beta(1-d) - a - d\big). \tag{18}$$

При $\alpha = 0$ рівняння (18) матиме нетривіальні розв'язки тільки у випадку, коли стала μ буде розв'язком рівняння:

$$d\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} + \beta(1-d) - a - d = 0. \tag{19}$$

В загальному випадку (при довільному значенні параметра λ) рівняння (19) є трансцендентним. Проведемо дослідження функції $f(\mu) = d\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} + \beta(1-d) - a - d$, при $\mu > 0$, щодо наявності нулів.

Оскільки $f'(\mu) < 0$ при $\mu < \frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}$, $f'(\mu) > 0$ при $\mu > \frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}$, то кількість коренів рівняння (19) буде залежати від значення виразу $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right)$. Зокрема:

1) якщо $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right) < 0$, то рівняння (19) має два дійсі корені;
2) якщо $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right) = 0$, то рівняння (19) має один дійсний корінь;
3) якщо $f\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda d}\right) > 0$, то рівняння (19) не має дійсних коренів.

Зауважимо, що при деяких значеннях λ (наприклад $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$) рівняння (19) можна розв'зати аналітично.

Нехай μ_0 розв'язок рівняння (19). Тоді система (17) ($\alpha = 0$) еквівалентна диференціальному рівнянню

$$\varphi'' + \varphi(\mu_0^\lambda - 1 - \beta) = 0,$$

розв'язок якого залежить від значення виразу $\delta = \mu_0^\lambda - 1 - \beta$.

Таким чином, ми отримуємо розв'язки системи (3):

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) = (c_1 + c_2 x)e^{\beta t},\\
&v(t,x) = \mu_0(c_1 + c_2 x)e^{\beta t},\ \delta = 0;\\
&u(t,x) = (c_1 \cos\sqrt{\delta}x + c_2 \sin\sqrt{\delta}x)e^{\beta t},\\
&v(t,x) = \mu_0(c_1 \cos\sqrt{\delta}x + c_2 \sin\sqrt{\delta}x)e^{\beta t},\ \delta > 0;\\
&u(t,x) = \big(c_1 \exp(\sqrt{\delta}x) + c_2 \exp(-\sqrt{\delta}x)\big)e^{\beta t},\\
&v(t,x) = \mu_0\big(c_1 \exp(\sqrt{\delta}x) + c_2 \exp(-\sqrt{\delta}x)\big)e^{\beta t},\ \delta < 0.
\end{aligned}
$$

При $\alpha \neq 0$ розв'язок рівняння (18) матиме вигляд: $\varphi(\omega) = C\times \exp\left(\frac{f(\mu)}{\alpha(1-d)}\omega\right)$, де C – довільна стала. Для того щоб функція φ була розв'язком системи (17) необхідно, щоб $\alpha = \frac{f(\mu)}{\sqrt{(d-1)f_1(\mu)}}$, де $f_1(\mu) = \mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} - a - 1$.

Отже, при $\alpha \neq 0$ розв'язок системи (3) матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) = C\exp\left(-\sqrt{\frac{f_1(\mu)}{(d-1)}}\,x + \left(\frac{f(\mu)}{d-1} + \beta\right)t\right),\\
&v(t,x) = \mu\, u(t,x).
\end{aligned}
$$

Побудуємо розв'язок системи (3) при $d = 1$, використовуючи анзац (7) та відповідну систему ЗДР (8). Розв'язок системи (8) будемо шукати з врахуванням умови (16), при якій дана система матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
&\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(\mu^\lambda - 1 - \beta) = 0,\\
&\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(a - b\mu^{\lambda-1} - \beta) = 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Для того щоб система (20) мала нетривіальні розв'язки потрібно щоб стала μ була розв'язком трансцендентного рівняння

$$
\mu^\lambda + b\mu^{\lambda-1} - a - 1 = 0. \tag{21}
$$

Рівняння (21) є частинним випадком рівняння (19) при $d = 1$, тому кількість його коренів залежить від значення виразу $f_1\left(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda}\right)$.

Нехай μ_0 – розв'язок рівняння (21). Система (20) буде еквівалентна ЗДР зі сталими коефіцієнтами

$$
\varphi'' + \alpha\varphi' + \varphi(\mu_0^\lambda - 1 - \beta) = 0,
$$

розв'язок якого залежить від значення виразу $D = \alpha^2 - 4(\mu_0^\lambda - 1 - \beta)$.

Підставивши значення функції φ в анзац (7) і врахувавши умову (16), отримуємо розв'язки системи (3) при $d = 1$:

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) = \big(c_1 + c_2(x-\alpha t)\big)\exp\big(-\frac{\alpha}{2}(x-\alpha t)\big)e^{\beta t},\\
&v(t,x) = \mu_0\big(c_1 + c_2(x-\alpha t)\big)\exp\big(-\frac{\alpha}{2}(x-\alpha t)\big)e^{\beta t},\ D=0;\\
&u(t,x) = \Big(c_1\exp\big(-\frac{\alpha+\sqrt{D}}{2}(x-\alpha t)\big) +\\
&+c_2\exp\big(-\frac{\alpha-\sqrt{D}}{2}(x-\alpha t)\big)\Big)e^{\beta t},\\
&v(t,x) = \mu_0\Big(c_1\exp\big(-\frac{\alpha+\sqrt{D}}{2}(x-\alpha t)\big) +\\
&+c_2\exp\big(-\frac{\alpha-\sqrt{D}}{2}(x-\alpha t)\big)\Big)e^{\beta t},\ D>0;\\
&u(t,x) = \Big(c_1\cos\big(\frac{\sqrt{-D}}{2}(x-\alpha t)\big) + c_2\sin\big(\frac{\sqrt{-D}}{2}(x-\alpha t)\big)\Big)e^{\beta t},\\
&v(t,x) = \mu_0\Big(c_1\cos\big(\frac{\sqrt{-D}}{2}(x-\alpha t)\big) +\\
&+c_2\sin\big(\frac{\sqrt{-D}}{2}(x-\alpha t)\big)\Big)e^{\beta t},\ D<0.
\end{aligned}
$$

Побудуємо розв'язок системи (3), використовуючи анзац (14) та відповідну систему ЗДР (15). Розв'язок системи (15) будемо шукати, враховуючи умову (16). Отримуємо систему

$$
\begin{aligned}
&\varphi'' + \varphi(\mu^\lambda - 1 - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0,\\
&\varphi'' + \varphi(a - b\mu^{\lambda-1} - \tfrac{1}{2}\alpha\omega) = 0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

яка буде мати нетривіальні розв'язки лише у випадку, коли μ є розв'язком рівняння (21).

Нехай μ_0 розв'язок рівняння (21). Тоді система (22) еквівалентна диференціальному рівнянню

$$
\varphi'' - \varphi\big(\frac{1}{2}\alpha\omega + 1 - \mu_0^\lambda\big) = 0. \tag{23}
$$

Виконавши заміну $\tau = \big(\frac{1}{2}\alpha\big)^{-\frac{2}{3}}\big(\frac{1}{2}\alpha\omega + 1 - \mu_0^\lambda\big)$, зводимо рівняння (23) до рівняння Ейрі [17]

$$
\varphi''_{\tau\tau} - \tau\varphi = 0,
$$

розв'язок якого має вигляд

$$\varphi(\tau) = c_1 Ai(\tau) + c_2 Bi(\tau), \tag{24}$$

де $Ai(\tau)$ та $Bi(\tau)$ — відповідно функція Ейрі і функція Ейрі другого роду.

Отже, врахувавши (14), (15), (16) та (24), отримуємо розв'язок системи (3) при $d = 1$

$$\begin{aligned} u &= \Big(c_1 Ai\big(p(t,x)\big) + c_2 Bi\big(p(t,x)\big)\Big) \exp\big(\tfrac{1}{6}\alpha^2 t^3 - \tfrac{1}{2}\alpha x t\big), \\ v &= \mu_0\Big(c_1 Ai\big(p(t,x)\big) + c_2 Bi\big(p(t,x)\big)\Big) \exp\big(\tfrac{1}{6}\alpha^2 t^3 - \tfrac{1}{2}\alpha x t\big), \end{aligned} \tag{25}$$

де $p(t,x) = \big(\frac{1}{2}\alpha\big)^{-\frac{2}{3}}\big(\frac{1}{4}\alpha^2 t^2 - \frac{1}{2}\alpha x + 1 - \mu_0^\lambda\big)$.

Побудуємо розв'язки системи (3), використовуючи анзац (12) та відповідну систему ЗДР (13). Розв'язки системи (13) будемо шукати, виконавши заміну

$$\psi(\omega) = \nu(\omega)\varphi(\omega), \tag{26}$$

де $\nu(\omega)$ – покищо невідома функція, $\nu \neq 0$.

Врахувавши заміну (26), записуємо систему (13) у вигляді

$$\begin{aligned} &\varphi' + \varphi(1 - \nu^\lambda + \tfrac{1}{2\omega}) = 0, \\ &\nu\varphi' + \nu'\varphi + \nu\varphi(b\nu^{\lambda-1} - a + \tfrac{1}{2\omega}) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Для початку розглянемо випадок, коли функція $\nu(\omega)$ є сталою, тобто $\nu(\omega) = \mu$, μ – стала, $\mu > 0$. В цьому випадку система (27) буде мати нетривіальні розв'язки лише тоді, коли матиме розв'язки рівняння (21).

Нехай μ_0 розв'язок рівняння (21). Тоді система (27) еквівалентна лінійному диференціальному рівнянню

$$\varphi' + \varphi\big(1 - \mu_0^\lambda + \frac{1}{2\omega}\big) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\varphi(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\omega}} \exp\big((\mu_0^\lambda - 1)\omega\big), \tag{28}$$

де c – довільна стала.

Отже, врахувавши (12), (13), (16) та (28), отримуємо розв'язок системи (3) при $d = 1$

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{c}{\sqrt{t}} \exp\big(-\tfrac{x^2}{4t} + (\mu_0^\lambda - 1)t\big), \\ v &= \mu_0 \tfrac{c}{\sqrt{t}} \exp\big(-\tfrac{x^2}{4t} + (\mu_0^\lambda - 1)t\big). \end{aligned} \tag{29}$$

Нехай $\nu(\omega) \neq const$. Помноживши перше рівняння системи (27) на ν і віднявши від першого рівняння друге, отримуємо нелінійне диференціальне рівняння

$$\nu' + \nu(\nu^\lambda + b\nu^{\lambda-1} - a - 1) = 0. \tag{30}$$

Знайти розв'язки рівняння (30) у явному вигляді при довільному λ не вдається. Нам вдалося знайти функцію ν при $\lambda = \frac{1}{2}$, причому її значення залежатиме від значення виразу $\Delta = 4b - (1 + a)^2$:
якщо $\Delta = 0$, то $\nu = \big(\frac{2}{\omega+\omega_0} + \frac{1+a}{2}\big)^2$,
якщо $\Delta > 0$, то $\nu = \big(\frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \tan \frac{\sqrt{\Delta}}{4}(\omega + \omega_0)\big)^2$,
якщо $\Delta < 0$, то $\nu = \frac{1}{4}\big(\Delta^- + \Delta^+ \exp \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\omega+\omega_0)\big)^2 \big(1+\exp \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\omega+\omega_0)\big)^{-2}$,
де $\Delta^\pm = 1 + a \pm \sqrt{-\Delta}$.

Щоб знайти функцію $\varphi(\omega)$ потрібно підставити знайдені значення функції $\nu(\omega)$ у перше рівняння системи (27). Для прикладу розглянемо випадок $\Delta = 0$. Отримуємо лінійне ДР

$$\varphi' + \varphi\left(\frac{1-a}{2} - \frac{2}{\omega + \omega_0} + \frac{1}{2\omega}\right) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\varphi(\omega) = c\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\sqrt{\omega}} \exp\left(\frac{a-1}{2}\omega\right), \tag{31}$$

де c – довільна стала. Аналогічно можна знайти функцію $\varphi(\omega)$ при $\Delta > 0$ та $\Delta < 0$. Зокрема будемо мати

$$\varphi(\omega) = \tfrac{c}{\sqrt{t}} \cos^2\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(\omega + \omega_0)\right) \exp\left(\tfrac{a-1}{2}\omega\right), \qquad \Delta > 0; \tag{32}$$

$$\varphi(\omega) = \tfrac{c}{\sqrt{t}}\left(1 + \exp \tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}(\omega + \omega_0)\right)^2 \exp\left(\tfrac{a-\sqrt{-\Delta}-1}{2}\omega\right), \quad \Delta < 0. \tag{33}$$

Отже, врахувавши (12), (13) та (31)–(33), отримуємо розв'язки системи (3) при $\lambda = \frac{1}{2}$, $d = 1$:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= c\tfrac{(t+t_0)^2}{\sqrt{t}} \exp\left(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}\right), \\ v(t,x) &= \tfrac{c}{\sqrt{t}}\left(\tfrac{1+a}{2}(t+t_0)+2\right)^2 \exp\left(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}\right),\ \Delta = 0; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{c}{\sqrt{t}} \cos^2\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\right) \exp(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}), \\ v(t,x) &= \tfrac{c}{\sqrt{t}}\left(\tfrac{a+1}{2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\sin\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\right)\right)^2 \times \\ &\times \exp(\tfrac{a-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}),\ \Delta > 0; \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tfrac{c}{\sqrt{t}}\left(1 + \exp\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+t_0)\right)^2 \exp\left(\tfrac{a-\sqrt{-\Delta}-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}\right), \\ v(t,x) &= \tfrac{c}{4\sqrt{t}}\left(\Delta^- + \Delta^+\exp\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+t_0)\right)^2 \exp\left(\tfrac{a-\sqrt{-\Delta}-1}{2}t - \tfrac{x^2}{4t}\right),\ \Delta < 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Зауваження 1. *Розв'язки* (29), (34)–(36) *мають спільну рису: компоненти u та v є добутком деяких функцій від часу на фундаментальний розв'язок* $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ *рівняння теплопровідності.*

4 Узагальнення отриманих розв'язків та їх властивості

Розв'язок системи Ойлера-Лаґранжа для оператора $I = u\partial_u + v\partial_v$ (див. (5) при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$) веде до формального анзацу $v(t,x) = \nu(t,x)u(t,x)$, який не спрощує задачу побудови точних розв'язків системи (3). Проте, якщо накласти обмеження на функцію $\nu(t,x)$, а саме, $\nu = \nu(t)$, то ми отримуємо анзац

$$v(t,x) = \nu(t)u(t,x),$$

який зводить цю систему до вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (\nu^\lambda - 1)u, \\ \nu u_t &= d\nu u_{xx} + (-\nu' + a\nu - b\nu^\lambda)u. \end{aligned} \tag{37}$$

Підставивши в друге рівняння системи (37) замість u_{xx} вираз $u_t + (1-\nu^\lambda)u$, отримуємо рівняння

$$(1-d)\nu u_t = (-\nu' + (a+d)\nu - d\nu^{\lambda+1} - b\nu^\lambda)u. \tag{38}$$

При $d = 1$ рівняння (38) еквівалентне рівнянню (30), загальний розв'язок якого побудовано при $\lambda = \frac{1}{2}$. Підставляючи знайдені значення функції ν (при різних значеннях Δ) в перше рівняння системи (37) при $\lambda = \frac{1}{2}$, отримуємо:

$$u_t = u_{xx} + \Big(\frac{2}{t+t_0} + \frac{a-1}{2}\Big)u, \;\; \Delta = 0; \tag{39}$$

$$u_t = u_{xx} + \Big(\frac{a-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\tan\frac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\Big)u, \;\; \Delta > 0; \tag{40}$$

$$u_t = u_{xx} + \Big(\tfrac{1}{2}\big(\Delta^- + \Delta^+ \exp\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+t_0)\big)\times$$

$$\times\big(1+\exp\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+t_0)\big)^{-1} - 1\Big)u, \;\; \Delta < 0. \tag{41}$$

Легко перевірити, що отримані рівняння (39)–(41) ведуть до таких розв'язків системи (3) при $d = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &u(t,x) = (t+t_0)^2\exp(\tfrac{a-1}{2}t)z(t,x),\\ &v(t,x) = \big(\tfrac{1+a}{2}(t+t_0)+2\big)^2\exp\big(\tfrac{a-1}{2}t\big)z(t,x), \;\; \Delta = 0, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &u(t,x) = \cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\Big)\exp(\tfrac{a-1}{2}t)z(t,x),\\ &v(t,x) = \Big(\tfrac{a+1}{2}\cos\big(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\big) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\sin\big(\tfrac{\sqrt{\Delta}}{4}(t+t_0)\big)\Big)^2\times\\ &\times\exp(\tfrac{a-1}{2}t)z(t,x), \;\; \Delta > 0, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &u(t,x) = \Big(1+\exp\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+t_0)\Big)^2\exp\big(\tfrac{a-\sqrt{-\Delta}-1}{2}t\big)z(t,x),\\ &v(t,x) = \tfrac{1}{4}\big(\Delta^- + \Delta^+\exp\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+t_0)\big)^2\exp\big(\tfrac{a-\sqrt{-\Delta}-1}{2}t\big)z(t,x), \;\; \Delta < 0, \end{aligned} \tag{44}$$

де $z(t,x)$ – довільний розв'язок рівняння теплопровідності

$$z_t = z_{xx}. \tag{45}$$

Зауважимо, що розв'язки (34)–(36) є частинним випадком розв'язків (42)–(44) при $z(t,x) = \frac{c}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$.

Аналогічно можна отримати узагальнення розв'язку (29) системи (3) при $d = 1$, а саме

$$
\begin{aligned}
u &= \exp\big((\mu_0^\lambda - 1)t\big) z(t,x),\\
v &= \mu_0 \exp\big((\mu_0^\lambda - 1)t\big) z(t,x),
\end{aligned}
\tag{46}
$$

де μ_0 – довільний розв'язок рівняння (21), $z(t,x)$ – довільний розв'язок рівняння (45).

Нехай $d \neq 1$. З рівняння (38) отримуємо

$$
u = C(x) \exp\Big(\int \frac{1}{(1-d)\nu}\,(-\nu' + (a+d)\nu - d\nu^{\lambda+1} - b\nu^\lambda) dt\Big). \tag{47}
$$

Підставивши (47) в перше рівняння системи (37), отримуємо рівняння

$$
C''(x) = C(x) \frac{1}{(1-d)\nu}\,(-\nu' + (a+1)\nu - \nu^{\lambda+1} - b\nu^\lambda),
$$

з якого випливає:

$$
C'' - \gamma C = 0, \tag{48}
$$

$$
\nu' + \nu(\nu^\lambda - b\nu^{\lambda-1} - a - 1 + \gamma - d\gamma) = 0,\ \gamma = const. \tag{49}
$$

Структура рівняння (49) така ж, як і рівняння (30), тому його розв'язок при $\lambda = \frac{1}{2}$ залежатиме від значення виразу $\Theta = 4b - h^2$, де $h = a + 1 - \gamma + d\gamma$:
якщо $\Theta = 0$, то $\nu = \big(\frac{2}{t+t_0} + \frac{h}{2}\big)^2$,

якщо $\Theta > 0$, то $\nu = \big(\frac{h}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Theta}\tan\frac{\sqrt{\Theta}}{4}(t+t_0)\big)^2$,

якщо $\Theta < 0$, то $\nu = \frac{1}{4}\big(\Theta^- + \Theta^+ \exp\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(t+t_0)\big)^2\big(1 + \exp\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(t+t_0)\big)^{-2}$,
де $\Theta^\pm = h \pm \sqrt{-\Theta}$.

Отже, для того щоб отримати розв'язки системи (3) при $\lambda = \frac{1}{2}$, $d \neq 1$, потрібно лише обчислити значення інтегралу в (47), підставивши в підінтегральний вираз знайдені значення функції ν. Провівши нескладні обчислення, отримуємо розв'язки системи (3) при $\lambda = \frac{1}{2},\ d \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
&u(t,x) = C(x)(t+t_0)^2 \exp\big(\frac{a-1+(1+d)\gamma}{2}(t+t_0)\big),\\
&v(t,x) = \frac{C(x)}{4}\big(4+h(t+t_0)\big)^2 \exp\big(\frac{a-1+(1+d)\gamma}{2}(t+t_0)\big),\ \Theta = 0;\\
&u(t,x) = C(x)\cos^2\Big(\frac{\sqrt{\Theta}}{4}(t+t_0)\Big)\exp\big(\frac{a-1+(1+d)\gamma}{2}(t+t_0)\big),\\
&v(t,x) = \Big(\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\Theta}\tan\big(\frac{\sqrt{\Theta}}{4}(t+t_0)\big)\Big)^2 u(t,x),\ \Theta > 0;\\
&u(t,x) = C(x)\Big(1+\exp\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(t+t_0)\Big)^2 \times\\
&\times \exp\big(\frac{a-1+(1+d)\gamma-\sqrt{-\Theta}}{2}t\big),\\
&v(t,x) = \frac{C(x)}{4}\big(\Theta^- + \Theta^+ \exp\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(t+t_0)\big)^2 \times\\
&\times \exp\big(\frac{a-1+(1+d)\gamma-\sqrt{-\Theta}}{2}t\big),\ \Theta < 0;
\end{aligned}
$$

де функція $C(x)$ є розв'язом лінійного ЗДР (48).

Визначимо властивості отриманих розв'язків. Для початку дослідимо їх асимптотичну поведінку відносно часу. Виявляється, що всі розв'язки, побудовані в третьому пункті, мають спільну рису: при певних обмеженнях їх компоненти або прямують до нескінченності, або до нуля (нестійкої стаціонарної точки) при $t \to \infty$.

Наприклад, кожна компонента розв'яку (25) при $c_2 \neq 0$ прямує до нескінченності. У випадку $c_2 = 0$ при $\alpha > 0$ отримуємо: $(u,v) \to (0;0)$, при $t \to \infty$.

Для розв'язку (29) отримуємо: $(u,v) \to (0;0)$, при $t \to \infty$, якщо $\mu_0 \leq 1$. Причому, розв'язок алгебраїчного рівняння (21) $\mu_0 \leq 1$ існуватиме, якщо виконуватиметься хоча б одна з умов: 1) $a \geq b$; 2) $a < b,\ \lambda > \frac{b}{b+1},\ f\Big(\frac{(1-\lambda)b}{\lambda}\Big) < 0$.

Для розв'язків (34)–(35) отримуємо: $(u,v) \to (0;0)$, при $t \to \infty$, якщо $a < 1$.

Для розв'язку (36) отримуємо: $(u,v) \to (0;0)$, при $t \to \infty$, якщо $\max\{0,\ 2\sqrt{b}-1\} < a < b,\ b < 1$.

Розглянемо детальніше розв'язок (44). Оскільки система (3) має стійкі стаціонарні точки (пряма $u = v$) лише при $a = b$, $\lambda > \frac{a}{a+1}$, то перепишемо розв'язок (44) при виконанні цих умов. Зокрема, з того що $\lambda > \frac{a}{a+1}$ випливає $a < 1$, оскільки $\lambda = \frac{1}{2}$.

Розв'язок (44) набуде вигляду

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \Big(\exp\left(\tfrac{a-1}{2}t\right) + \alpha\Big)^2 z(t,x), \\ v(t,x) &= \Big(a\exp\left(\tfrac{a-1}{2}t\right) + \alpha\Big)^2 z(t,x), \end{aligned} \tag{50}$$

де α – довільна стала.

Виявляється, що з множини точних розв'язків (50) можна виділити такі, які задовольняють такі біологічно вмотивовані додаткові умови, як збіжність популяцій до стійкої стаціонарної точки, обмеженість росту популяцій та відсутність дифузії популяцій через границю області. Зокрема, можна сформулювати теорему:

Теорема 2. *Нелінійна система рівнянь РД (3), з параметрами $a = b < 1$, $d = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, допускає в області $\{(t,x) \in (0,+\infty) \times (0, \frac{\pi}{\beta})\}$ обмежений періодичний (в просторі) розв'язок:*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \Big(\exp\left(\tfrac{a-1}{2}t\right) + \alpha\Big)^2 \big(\exp(-\beta^2 t)\cos(\beta x) + \gamma\big), \\ v(t,x) &= \Big(a\exp\left(\tfrac{a-1}{2}t\right) + \alpha\Big)^2 \big(\exp(-\beta^2 t)\cos(\beta x) + \gamma\big), \end{aligned} \tag{51}$$

що задовольняє нульові умови Ноймана $u_x|_{x=0} = 0$, $v_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\frac{\pi}{\beta}} = 0$, $v_x|_{x=\frac{\pi}{\beta}} = 0$, де α, β, γ – довільні сталі, $\beta > 0$, $\gamma > 1$.

Добре видно, що розв'язок вигляду (51) в області $\{(t,x) \in (0,+\infty) \times (0, \frac{\pi}{\beta})\}$ є невід'ємним та прямує до стійкої стаціонарної точки $(u,v) \to \Big(\alpha^2\gamma; \alpha^2\gamma\Big)$ при $t \to +\infty$.

[1] *Lotka A.* Updaded oscillations derived from the law of mass action // J. Amer. Chem. Soc. — 1920. — **42**. — P. 1595–1599.

[2] *Volterra V.* Variazionie fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Mem. Acad. Lincei. — 1926. — **2**. — P. 31–113.

[3] *Murray J.D.* Mathematical Biology, II. — Berlin: Springer, 2003. — 801 p.

[4] *Okubo A.* Diffusion and Ecological Problems. Modern Perspectives. — Berlin: Springer, 2001. — 444 p.

[5] *Ito N., Shimada T., Murase Y., Yukawa S. and Aihara K.* A simple model of evolving ecosystems // Artif. Life Robotics. — 2007. — **11**. — P. 153–156.

[6] *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991. — 303 с.

[7] *Ames W.F.* Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. — New York: Academic Press, 1972. — 305 p.

[8] *Михайлов А.В., Шабат А.Б.* Условия интегрируемости систем двух уравнений // Теор. мат. физика. — 1985. — **62**. — С. 163–185.

[9] *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 360 с.

[10] *Zulehner W., Ames W.F.* Group analisys of a semilinear vector diffusion equation // Nonlinear Anal. — 1983. — **7**. — P. 945–969.

[11] *Cherniha R.* Lie Symmetries of Nonlinear Two-dimensional Reaction-Diffusion Systems // Rept. Math. Phys. — 2000. — **46**. — P. 63–76.

[12] *Cherniha R., King J.R.* Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: I // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. – **33**. — P. 267–282, P. 7839–7841.

[13] *Cherniha R., King J.R.* Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — **36**. — P. 405–425.

[14] *Nikitin A.G.* Group Classification of Systems of Non-Linear Reaction-Diffusion Equations // Ukranian Math. Bull. — 2005. — **2**, № 2. — P. 153—204.

[15] *Nikitin A.G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — **332**, № 1. — P. 666–690.

[16] *Olver P.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. — Berlin: Springer, 1986. — 510 p.

[17] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физ.-мат. лит., 2001. — 576 с.

EXACT SOLUTIONS OF A REACTION-DIFFUSION EQUATIONS SYSTEM MODELING THE PREDATOR-PREY INTERACTION

Vasyl' DAVYDOVYCH

Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3 Tereshchenkivs'ka Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *davydovych@imath.kiev.ua*

A new reaction-diffusion system modeling the predator-prey interaction is studied. The maximal algebra of invariance for the system is found what allowed to reduce one to systems of nonlinear ordinary differential equations and to construct wide classes of the exact solutions of the origin nonlinear system. A method for generalization of the obtained solutions is proposed, the properties and biological interpretations of some of them are also presented.