# НАБЛИЖЕННЯ ВІДНОШЕНЬ ФУНКЦІЙ ЛАУРІЧЕЛЛИ-САРАНА $F_S$ З ДІЙСНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

©*2011 р. Наталія ГОЄНКО*[1]*, Тамара АНТОНОВА*[2]*, Сергій РАКІНЦЕВ*[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів 79060
[2]Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С.Бандери 12, Львів 79013

Редакція отримала статтю 24 березня 2011 р.

Побудовано розвинення відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли-Сарана $F_S(a_1, a_2, b_1, b_2,\ b_3; c; z_1, z_2, z_3)$ у гіллясті ланцюгові дроби. Досліджено збіжність одержаних гіллястих ланцюгових дробів в області $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_i| + \mathrm{Re}\ z_i < 1, i = \overline{1,3}\}$ у випадку дійсних параметрів функції $F_S$.

Функція Лаурічелли-Сарана $F_S$ є одним із узагальнень гіпергеометричної функції Ґауса ${}_2F_1$ для трьох змінних та узагальненням функцій Аппеля $F_1$ та $F_3$. У даній роботі пропонується алгоритм розвинення відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли-Сарана

$$\frac{F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; z_1, z_2, z_3)}{F_S(a_1 + \delta_j^1, a_2 + \delta_j^2 + \delta_j^3, b_1 + \delta_j^1, b_2 + \delta_j^2, b_3 + \delta_j^3; c+1; z_1, z_2, z_3)}, \qquad (1)$$

УДК: 517.526; MSC 2000: 11A95, 11J70, 30B70, 65G30
*Ключові слова і фрази:* гіллясті ланцюгові дроби, гіпергеометричні функції Лаурічелли-Сарана, аналітичне продовження

$j = 1, 2, 3$, $\delta_j^i$ — символ Кронекера, у гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД). За певних умов, накладених на параметри функції $F_S$, доведено збіжність одержаних ГЛД до функцій, що є аналітичним продовженням відношень функцій Лаурічелли-Сарана (1) з деякого околу початку координат в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_i| + \mathrm{Re}\ z_i < 1, i = \overline{1,3}\}.$$

## 1 Означення функції $F_S$. Рекурентні співвідношення

Гіпергеометрична функція Лаурічелли $F_S$ означується кратним степеневим рядом [1]:

$$F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; \bar{z}) =$$
$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_{n+p} (b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p}{(c)_{m+n+p}} \frac{z_1^m z_2^n z_3^p}{m!n!p!}, \qquad (2)$$

де параметри $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c$ — комплексні сталі, причому $c \neq 0, -1, -2, ...$, $\bar{z} = (z_1, z_2,\ z_3)$, $z_1, z_2, z_3$ — комплексні змінні;
$(\alpha)_k$ — символ Похгамера: $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Зауважимо, що

$$F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; 0, z_2, z_3) = F_1(a_2, b_2, b_3; c; z_2, z_3),$$

$$F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; z_1, 0, z_3) = F_3(a_1, a_2, b_1, b_3; c; z_1, z_3),$$

$$F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; z_1, z_2, 0) = F_3(a_1, a_2, b_1, b_2; c; z_1, z_2),$$

тобто функція $F_S$ є узагальненням гіпергеометричних функцій Аппеля $F_1$ та $F_3$.

Областю збіжності ряду (2) є одиничний полікруг

$$D = \left\{\bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 :\ |z_i| < 1, i = \overline{1,3}\right\}.$$

**Твердження 1.1.** *Гіпергеометричні функції Лаурічелли-Сарана задовольняють наступні рекурентні співвідношення:*

$$\begin{aligned}
&F_S(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z}) = \\
&= \left(1 - \frac{a_1 + b_1 + 1}{c} z_1\right) F_S(a_1 + 1, a_2, \bar{b} + \bar{e_1}; c + 1; \bar{z}) + \\
&+ \frac{(a_1 + 1)\,(b_1 + 1)}{c\,(c + 1)} z_1(1 - z_1) F_S(a_1 + 2, a_2, \bar{b} + 2\bar{e_1}; c + 2; \bar{z}) + \\
&+ \frac{a_2 b_2}{c(c + 1)} z_2 F_S(a_1 + 1, a_2 + 1, \bar{b} + \bar{e_1} + \bar{e_2}; c + 2; \bar{z}) + \\
&+ \frac{a_2 b_3}{c\,(c + 1)} z_3 F_S(a_1 + 1, a_2 + 1, \bar{b} + \bar{e_1} + \bar{e_3}; c + 2; \bar{z}),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&F_S(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z}) = \\
&= \left(1 - \frac{a_2}{c} z_j - \sum_{k=2}^{3} \frac{b_k + \delta_k^j}{c} z_k\right) F_S(a_1, a_2 + 1, \bar{b} + \bar{e_j}; c + 1; \bar{z}) + \\
&+ \sum_{k=2}^{3} \frac{(a_2 + 1)(b_k + \delta_k^j)}{c(c + 1)} z_k(1 - z_k) F_S(a_1, a_2 + 2, \bar{b} + \bar{e_j} + \bar{e_k}; c + 2; \bar{z}) + \\
&+ \frac{a_1 b_1}{c\,(c + 1)} z_1 F_S(a_1 + 1, a_2 + 1, \bar{b} + \bar{e_1} + \bar{e_j}; c + 2; \bar{z}),\ j = 2, 3,
\end{aligned} \tag{4}$$

*де* $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \bar{e_j} = (\delta_j^1, \delta_j^2, \delta_j^3),\ j = 1, 2, 3.$

Правильність формальних рівностей (3)–(4) можна перевірити, виходячи з означення (2) функції $F_S$.

# 2 Побудова розвинень відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли-Сарана $F_S$ у гіллясті ланцюгові дроби

Позначимо

$$X_1(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z}) = \frac{F_S(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z})}{F_S(a_1 + 1, a_2, \bar{b} + \bar{e_1}; c + 1; \bar{z})},$$

$$X_j(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z}) = \frac{F_S(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z})}{F_S(a_1,a_2+1,\bar{b}+\bar{e_j};c+1;\bar{z})}, \quad j=2,3.$$

Почленно поділивши рівність (3) на $F_S(a_1+1,a_2,\bar{b}+\bar{e_1};c+1;\bar{z})$, а рівність (4) відповідно на $F_S(a_1,a_2+1,\bar{b}+\bar{e_j};c+1;\bar{z})$, $j=2,3$, одержимо:

$$\begin{aligned} X_1(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z}) &= 1 - \frac{a_1+b_1+1}{c}z_1 + \\ &+ \frac{(a_1+1)\,(b_1+1)}{c\,(c+1)}z_1\,(1-z_1)\,\frac{1}{X_1(a_1+1,a_2,\bar{b}+\bar{e_1};c+1;\bar{z})} + \\ &+ \sum_{k=2}^{3}\frac{a_2 b_k}{c\,(c+1)}z_k\frac{1}{X_k(a_1+1,a_2,\bar{b}+\bar{e_1};c+1;\bar{z})}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} X_j\left(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z}\right) &= 1 - \frac{a_2}{c}z_j - \sum_{k=2}^{3}\frac{b_k+\delta_k^j}{c}z_k + \\ &+ \sum_{k=2}^{3}\frac{(a_2+1)(b_k+\delta_k^j)}{c(c+1)}z_k(1-z_k)\frac{1}{X_k(a_1,a_2+1,\bar{b}+\bar{e_j};c+1;\bar{z})} + \\ &+ \frac{a_1 b_1}{c\,(c+1)}z_1\frac{1}{X_1(a_1,a_2+1,\bar{b}+\bar{e_j};c+1;\bar{z})}, \quad j=2,3. \end{aligned} \tag{6}$$

Використовуючи формули (5)–(6), одержимо рекурентне співвідношення для $X_j(a_1,a_2,\bar{b},c,\bar{z})$, $j=1,2,3$:

$$\begin{aligned} X_j(a_1,a_2,\bar{b},c,\bar{z}) &= 1 - \frac{a_{2-\delta_j^1}}{c}z_j - \sum_{k=2-\delta_j^1}^{3-2\delta_j^1}\frac{b_k+\delta_k^j}{c}z_k + \\ &+ \sum_{k=1}^{3}\frac{(b_k+\delta_k^j)(a_{2-\delta_k^1}+\delta_k^j+\delta_k^{5-j})z_k(1-(\delta_k^j+\delta_k^{5-j})z_k)}{c(c+1)X_k(a_1+\delta_j^1,a_2+\delta_j^2+\delta_j^3,\bar{b}+\bar{e_j};c+1;\bar{z})}. \end{aligned} \tag{7}$$

Послідовно вкладаючи вираз $X_k$ з відповідними параметрами у співвідношення (7), отримаємо розвинення функцій

$$X_j(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z}), \quad j=1,2,3,$$

у скінченні гіллясті ланцюгові дроби вигляду:

$$X_j(a_1,a_2,\bar b,c,\bar z)=$$
$$=b_0(\bar z)+\sum_{i_1=1}^{3}\frac{a_{i(1)}(\bar z)}{b_{i(1)}(\bar z)}+\ldots+\sum_{i_n=1}^{3}\frac{a_{i(n)}(\bar z)}{b_{i(n)}(\bar z)}+\sum_{i_{n+1}=1}^{3}\frac{a_{i(n+1)}(\bar z)}{P_{i(n+1)}(\bar z)},\qquad(8)$$

де

$$P_{i(n+1)}(\bar z)=$$
$$=X_{i_{n+1}}\left(a_1+p_{i(n)1},a_2+\sum_{j=2}^{3}p_{i(n)j},\bar b+\sum_{p=0}^{n}\bar e_{i_p},c+n+1,\bar z\right),\qquad(9)$$

а їх коефіцієнти обчислюються за формулами

$$b_0(\bar z)=\begin{cases}1-\dfrac{a_1+b_1+1}{c}z_1, & \text{якщо } j=1;\\ 1-\dfrac{a_2+b_2+1}{c}z_2-\dfrac{b_3}{c}z_3, & \text{якщо } j=2;\\ 1-\dfrac{b_2}{c}z_2-\dfrac{a_2+b_3+1}{c}z_3, & \text{якщо } j=3;\end{cases}\qquad(10)$$

$$a_{i(k+1)}(\bar z)=\begin{cases}\dfrac{(a_1+p_{i(k)1})(b_1+p_{i(k)1})}{(c+k)(c+k+1)}z_1(1-z_1\delta^1_{i_k}),\\ \qquad\text{якщо } i_{k+1}=1;\\ \dfrac{(a_2+p_{i(k)2}+p_{i(k)3})(b_2+p_{i(k)2})}{(c+k)(c+k+1)}z_2(1-z_2\delta^{2,3}_{i_k}),\\ \qquad\text{якщо } i_{k+1}=2;\\ \dfrac{(a_2+p_{i(k)2}+p_{i(k)3})(b_3+p_{i(k)3})}{(c+k)(c+k+1)}z_3(1-z_3\delta^{2,3}_{i_k}),\\ \qquad\text{якщо } i_{k+1}=3;\end{cases}\qquad(11)$$

де $k=0,1,\ldots,n$, та

$$b_{i(k+1)}(\bar{z})=\begin{cases} 1-\dfrac{a_1+b_1+2p_{i(k)1}+1}{c+k+1}z_1, \\ \text{якщо } i_{k+1}=1; \\ 1-\dfrac{a_2+b_2+2p_{i(k)2}+p_{i(k)3}+1}{c+k+1}z_2-\dfrac{b_3+p_{i(k)3}}{c+k+1}z_3, \\ \text{якщо } i_{k+1}=2; \\ 1-\dfrac{b_2+p_{i(k)2}}{c+k+1}z_2-\dfrac{a_2+p_{i(k)2}+b_3+2p_{i(k)3}+1}{c+k+1}z_3, \\ \text{якщо } i_{k+1}=3; \end{cases} \tag{12}$$

де $k=0,1,\ldots,n-1$,
$i_{(0)}=i_0=j$, $j=1,2,3$, $i(l)=i_1i_2\ldots i_l$ — мультиіндекс, $i_s=\overline{1,3}$, $s=\overline{1,l}$, $l=\overline{1,n+1}$, $p_{i(k)}=\sum\limits_{m=0}^{k-1}\delta_{i_k}^{i_m}$, $\delta_j^{2,3}=1-\delta_j^1$.

Спрямовуючи $n$ до нескінченності, одержимо формальне розвинення відношень (1) функцій $F_S$ у ГЛД вигляду

$$b_0(\bar{z})+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{3}\frac{a_{i(k)}(\bar{z})}{b_{i(k)}(\bar{z})}, \tag{13}$$

елементи якого визначають за формулами (10)–(12) при $k=0,1,2,\ldots$.

При $z_2=0$ або $z_3=0$ дріб (13) для відношень $X_1(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z})$, $X_2(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z})$ перетворюється у ГЛД типу Ньорлунда для відношень функцій Аппеля $F_3$ від змінних $z_1,z_3$ або $z_1,z_2$ відповідно [2]. При $z_1=0$ дріб (13) для відношення $X_2(a_1,a_2,\bar{b};c;\bar{z})$ перетворюється у ГЛД типу Ньорлунда для відношення функцій Аппеля $F_1$. Такий функціональний дріб від змінних $z_2,z_3$ з параметром $a=a_2$ збігається з дробом типу Ньорлунда для функції Лаурічелли $F_D^{(N)}$ при $N=2$ [3].

## 3 Дослідження збіжності формальних розвинень відношень функцій Лаурічелли-Сарана $F_S$ у ГЛД

**Теорема 3.1.** *Нехай для гіпергеометричної функції $F_S$ параметри $a_1, a_2$, $b_1$, $b_2, b_3, c$ — дійсні числа, що задовольняють умови:*

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad b_1 \geq 0, \quad b_2 \geq 0, \quad b_3 \geq 0,$$
$$2c \geq a_1 + b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 1, \quad 2c \geq a_2 + 2b_1 + b_2 + b_3 + 1. \tag{14}$$

*Тоді:*
*(А) гіллястий ланцюговий дріб вигляду* (13) *з елементами, що визначаються за формулами* (10)–(12)*, де $k = 0, 1, \ldots$, збігається рівномірно всередині області*

$$\Omega = \left\{ \ \bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \subset \mathbb{C}^3 : \quad |z_i| + \operatorname{Re} z_i < 1, \quad i = 1, 2, 3 \right\} \tag{15}$$

*до голоморфної функції $f_j^*(\bar{z})$, $j = 1, 2, 3$;*

*(Б) функція*

$$f_j^*(\bar{z}) \equiv X_j(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z}) = \frac{F_S(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z})}{F_S(a_1 + \delta_j^1, a_2 + \delta_j^2 + \delta_j^3, \bar{b} + \bar{e_j}; c + 1; \bar{z})},$$

*при $\bar{z} \in \Omega_1 = \{\bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \subset \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z_i \leq 1/2 - \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3\}$, $0 \leq \varepsilon < 1/2$, є аналітичним продовженням функції*

$$X_j\left(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z}\right), \ j = 1, 2, 3,$$

*голоморфної в деякому околі початку кординат, у область $\Omega$.*

Доведення для $j = 1$ проводимо за схемою, застосованою при доведенні теореми про збіжність формального розвинення у ГЛД відношення функцій Лаурічелли $F_D^N$, використовуючи деякі допоміжні твердження.

**Лема 3.1** ([3])**.** *Для довільного комплексного числа $z$ справджується нерівність*

$$|z(1-z)| - \operatorname{Re}\left(z(1-z)\right) \leq 2\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z\right)^2.$$

**Теорема 3.2** ([4]). *Гіллястий ланцюговий дріб*

$$d_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}}$$

*з невід'ємними елементами* $c_{i(k)} \geq 0$, $d_{i(k)} > 0$ ($i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, \infty}$ ) *збігається, якщо виконується одна з умов:*

*а) існує номер* $p$ *такий, що всі* $c_{i(p)} \equiv 0$, $i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, p}$*;*

*б) ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k$ *розбігається, де*

$$\delta_k = \min \left\{ \frac{d_{i(k)} d_{i(k+1)}}{c_{i(k+1)}}, i_s = \overline{1, N}, s = \overline{1, k+1} \right\}, \tag{16}$$

*причому ті набори індексів, для яких* $c_{i(k+1)} \equiv 0$, *при мінімізації не враховуються.*

**Теорема 3.3** ([5, 4]). *Нехай* $\{f_m(\bar{z})\}$ *— послідовність голоморфних функцій в області* $D \subset \mathbb{C}^N$, *рівномірно обмежених всередині області* $D$. *Якщо* $\{f_m(\bar{z})\}$ *збігається в кожній точці множини* $\Delta \in D$, *яка є* $2N$*-вимірним околом (або* $N$*-вимірним дійсним околом) деякої точки* $\bar{z}^0 \in D$, *то* $\{f_m(\bar{z})\}$ *збігається рівномірно на довільному компакті* $K \subset D$ *до голоморфної функції в* $D$.

**Теорема 3.4** ([6]). *Нехай* $f(\bar{z})$ *— голоморфна функція в області* $D \subset \mathbb{C}^N$, $\bar{z}^0 \in D$. *Тоді* $f(\bar{z}) \equiv 0$ *в області* $D$, *якщо* $f(\bar{z}) = 0$ *в деякому* $2N$*-вимірному околі точки* $\bar{z}^0$ *або* $f(\bar{z}) = 0$ *в деякому* $N$*-вимірному дійсному околі точки* $\bar{z}^0$.

***Доведення теореми* 3.1.** (A) Позначимо залишки $n$-го підхідного дробу ГЛД

$$Q_{i(s)}^{s}(\bar{z}) = b_{i(s)}(\bar{z}), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$Q_{i(k)}^{n}(\bar{z}) = b_{i(k)}(\bar{z}) + \sum_{i_{k+1}=1}^{3} \frac{a_{i(k+1)}(\bar{z})}{Q_{i(k+1)}^{n}(\bar{z})}, \; k < n, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Нехай функції

$$g_{i(k)}(\bar{z}) = \begin{cases} \dfrac{a_1 + p_{i(k)}}{c+k} \left( \dfrac{1}{2} - \operatorname{Re} z_{i_k} \right), & \text{якщо } i_k = 1, \\ \dfrac{a_2 + p_{i(k-1)2} + p_{i(k-1)3}}{c+k} \left( \dfrac{1}{2} - \operatorname{Re} z_{i_k} \right), & \text{якщо } i_k = 2, 3, \end{cases} \tag{17}$$

де $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ — мультиіндекс, $i_s = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,k}$, $k = \overline{1,n}$, $p_{i(k)} = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \delta_{i_k}^{i_l}$, $i_0 = 1$. Зауважимо, що функції $g_{i(k)}(\bar{z})$ додатні в області $\Omega$.

Покажемо методом математичної індукції, що в області $\Omega$ для довільного мультиіндексу $i(s) = i_1 i_2 \ldots i_s$ справджуються нерівності

$$\operatorname{Re} Q_{i(s)}^n(\bar{z}) \geq g_{i(s)}(\bar{z}), \qquad 1 \leq s \leq n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Зауважимо, що в даній області, тобто для $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega$, виконуються нерівності

$$\operatorname{Re} z_i < 1/2, \qquad |z_i| - \operatorname{Re} z_i < 1 - 2\operatorname{Re} z_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Для $s = n$ з урахуванням обмежень на параметри (14) і того, що $\sum\limits_{j=1}^{3} p_{i(n)j} = n + 1$, одержимо:

а) у випадку $i_n = 1$:

$$\operatorname{Re} Q_{i(n)}^n(\bar{z}) = \operatorname{Re} b_{i(n)}(\bar{z}) = 1 - \frac{a_1 + b_1 + 2p_{i(n-1)1} + 1}{c + n} \operatorname{Re} z_1 \geq$$
$$\geq \frac{a_1 + p_{i(n)}}{c + n} \left( \frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_1 \right) + \frac{2c - a_1 - b_1 - 1}{2(c + n)} \geq g_{i(n)}(\bar{z}),$$

б) у випадку $i_n = 2$:

$$\operatorname{Re} Q_{i(n)}^n(\bar{z}) = 1 - \frac{a_2 + b_2 + 2p_{i(n-1)2} + p_{i(n-1)3} + 1}{c + n} \operatorname{Re} z_2 -$$
$$- \frac{b_3 + p_{i(n-1)3}}{c + n} \operatorname{Re} z_3 \geq \frac{a_2 + b_2 + p_{i(n-1)2} + p_{i(n-1)3}}{c + n} \left( \frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_2 \right) +$$
$$+ \frac{2c - a_2 - b_2 - b_3 - 1}{2(c + n)} \geq g_{i(n)}(\bar{z}),$$

в) міркуючи аналогічно, у випадку $i_n = 3$:

$$\operatorname{Re} Q_{i(n)}^n(\bar{z}) = 1 - \frac{a_2 + p_{i(n-1)2} + b_3 + 2p_{i(n-1)3} + 1}{c + n} \operatorname{Re} z_3 -$$
$$- \frac{b_2 + p_{i(n-1)2}}{c + n} \operatorname{Re} z_2 \geq \frac{2c - a_2 - b_2 - b_3 - 1}{2(c + n)} +$$
$$+ \frac{a_2 + b_2 + p_{i(n-1)2} + p_{i(n-1)3}}{c + n} \left( \frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_3 \right) \geq g_{i(n)}(\bar{z}).$$

Припустимо, що для $s$, $1 < s = k+1 \leq n$, виконуються нерівності (18).

Нескладно обчислити, що (див. лему 4.41 [7, с. 112] або лему 1 [3])

$$\inf_{-\infty<v<+\infty} \mathrm{Re}\,\frac{x+iy}{u+iv} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2u}, \text{ де } x,y,u,v \in \mathbb{R},\ u>0. \tag{19}$$

Оскільки $\mathrm{Re}\,Q^n_{i(k+1)}(\bar{z}) > 0$ в області $\Omega$ і

$$\mathrm{Re}\,Q^n_{i(k)}(\bar{z}) = \mathrm{Re}\,b_{i(k)}(\bar{z}) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \mathrm{Re}\,\frac{a_{i(k+1)}(\bar{z})}{Q^n_{i(k+1)}(\bar{z})},$$

враховуючи (19) і припущення індукції, маємо

$$\mathrm{Re}\,\frac{a_{i(k+1)}(\bar{z})}{Q^n_{i(k+1)}(\bar{z})} \geq -\frac{|a_{i(k+1)}(\bar{z})| - \mathrm{Re}\,a_{i(k+1)}(\bar{z})}{2\mathrm{Re}\,Q^n_{i(k+1)}(\bar{z})} \geq$$
$$\geq -\frac{|a_{i(k+1)}(\bar{z})| - \mathrm{Re}\,a_{i(k+1)}(\bar{z})}{2g_{i(k+1)}(\bar{z})},$$

тому

$$\mathrm{Re}\,Q^n_{i(k)}(\bar{z}) \geq \mathrm{Re}\,b_{i(k)}(\bar{z}) - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(k+1)}(\bar{z})| - \mathrm{Re}\,a_{i(k+1)}(\bar{z})}{2g_{i(k+1)}(\bar{z})}.$$

Нехай $i_k = 1$:

$$\mathrm{Re}\,Q^n_{i(k)}(\bar{z}) \geq 1 - \frac{a_1+b_1+2p_{i(k-1)1}+1}{c+k}\mathrm{Re}\,z_1 -$$
$$- \frac{b_1+p_{i(k)1}}{2(c+k)}\,\frac{|z_1(1-z_1)| - \mathrm{Re}\,(z_1(1-z_1))}{1/2-\mathrm{Re}\,z_1} -$$
$$- \sum_{j=2}^{3} \frac{b_j+p_{i(k)j}}{2(c+k)}\,\frac{|z_j| - \mathrm{Re}\,z_j}{1/2-\mathrm{Re}\,z_j} \geq$$
$$\geq 1 - \frac{a_1+b_1+2p_{i(k-1)1}+1}{c+k}\mathrm{Re}\,z_1 - \frac{b_1+p_{i(k)1}}{c+k}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,z_1\right) -$$
$$- \sum_{j=2}^{3} \frac{b_j+p_{i(k)j}}{c+k} = \frac{a_1+p_{i(k)}}{c+k}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,z_1\right) +$$
$$+ \frac{2c-a_1-b_1-2b_2-2b_3-1}{2(c+k)} \geq g_{i(k)}(\bar{z}). \tag{20}$$

Нехай $i_k = 2$:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} Q^n_{i(k)}(\bar z) \ge 1 - \frac{a_2 + b_2 + 2p_{i(k-1)2} + p_{i(k-1)3} + 1}{c+k}\operatorname{Re} z_2 - \\
&- \frac{b_3 + p_{i(k-1)3}}{c+k}\operatorname{Re} z_3 - \frac{b_2 + p_{i(k)2}}{2(c+k)}\,\frac{|z_2(1-z_2)| - \operatorname{Re}(z_2(1-z_2))}{1/2 - \operatorname{Re} z_2} - \\
&- \frac{b_3 + p_{i(k)3}}{2(c+k)}\,\frac{|z_3(1-z_3)| - \operatorname{Re}(z_3(1-z_3))}{1/2 - \operatorname{Re} z_3} - \frac{b_1 + p_{i(k)1}}{2(c+k)}\,\frac{|z_1| - \operatorname{Re} z_1}{1/2 - \operatorname{Re} z_1} \ge \\
&\ge 1 - \frac{a_2 + b_2 + 2p_{i(k-1)2} + p_{i(k-1)3} + 1}{c+k}\operatorname{Re} z_2 - \frac{b_3 + p_{i(k-1)3}}{c+k}\operatorname{Re} z_3 - \\
&- \frac{b_1 + p_{i(k)1}}{c+k} - \frac{b_2 + p_{i(k)2}}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_1\right) - \frac{b_3 + p_{i(k)3}}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_1\right) = \\
&= \frac{a_2 + p_{i(k-1)2} + p_{i(k-1)3}}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_2\right) + \\
&+ \frac{2c - a_2 - 2b_1 - b_2 - b_3 - 1}{2(c+n)} \ge g_{i(k)}(\bar z).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Нехай $i_k = 3$:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} Q^n_{i(k)}(\bar z) \ge 1 - \frac{a_2 + b_3 + p_{i(k-1)2} + 2p_{i(k-1)3} + 1}{c+k}\operatorname{Re} z_3 - \\
&- \frac{b_2 + p_{i(k-1)2}}{c+k}\operatorname{Re} z_2 - \frac{b_1 + p_{i(k)1}}{2(c+k)}\,\frac{|z_1| - \operatorname{Re} z_1}{1/2 - \operatorname{Re} z_1} - \\
&- \frac{b_2 + p_{i(k)2}}{2(c+k)}\,\frac{|z_2(1-z_2)| - \operatorname{Re}(z_2(1-z_2))}{1/2 - \operatorname{Re} z_2} - \\
&- \frac{b_3 + p_{i(k)3}}{2(c+k)}\,\frac{|z_3(1-z_3)| - \operatorname{Re}(z_3(1-z_3))}{1/2 - \operatorname{Re} z_3} \ge 1 - \frac{b_2 + p_{i(k-1)2}}{c+k} \times \\
&\times \operatorname{Re} z_2 - \frac{a_2 + b_3 + p_{i(k-1)2} + 2p_{i(k-1)3} + 1}{c+k}\operatorname{Re} z_3 - \frac{b_1 + p_{i(k)1}}{c+k} - \\
&- \frac{b_2 + p_{i(k)2}}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_2\right) - \frac{b_3 + p_{i(k)3}}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_3\right) = \\
&= \frac{a_2 + p_{i(k-1)2} + p_{i(k-1)3}}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} z_2\right) +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2c-a_2-2b_1-b_2-b_3-1}{2(c+n)} \geq g_{i(k)}(\bar{z}). \tag{22}$$

З нерівностей (20)–(22) випливає, що для довільного натурального $n$ і довільного мультиіндексу $i(s)$, $1 \leq s = k \leq n$, нерівність (18) доведена. Отже, оцінка (18) справджується для $s = \overline{1,n}$.

Використовуючи оцінку (18) для залишків підхідних дробів $Q^n_{i(k)}(\bar{z})$, покажемо, що послідовність підхідних дробів $\{f_n(\bar{z})\}_{n=1}^{\infty}$,

$$f_n(\bar{z}) = b_0(\bar{z}) + \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{3} \frac{a_{i(k)}(\bar{z})}{b_{i(k)}(\bar{z})} = b_0(\bar{z}) + \sum_{i_1=1}^{3} \frac{a_{i(1)}(\bar{z})}{Q^n_{i(1)}(\bar{z})},$$

ГЛД (13) є рівномірно обмеженою всередині області $\Omega$.

Нехай $K$ — довільний компакт області $\Omega$ і

$$M = \max\{|z_i| : i = 1,2,3,\ \bar{z} \in K\},$$

$$\varepsilon = \min\{1/2 - \operatorname{Re} z_i : i = 1,2,3,\ \bar{z} \in K\}.$$

Тоді для підхідних дробів $f_n(\bar{z})$, $n = 1,2,\ldots$, маємо

$$|f_n(\bar{z})| \leq |b_0(\bar{z})| + \sum_{i_1=1}^{3} \left| \frac{a_{i(1)}(\bar{z})}{Q^n_{i(1)}(\bar{z})} \right| \leq |b_0(\bar{z})| + \sum_{i_1=1}^{3} \frac{|a_{i(1)}(\bar{z})|}{g_{i(1)}(\bar{z})} \leq$$

$$\leq \left|1 - \frac{a_1+b_1+1}{c} z_1\right| + \frac{b_1+1}{c} \frac{|z_1(1-z_1)|}{1/2 - \operatorname{Re} z_1} + \sum_{j=2}^{3} \frac{b_j}{c} \frac{|z_j|}{1/2 - \operatorname{Re} z_j} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{a_1+b_1+1}{c} M + \frac{b_1+b_2+b_3+1}{c\varepsilon} M + \frac{(b_1+1)M^2}{c\varepsilon} \equiv: L.$$

Оскільки раціональні функції $f_n(\bar{z})$, $n = 1,2,\ldots$, є рівномірно обмеженими всередині області $\Omega$, то ці функції є голоморфними в області $\Omega$.

Нехай

$$\Delta := \left\{ \bar{z} \in \mathbb{C}^3 : 0 \leq \operatorname{Re} z_i \leq 1/4, \operatorname{Im} z_i = 0, \quad i = 1,2,3 \right\},$$

і $\bar{z}_0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)$ — деяка фіксована точка, $\bar{z}_0 \in \Delta$.

Позначимо $a = \max\{a_1, a_2\}$, $b = \max\{b_1, b_2, b_3\}$. Зауважимо, що

$$\max_{\bar{z}_0 \in \Delta}\{z_i^0;\ z_i^0(1-z_i^0), \quad i = 1,2,3\} = \frac{1}{4},$$

і для довільного мультиіндексу $i(k)$: $p_{i(k)} \le k$. Тоді, враховуючи формули (10)–(12), для довільного мультиіндексу $i(k)$ одержимо такі оцінки для елементів ГЛД (13):

$$\begin{aligned}
&b_{i(0)}(\bar{z}_0) = 1 - \frac{a_1 + b_1 + 1}{c} z_1^0 \ge \frac{1}{2} + \frac{2c - a_1 - b_1 - 1}{4c} \ge \frac{1}{2},\\
&a_{i(k+1)}(\bar{z}_0) \le \frac{1}{4}\frac{(a+k+1)(b+k+1)}{(c+k)(c+k+1)},\\
&b_{i(k)}(\bar{z}_0) \ge \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

з урахуванням формули (16)

$$\delta_k := \min\left\{\frac{b_{i(k)}(\bar{z}_0) b_{i(k+1)}(\bar{z}_0)}{a_{i(k+1)}(\bar{z}_0)},\ i_s = 1,2,3,\ s = \overline{1, k+1},\ \bar{z}_0 \in \Delta\right\} \ge$$

$$\ge \frac{(c+k)(c+k+1)}{(a+k+1)(b+k+1)} = \gamma_k.$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k$ є розбіжним, і за теоремою 3.2 гіллястий ланцюговий дріб (13) є поточково збіжним на множині $\Delta$. За багатовимірним узагальненням теореми Стільтьєса-Віталі (теорема 3.3) послідовність підхідних дробів $\{f_n(\bar{z})\}$ ГЛД (13) є послідовністю голоморфних функцій в області $\Omega$, рівномірно обмежених всередині області $\Omega$. Оскільки послідовність $\{f_n(\bar{z})\}$ збігається в кожній точці множини $\Delta \subset \Omega$, яка є тривимірним околом деякої точки (наприклад, $(1/8, 1/8, 1/8) \in \Delta$), то послідовність $\{f_n(\bar{z})\}$ збігається рівномірно на довільному компакті $K \subset \Omega$ до деякої голоморфної функції $f_1^*(\bar{z})$.

(Б) Покажемо, що $f_1^*(\bar{z})$ збігається з функцією $X_1(a_1, a_2, \bar{b}; c; \bar{z})$ на множині $\Delta$. Позначимо

$$\widehat{Q}_{i(n+1)}^{n+1}(\bar{z}) = P_{i(n+1)}(\bar{z}),\ \ \widehat{Q}_{i(s)}^{n+1}(\bar{z}) = b_{i(s)}(\bar{z}) + \sum_{i_{s+1}=1}^{3} \frac{a_{i(s+1)}(\bar{z})}{\widehat{Q}_{i(s+1)}^{n+1}(\bar{z})},\ s = \overline{1, n}.$$

Використовуючи методику виведення формули різниці між підхідними дробами ГЛД [4] і розвинення (8)–(9) для $j = 1$, одержимо

$$X_1(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z}) - f_n(\bar{z}) =$$

$$= (-1)^n \sum_{i_1,\dots,i_{n+1}=1}^{3} \frac{\prod\limits_{r=1}^{n+1} a_{i(r)}(\bar{z})}{\widehat{Q}^{n+1}_{i(n+1)}(\bar{z}) \prod\limits_{r=1}^{n} \left[ Q^n_{i(r)}(\bar{z})\, \widehat{Q}^{n+1}_{i(r)}(\bar{z}) \right]},\ n = 1, 2, \dots .$$

Якщо $\bar{z} \in \Delta$, то для довільного натурального $n$, для довільних мультиіндексів $i(k)$, $i(r)$ елементи $a_{i(k)}(\bar{z})$ невід'ємні, $Q^n_{i(r)}(\bar{z})$, $\widehat{Q}^{n+1}_{i(r)}(\bar{z})$ додатні. Тому справджується нерівність

$$f_{2m}(\bar{z}) \le X_1(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z}) \le f_{2m+1}(\bar{z}), \quad m = 1, 2 \dots \tag{23}$$

Оскільки послідовність $\{f_n(\bar{z})\}$ рівномірно збігається до функції $f_1^*(\bar{z})$, то з нерівності (23)

$$f_1^*(\bar{z}) \equiv X_1(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z}) \quad \text{при} \quad \bar{z} \in \Delta.$$

Враховуючи, що функція $X_1(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z})$ голоморфна в деякому $\delta$-околі нуля (оскільки $F_s(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{0}) \equiv 1$), то за теоремою єдиності аналітичної функції (теорема 3.4) $f_1^*(\bar{z}) \equiv X_1(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z})$ в цьому $\delta$-околі.

Отже, ГЛД (13) рівномірно збігається всередині області $\Omega$ до голоморфної функції, що є аналітичним продовженням функції $X_1(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z})$ з деякого $\delta$-околу нуля в область $\Omega$.

Аналогічна методика застосована при дослідженні збіжності формальних розвинень $X_2(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z})$, $X_3(a_1, a_2, \bar{b}, c, \bar{z})$ у ГЛД. Теорему доведено. □


[1] *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and applications. — Chichester: E. Horwood; New York: Halsted Press, 1976. — 312 p.

[2] *Манзій О.С.* Дослідження розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля $F_3$ у гіллястий ланцюговий дріб // Теорія наближень функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України. — 2000. — **31**. — С. 344–353.

[3] *Антонова Т.М., Гоєнко Н.П.* Наближення відношення функцій Лаурічелли $F_D$ гіллястим ланцюговим дробом типу Ньорлунда у комплексній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — **47**, № 2. — С. 7–15.

[4] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наукова думка, 1986. — 176 с.

[5] *Graham I., Kohr J.* Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions. — New Jork: Marcel Dekker Inc., 2003. — 528 p.

[6] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Т. II. — М.: Наука, 1976. — 400 с.

[7] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби: Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

## APPROXIMATION FOR RATIOS OF LAURICELLA-SARAN FUNCTIONS $F_S$ WITH REAL PARAMETERS BY BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

*Nataliya HOYENKO*[1], *Tamara ANTONOVA*[2], *Sergij RAKINTSEV*[2]

[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine
[2]National University "Lvivska Polytechnica",
12 Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine

The expansions of ratios for hypergeometric functions of Lauricella-Saran $F_S(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c; z_1, z_2, z_3)$ into branched continued fractions are built. The convergence of these branched continued fractions are investigated in domain $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_i| + \mathrm{Re}\ z_i < 1, i = \overline{1,3}\}$ when parameters of function $F_S$ are real.