# ПОБУДОВА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗА НАПЕРЕД ЗАДАНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ІНТЕГРАЛА ВІД ЇХ СТЕПЕНІВ


*Тарас ВАСИЛИШИН*

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *taras_vasylyshyn@mail.ru*

Редакція отримала статтю 15 червня 2011 р.

В роботі показано, що для наперед заданої скінченної послідовності комплексних чисел $\{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}\}$ існує інтегровна обмежена на відрізку $[0,1]$ функція $f$ така, що

$$\int_0^1 f^n(t)\,dt = \begin{cases} a_{m_i}, & n = m_i \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Цей результат має відношення до дослідження множини характерів алгебри симетричних аналітичних функцій на $L_\infty[0,1]$.

## 1 Вступ

Симетричні поліноми є природними інваріантами дії групи підстановок на просторі всіх поліномів і досліджуються у рамках класичної теорії інваріантів. Останнім часом зріс інтерес до інваріантів нескінченнопороджених груп симетрій на просторах поліномів та аналітичних функцій банахового простору.

УДК: 517.98; MSC 2000: 46515, 46520

*Ключові слова і фрази:* симетричні поліноми на банахових просторах, проблема моментів

Робота підтримана грантом ДФФД України № Ф35/531-2011

Поліном $P$ на $\ell_1$ називається симетричним, якщо

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\right),$$

де $\sigma$ — перестановка на множині натуральних чисел.

Поліном $P$ на $L_\infty[0,1]$ називається симетричним, якщо $P(\sigma x) = P(x)$ для кожного $\sigma \in \Sigma$, де $\Sigma$ — група вимірних автоморфізмів відрізка $[0,1]$.

Відомо [1], що поліноми $F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, де $k = 1, 2, \ldots$, утворюють алгебраїчний базис у алгебрі всіх симетричних поліномів на $\ell_1$, а поліноми $R_k(x) = \int_0^1 x^k(t)\, dt$, де $k = 1, 2, \ldots$, утворюють алгебраїчний базис у алгебрі всіх симетричних поліномів на $L_\infty[0,1]$.

Для випадку $\ell_1$ правильне наступне твердження (див. [2]).

**Твердження.** *Нехай $x \in \ell_1$. Якщо для деякого натурального $m$ маємо $F_i(x) = 0$ для кожного $i \geq m$, то $x = 0$.*

За допомогою цього твердження в [2] доведено, що існує характер на рівномірній алгебрі симетричних аналітичних функцій на $B_{\ell_p}$, який не є функціоналом значення в деякій точці простору $\ell_1$.

Цікавим є аналогічне питання для алгебр симетричних функцій на просторі $L_\infty[0,1]$. У цій роботі розв'язується наступна задача.

**Задача.** Нехай маємо деяку скінченну множину $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subset \mathbb{N}$ і відповідну множину $\{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}\} \subset \mathbb{C}$. Побудувати функцію $f_{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}} : [0,1) \to \mathbb{C}$, вимірну за Лебегом і таку, що

$$R_n(f_{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}}) = \begin{cases} a_{m_i}, & \text{якщо } n = m_i, \\ 0, & \text{якщо } n \in \mathbb{N} \setminus \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}. \end{cases}$$

## 2 Зв'язок із тригонометричною проблемою моментів

Дана задача частково розв'язується за допомогою розв'язку тригонометричної проблеми моментів, яка полягає у наступному. Дано нескінченну послідовність комплексних чисел $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ таку, що $c_{-k} = \overline{c}_k$ і $c_0$

— дійсне число. Потрібно знайти неспадну функцію $\sigma(\theta)$, $-\pi \le \theta \le \pi$, таку, що

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\, d\sigma(\theta) \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Основний результат розв'язання цієї проблеми виражається такою теоремою.

**Теорема** ([3], с. 223, Теорема 5.1.2)**.** *a) Для існування розв'язку тригонометричної проблеми моментів необхідно й достатньо, щоб при кожному n форма*

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{n} c_{\alpha-\beta}\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta \tag{1}$$

*була невід'ємною.*

*b) Тригонометрична проблема моментів не може бути невизначена.*

*c) Розв'язок $\sigma(\theta)$ має нескінченну кількість точок росту в тому і тільки в тому випадку, коли форма* (1) *додатня.*

*d) $\sigma(\theta)$ можна визначити за коефіцієнтами Фур'є*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta)e^{ik\theta}\, d\theta = -\frac{c_k - (-1)^k c_0}{ik}$$

*за винятком нульового коефіцієнта, який можна вибрати довільно.*

Нехай маємо множину $\{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}\}$. Візьмемо таку послідовність $\{c_l\}_{-\infty}^{+\infty}$:

$$c_0 = 1, \quad \overline{c}_{-n} = c_n = \begin{cases} a_{m_i}, & n = m_i \\ 0, & n \in \mathbb{N}\backslash\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}. \end{cases}$$

Для послідовності $\{c_l\}_{-\infty}^{+\infty}$, за теоремою, можна знайти $\sigma(\theta)$. Оскільки $\sigma(\theta)$ знаходиться з певністю до сталої, то можемо покласти $\sigma(-\pi) = -\pi$. Оскільки $c_0 = 1$, то $1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(\theta)$, звідки $\sigma(\pi) = 2\pi + \sigma(-\pi) = \pi$. Отже, $\sigma : [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi]$.

Припустимо, що функція $\sigma(\theta)$ строго монотонно зростаюча. Тоді існує $\sigma^{-1}(\tau)$, причому $\sigma^{-1}$ є зростаючою. Покладемо $f_{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}} =$

$e^{i\sigma^{-1}(2\pi t-\pi)}$. Тоді

$$R_n(f_{a_{m_1},a_{m_2},\ldots,a_{m_k}}) = \int_0^1 e^{in\sigma^{-1}(2\pi t-\pi)}\,dt = \left|\begin{array}{c}\tau = 2\pi t-\pi\\ d\tau = 2\pi dt\end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\sigma^{-1}(\tau)}\,d\tau = \left|\begin{array}{c}\theta = \sigma^{-1}(\tau)\\ \tau = \sigma(\theta)\end{array}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\,d\sigma(\theta) = c_n.$$

Отже, у випадку строго монотонної функції $\sigma(\theta)$ задача розв'язана.

Але умова строгої монотонності $\sigma(\theta)$ звужує клас тих наборів $\{a_{m_1}, a_{m_2},\ldots,a_{m_k}\}$, для яких може бути побудовано $f_{a_{m_1},a_{m_2},\ldots,a_{m_k}}$ цим способом. Наприклад, візьмемо $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Тоді $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ і $c_n = 0$ при $n \geq 3$.

Покладемо $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 1$. Тоді, як неважко переконатися,

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} c_{\alpha-\beta}\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta = 0.$$

Отже, форма не є додатною. За теоремою, $\sigma(\theta)$ не може мати нескінченну кількість точок росту, тому не є строго монотонною.

У наступних розділах для довільного набору $\{a_{m_1}, a_{m_2},\ldots,a_{m_k}\}$ побудовано функцію $f_{a_{m_1},a_{m_2},\ldots,a_{m_k}}$ без використання підходу, викладеного в даному розділі.

## 3 Загальна конструкція

Спочатку розглянемо деякі функції, які діють із $[0,1)$ в $\mathbb{C}$.

Кожне число $x \in [0,1)$ можна зобразити у двійковій системі числення, тобто у вигляді

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots,$$

де $a_1,\ldots,a_n,\ldots \in \{0,1\}$. Для чисел, які мають два різні зображення, будемо використовувати ті, які подаються у вигляді скінченної суми. Наприклад, у випадку

$(*)$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$(**)$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

використовуємо для $\frac{1}{2}$ зображення $(*)$. Таким чином, кожному $x$ однозначно ставиться у відповідність послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Визначимо функції $a_n(x)$:

$$a_n(x) = a_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}\right) = a_n.$$

Ці функції мають таку властивість:

1°. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N},\ m < n$, за умови, що $x \geq \frac{1}{2^m}$ :

$$a_n(x) = a_n\left(x - \frac{1}{2^m}\right).$$

Розглядаємо функції, які діють з півінтервала $[0, 1)$ в одиничне коло $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Нехай маємо дві послідовності $\{s_n\}, \{t_n\} \subset S$. Для кожного натурального $n$ означимо функцію $M_n(x)$:

$$M_n(x) = \begin{cases} s_n & \text{при } a_n(x) = 0, \\ t_n & \text{при } a_n(x) = 1. \end{cases}$$

Із властивості 1° для функцій $a_n(x)$ випливає така властивість для $M_n(x)$:

2°. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N},\ m < n$, за умови, що $x \geq \frac{1}{2^m}$ :

$$M_n(x) = M_n\left(x - \frac{1}{2^m}\right).$$

Числа $s_n$ і $t_n$ виберемо такими:

$$s_n = e^{-\frac{i\pi/2}{n}}, t_n = e^{\frac{i\pi/2}{n}}.$$

Нехай

$$b_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } a_n(x) = 0 \\ \ \ 1 & \text{при } a_n(x) = 1. \end{cases}$$

Тоді можемо записати $M_n(x)$ у вигляді:

$$M_n(x) = e^{i\pi/2\frac{b_n(x)}{n}}.$$

Нехай

$$f_{(n)}(x) = \prod_{k=1}^{n} M_k(x) = \prod_{k=1}^{n} e^{i\pi/2\frac{b_k(x)}{k}} = \exp\left(i\pi/2\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k(x)}{k}\right).$$

Функції $f_{(n)}(x)$ будуть вимірними за Лебегом як добутки вимірних функцій $M_k(x)$.

Обчислимо $\int_0^1 f^\alpha_{(n)}(x)\,dx$ для довільного $\alpha \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 f^\alpha_{(n)}(x)\,dx = \int_0^1 \prod_{k=1}^n M_k^\alpha(x)\,dx = \int_0^{1/2} s_1^\alpha \prod_{k=2}^n M_k^\alpha(x)\,dx +$$
$$+\int_{1/2}^1 t_1^\alpha \prod_{k=2}^n M_k^\alpha(x)\,dx = s_1^\alpha \int_0^{1/2} \prod_{k=2}^n M_k^\alpha(x)\,dx + t_1^\alpha \int_{1/2}^1 \prod_{k=2}^n M_k^\alpha(x-1/2)\,dx =$$
$$= (s_1^\alpha + t_1^\alpha) \int_0^{1/2} \prod_{k=2}^n M_k^\alpha(x)\,dx = (s_1^\alpha + t_1^\alpha)(s_2^\alpha + t_2^\alpha) \int_0^{1/4} \prod_{k=3}^n M_k^\alpha(x)\,dx =$$
$$= (s_1^\alpha + t_1^\alpha)(s_2^\alpha + t_2^\alpha)\ldots(s_n^\alpha + t_n^\alpha) \int_0^{1/2^n} dx = \prod_{k=1}^n \frac{s_k^\alpha + t_k^\alpha}{2} =$$
$$= \prod_{k=1}^n \frac{e^{-i\pi/2\frac{\alpha}{k}} + e^{i\pi/2\frac{\alpha}{k}}}{2} = \prod_{k=1}^n \cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{k}\right).$$

Позначимо через $K$ множину тих $x \in [0,1)$, для яких існує $\lim\limits_{n\to\infty} f_{(n)}(x)$, тобто існує

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n M_k(x) = \prod_{k=1}^\infty M_k(x) = \exp\left(i\pi/2 \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k(x)}{k}\right).$$

Очевидно, множина $K$ збігається з множиною тих $x$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{b_k(x)}{k} \tag{2}$$

збігається.

Оцінимо міру множини $K$.

**Теорема 1.** *Множина* $K = \{x \in [0,1) : \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{b_n(x)}{n}\right| < \infty\}$ *має міру* 1.

***Доведення.*** Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1), \mathcal{F}, \mu)$, де $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини $\Omega = [0,1)$, $\mu$ — міра Лебега.

Легко бачити (див., напр., [4]), що $b_n(x) = \begin{cases} -1, & a_n(x) = 0 \\ 1, & a_n(x) = 1 \end{cases}$ є випадковими величинами на даному ймовірнісному просторі, причому

$$\mathbf{P}(b_n(x) = -1) = \mathbf{P}(b_n(x) = 1) = \frac{1}{2}$$

і $b_1(x), \ldots, b_n(x)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Скористаємось таким відомим твердженням.

**Твердження** ([4], с. 48, Теорема 2). *Нехай маємо послідовність незалежних випадкових величин $X_n$ таку, що математичне сподівання $\mathbf{M}X_n = 0$ для кожного $n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}X_n < \infty$, де $\mathbf{D}X_n$ — дисперсія випадкової величини $X_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ збігається майже напевно.*

Візьмемо $X_n = \frac{b_n(x)}{n}$. Тоді послідовність $X_n$ є послідовністю незалежних випадкових величин, $\mathbf{M}X_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(x)}{n}$ збігається майже напевно, тобто множина тих $x$ із $[0, 1)$, для яких ряд збігається, має міру 1. Теорему доведено. □

Для $x \in K$ покладемо $f(x) = \exp\left(i\pi/2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{k}\right)$, а для $x \in [0, 1) \backslash K$ покладемо $f(x) = 1$. Оскільки послідовність вимірних функцій $f_{(n)}(x)$ поточково збігається до $f(x)$ на множині міри 1, то $f(x)$ вимірна і можна здійснити граничний перехід під знаком інтеграла. Тому для довільного $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{(n)}^{\alpha}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\pi/2 \frac{\alpha}{k}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\pi/2 \frac{\alpha}{k}\right).$$

Останній добуток завжди збігається, бо збігається інтеграл, якому він дорівнює.

**Теорема 2.** *Для того, щоб $\int_0^1 f^{\alpha}(x)\,dx = 0$ необхідно й достатньо, щоб існувало таке $k$, що число $\frac{\alpha}{k}$ ціле непарне.*

***Доведення.*** *Достатність.* Якщо існує $k$ таке, що $\frac{\alpha}{k}$ ціле непарне, то $\cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{k}\right) = 0$ і, відповідно,

$$\int_0^1 f^\alpha(x)\,dx = \prod_{m=1}^{\infty} \cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{m}\right) = 0.$$

*Необхідність.* Якщо не існує такого $k$, що $\frac{\alpha}{k}$ ціле непарне, то всі члени добутку не дорівнюють нулю. $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{k}\right)$ не дорівнює нулю, коли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{k}\right)$ збіжний. Дослідимо поведінку загального члена ряду при прямуванні $k$ до нескінченності:

$$-\ln\cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{k}\right) \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right)^2\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{2k}\right)^2 = \frac{\pi^2\alpha^2}{8}\cdot\frac{1}{k^2}.$$

Отже, ряд збіжний, тому $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\pi/2\frac{\alpha}{k}\right) \neq 0$. □

## 4 Функції із наперед заданими значеннями інтеграла

Нехай

$$P_n(x) = \exp\left(i\pi/2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{k}\right)$$

та $\alpha \in \mathbb{N}$. Визначимо

$$F_{n\alpha} = \int_0^1 P_n^\alpha(x)\,dx = \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{k}\right).$$

Очевидно, що $F_{n\alpha} = 0$ при $\alpha > n$ і $0 < F_{n\alpha} < 1$ при $\alpha \leq$ n.

Побудуємо функції $f_n : [0,1) \to \mathbb{C}$ такі, що

$$\int_0^1 f_n^\alpha(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{де } \alpha = n, \\ 0, & \text{де } \alpha \neq n. \end{cases} \tag{3}$$

Покладемо

$$f_1(x) = \frac{1}{F_{11}} P_1(x),$$

$$f_n(x) = \begin{cases} C_{nk} f_k(nx - k + 1), & \text{де } \frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n},\ k = 1, \ldots, n-1, \\ C_{nn} P_n(nx - n + 1), & \text{де } \frac{n-1}{n} \leq x < 1, \end{cases}$$

де

$$C_{nk} = e^{i\pi/k} \sqrt[k]{F_{nk}} \sqrt[n]{n/F_{nn}}, \quad k < n,$$
$$C_{nn} = \sqrt[n]{n/F_{nn}}.$$

Перевіримо властивість (3).

$$\int_0^1 f_1^\alpha(x)\,dx = \frac{1}{F_{11}^\alpha}\int_0^1 P_1^\alpha(x)\,dx = \frac{1}{F_{11}^\alpha}\cdot F_{1\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{де } \alpha = 1,\\ 0, & \text{де } \alpha > 1.\end{cases}$$

$$\int_0^1 f_n^\alpha(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} C_{nk}^\alpha f_k^\alpha(nx-k+1)\,dx +$$
$$+\int_{\frac{n-1}{n}}^1 C_{nn}^\alpha P_n^\alpha(nx-n+1)\,dx = \left| \begin{array}{l} y = nx-k+1,\\ dy = ndx,\\ x = \frac{k-1}{n}, y = 0,\\ x = \frac{k}{n}, y = 1; \end{array}\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} C_{nk}^\alpha\cdot\frac{1}{n}\int_0^1 f_k^\alpha(y)\,dy + \frac{1}{n}C_{nn}^\alpha\int_0^1 P_n^\alpha(y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} C_{nk}^\alpha\delta_k^\alpha + \frac{1}{n}C_{nn}^\alpha F_{n\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{де } \alpha > n,\\ \frac{1}{n}C_{nn}^n F_{nn}, & \text{де } \alpha = n,\\ \frac{1}{n}(C_{n\alpha}^\alpha + C_{nn}^\alpha F_{n\alpha}), & \text{де } \alpha < n.\end{cases}$$

$$\frac{1}{n}C_{nn}^n F_{nn} = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{n/F_{nn}}\right)^n\cdot F_{nn} = 1,$$

$$\frac{1}{n}(C_{n\alpha}^\alpha + C_{nn}^\alpha F_{n\alpha}) = \frac{1}{n}\left(\left(e^{i\pi/\alpha}\sqrt[\alpha]{F_{n\alpha}}\sqrt[n]{n/F_{nn}}\right)^\alpha + \left(\sqrt[n]{n/F_{nn}}\right)^\alpha\cdot F_{n\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(e^{i\pi}\cdot F_{n\alpha}\left(\frac{n}{F_{nn}}\right)^{\alpha/n} + F_{n\alpha}\left(\frac{n}{F_{nn}}\right)^{\alpha/n}\right) = 0.$$

Отже,

$$\int_0^1 f_n^\alpha(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{де } \alpha = n,\\ 0, & \text{де } \alpha \neq n.\end{cases}$$

Нехай $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Побудуємо функцію $f_{n,a}(x)$ таку, що

$$\int_0^1 f_{n,a}^\alpha(x)\,dx = \begin{cases} a, & \text{де } \alpha = n,\\ 0, & \text{де } \alpha \neq n.\end{cases}$$

Для цього достатньо покласти

$$f_{n,a}(x) = |a|^{1/n} e^{i \arg a/n} f_n(x).$$

Нехай маємо деяку скінченну множину $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subset \mathbb{N}$ і відповідну множину $\{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_n}\} \subset \mathbb{C}$. Побудуємо таку функцію $f_{a_{m_1},\ldots,a_{m_n}}(x)$, що

$$\int_0^1 f^{\alpha}_{a_{m_1},\ldots,a_{m_n}}(x)\,dx = \begin{cases} a_{m_k}, & \text{якщо } \alpha = m_k, \quad k = 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{якщо } \alpha \in \mathbb{N} \backslash \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}. \end{cases}$$

Покладемо

$$f_{a_{m_1},\ldots,a_{m_n}}(x) = n^{1/m_k} f_{m_k, a_{m_k}}(nx - k + 1), \quad \frac{k-1}{n} \le x < \frac{k}{n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тоді

$$\int_0^1 f^{\alpha}_{a_{m_1},\ldots,a_{m_n}}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n^{\alpha/m_k} f^{\alpha}_{m_k, a_{m_k}}(nx - k + 1)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n^{\alpha/m_k} \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 f^{\alpha}_{m_k, a_{m_k}}(y)\,dy = \begin{cases} a_{m_k}, & \text{де } \alpha = m_k, \quad k = 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{де } \alpha \in \mathbb{N} \backslash \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}. \end{cases}$$

Отже, функція $f_{a_{m_1},\ldots,a_{m_n}}$ є розв'язком поставленої у статті задачі.

[1] *Gonzales M., Gonzalo R. and Jaramillo J.A.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – **59**, № 2. — P. 681–697.

[2] *Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on $\ell_p$ // Bull. London Math. Soc. — 2003. — **35**. — P. 55–64.

[3] *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. — 310 с.

[4] *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. — М.: Мир, 1973. – 305 с.

# CONSTRUCTION OF COMPLEX-VALUED FUNCTIONS BY PRE-DEFINED VALUES OF INTEGRALS OF THEIR POWERS

*Taras VASYLYSHYN*

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *taras_vasylyshyn@mail.ru*

For a given finite sequence of complex numbers $\{a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}\}$ there exists a bounded integrated function $f$ on $[0,1]$ such that

$$\int_0^1 f^n(t)\,dt = \begin{cases} a_{m_i}, & n = m_i \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This result has relations to investigations of the set of characters of symmetric analytic functions on $L_\infty[0,1]$.