Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2016. — Т.13

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2016. — V.13

ГРАФИ ШРАЄРА ВІЛЬНИХ ДОБУТКІВ ЦИКЛІЧНИХ ГРУП

МАРІЯ ФЕДОРОВА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

М. Федорова. *Графи Шраєра вільних добутків циклічних груп* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2016. — Т.13. — С. 9–20.

Елементи групи скінчено автоматних підстановок над алфавітом X діють на множині слів над цим алфавітом. Таким чином природно виникають послідовності графів Шраєра на рівнях та орбітальні графи Шраєра. В роботі розглянуті властивості цих графів для вільного добутку скінченних груп, заданих автоматами. За допомогою поняття шраєрової еквівалентності показаний взаємозв'язок між груповими властивостями та властивостями відповідних графів Шраєра.

M. Fedorova, *Schreier graphs of free products of cyclic groups*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016) 9–20.

The group of finite automaton permutations over an alphabet X acts on the set of words over this alphabet. This action determines sequences of level Schreier graphs and orbital Schreier graphs. In the paper we consider properties of such graphs for free products of finite groups generated by finite automata. Using the concept of Schreier equivalence we study the interplay between group properties and the properties of the corresponding Schreier graphs.

1. Вступ

Досліджуючи підгрупи вільних груп, О. Шраєр запропонував [1] розглядати побудовані конструкції за допомогою графічного представлення, тим самим ввівши природне узагальнення графів Келі, яке зараз називають графами Шраєра. Дж. Грос довів [2], що кожен зв'язний регулярний граф парного степеня є ізоморфним до деякого підлеглого неорієнтованого графа Шраєра і показав, що зв'язний граф Шраєра є накриваючим простором для букету кіл. В роботах [3, 4] показано, що спектри графів Шраєра групи автоматних підстановок можуть мати екзотичну структуру. Для великого класу груп, заданих автоматами, Є. Бондаренко [5] довів, що

2010 *Mathematics Subject Classification:* 05C25, 20F65 *УДК:* 519.171

Ключові слова та фрази: Граф Шраєра, вільний добуток, автоматна підстановка, автомат; Schreier graph, free product, automaton permutation

E-mail: mfed@univ.kiev.ua

всі орбітальні графи Шраєра Γ_ω мають субекспоненційне зростання, обмежене згори $n^{(log\, n)^c}$, де c – деяка константа. Р. Григорчуком, Т. Нагнібедою та П. Ліманом у [6] встановлено, що графами Шраєра на рівнях груп блимаючих лампочок є так звані павутинні графи, які раніше вивчались з точки зору фізики і теорії комунікацій. В. Дікерт, А. Мясніков, А. Вайс у [7] вказали критерії неаменабельності графів Шраєра для певних вільних добутків з об'єднаною підгрупою та HNN-розширень. А. Мясніков та Д. Савчук у [8] навели приклад 4-регулярного нескінченного автоматного графа проміжного росту, як графа Шраєра певної групи, породженої трьостановим автоматом.

Розвиток теорії груп автоматних підстановок протягом кількох останніх десятиріч показав, що графи Шраєра є ефективним інструментом для дослідження таких груп та їх застосування в різних розділах математики.

Природно виникає задача вивчення графів Шраєра вільних добутків груп, дослідженню якої присвячена дана стаття. Зокрема, розглядаються занурення вільного добутку скінченної кількості скінченних циклічних груп у групу скінченно автоматних підстановок $FGA(X)$, запропоновані А. Олійником [9] та автором [10], та властивості графів Шраєра таких представлень.

Стаття має наступну структуру. У другому та третьому розділах вказано основні означення та відомі факти, що стосуються графів Шраєра та автоматних підстановок, відповідно. Четвертий розділ присвячено властивостям орбітальних графів Шраєра, а також графів Шраєра групи, породженої скінченним набором скінченно автоматних підстановок, на рівнях. Наведено ряд властивостей графів Шраєра заданих дій вільних добутків груп. У п'ятому розділі введено поняття шраєрової вкладеності, доведена умова розкладу у вільний добуток групи, що є шраєрово вкладеною у вільний добуток скінченної кількості скінченних груп простих порядків. Наведена конструкція серії занурень вільного добутку скінченної кількості скінченних груп та доведена шраєрова вкладеність дії, побудованої А. Олійником [9], у дії вказаної серії.

2. Графи Шраєра

Нахай група G зі скінченною системою твірних S діє на множині M.

Означення 2.1. *Графом Шраєра* $\Gamma(G, S, M)$ дії групи G на множині M назвемо орієнтований реберно-помічений граф з множиною вершин M та множиною ребер $M \times S$, де для кожного $m \in M$ та $s \in S$ ребро (m, s) веде з m у $s(m)$ і має помітку s.

Для випадку транзитивної дії можна навести еквівалентне означення. Нехай G — група зі скінченною системою твірних S і підгрупою H.

Означення 2.2. *Графом Шраєра* $\Gamma(G, S, H)$ групи G за її підгрупою H та системою твірних S назвемо орієнтований реберно-помічений граф, множиною вершин якого є множина $G/H = \{Hg : g \in G\}$ правих класів суміжності, множиною ребер — $(G/H) \times S$, та множиною поміток — S. Ребро (Hg, h) позначимо h, а його початок s та кінець r визначимо за правилами:

$$s(Hg, h) = Hg, \quad r(Hg, h) = Hgh$$

для всіх $Hg \in G/H$ та $h \in S$.

Так побудований граф буде графом Шраєра у сенсі першого означення. Достатньо обрати в якості множини вершин графа M праві класи суміжності G/H з дією множення справа.

Для доведення того, що для транзитивної дії граф $\Gamma(G, S, M)$, що задовольняє умови першого означення, є графом Шраєра у сенсі другого означення, зафіксуємо деяку вершину $m \in M$ графа Шраєра. Позначимо стабілізатор цієї точки через $H = St(m)$. З транзитивності дії випливає що для кожної вершини графа Шраєра m' існує шлях, який веде з m у m'. Зафіксуємо такий шлях і розглянемо елемент $g \in G$, який є добутком поміток вздовж цього шляху. Змінимо позначки вершин графа Шраєра наступним чином: точці m поставимо у відповідність $St(m)$, а вершині m' — клас суміжності Hg. Зауважимо, що цей клас не залежить від вибору шляху, тобто для довільного шляху h з m до m' виконується $m^{gh^{-1}} = m$.

Таким чином отримуємо, що наведені означення графа Шраєра у випадку транзитивної дії є еквівалентними.

Наведемо ряд необхідних у подальшому властивостей графів Шраєра.

Твердження 2.3. *Нехай група G породжується елементами $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ простих порядків $p_1, \dots, p_k$ відповідно. Тоді для всіх $i \in \{1, \dots, k\}$ та для кожної вершини графа Шраєра $\Gamma(G, S, M)$ групи G, що діє на множині M, при даній вершині або є петля з поміткою a_i, або ця вершина входить у простий цикл довжини p_i, помітки всіх ребер якого a_i.*

Доведення. У графі Шраєра групи G елементи під дією твірного переходять самі в себе за умови, що на них діє твірний один або p_i разів, $1 \le i \le k$. У термінах графа Шраєра це означає наявність петлі чи циклу довжини p_i, помітки всіх ребер якого a_i. □

Наслідок 2.4. *Нехай група G діє на множині M і породжується елементами $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ простих порядків $p_1, \dots, p_k$ відповідно. Тоді кожна вершина графа Шраєра $\Gamma(G, S, M)$ цієї групи має рівно одне "вхідне" і одне "вихідне" ребро з поміткою a_i, $1 \le i \le n$.*

Зауваження 2.5. "Вхідне" і "вихідне" ребра збігаються у випадку петлі.

3. Скінченно автоматні зображення

Означення 3.1. *Автоматом* назвемо четвірку даних $A = \langle X, Q, \varphi, \psi \rangle$, де

X – скінченний вхідний та вихідний алфавіт,

Q – непорожня множина внутрішніх станів автомата A,

φ та ψ функції переходу та виходу, що діють з $Q \times X$ в Q та в X, відповідно.

Зокрема, скінченним автоматом назвемо автомат зі скінченною кількістю станів: $|Q| < \infty$. Автомат називається перестановочним, якщо для кожного стану автомата звуження вихідної функції в кожному його стані визначає певну перестановку на алфавіті X. Автомат називається ініціальним якщо у нього є виділений стан.

Перетворення множини X^* всіх скінченних слів над алфавітом X, визначені скінченними ініціальними перестановочними автоматами, утворюють групу відносно суперпозиції, яка позначається $FGA(X)$. Елементи цієї групи називаються скінченно автоматними підстановками над алфавітом X.

Розглянемо s ($s \geq 2$) груп $G_1, \ldots, G_s$, прості непарні порядки яких дорівнюють $p_1, \ldots, p_s$ відповідно, $1 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_s$, $n = p_s > 2$. Побудуємо скінченно автоматне зображення їх вільного добутку над алфавітом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Позначимо через $\overline{x_1}$ слово $x_1 \ldots x_1 \in X^s$. У X^s для $1 \leq i \leq s$ визначимо підмножини:

$$M_i = \{\underbrace{x \ldots x}_{i} x_1 \ldots x_1 : x \in X, x \neq x_1\}.$$

Визначимо $D_i = \bigcup\limits_{j \neq i} M_j^{G_i}$, де

$$M_j^{G_i} = \{\omega^g : \omega \in M_j, g \in G_i\}, 1 \leq i, j \leq s,$$

$$D_i = \{\overline{x_1}^{hg} : h \in G_j, g \in G_i, h \neq e_j, j \neq i\}.$$

Лема 3.2. *([9]) D_i є об'єднанням орбіт визначеної вище групи G_i на множині слів довжини s над алфавітом X, $1 \leq i \leq s$.*

Визначимо на G_i, $1 \leq i \leq s$, функції φ_{ti}, $t \in \{1; 2\}$, котрі кожному елементу $g \in G_i$ ставлять у відповідність перетворення $\varphi_{ti}(g)$ множини X^∞ всіх нескінченних слів над X. Для всіх $k \in \mathbb{N}$ довільне нескінченне слово $\omega \in X^\infty$ можна розбити на склади довжини k:

$$\omega = \omega[k, 1]\omega[k, 2] \ldots$$

Як наслідок, для довільних $g \in G_i$, $u \in X^\infty$ визначимо $v_t = (\varphi_{ti}(g))(u)$ наступним чином:

$$v_1[s, 1] = u[s, 1] \text{ і } v_1[s, j] = \begin{cases} (u[s, j])^g, & \text{якщо } u[s, j-1] \in D_i, \\ u[s, j], & \text{інакше;} \end{cases} \quad \text{для } j \geq 2; \quad (1)$$

$$v_2[2s, 1] = u[2s, 1] \text{ і } v_2[s, j] = \begin{cases} (u[s, j])^g, & \text{якщо } u[s, j-2] \in D_i, \\ u[s, j], & \text{інакше;} \end{cases} \quad \text{для } j \geq 3. \quad (2)$$

Ми задали скрізь визначене перетворення множини нескінченних слів над X. Зауважимо, що перетворення $\varphi_{ti}(e_i)$ є тотожним.

Лема 3.3. *([9, 10]) Для кожного елемента $g \in G_i$ і перетворення $\varphi_{ti}(g)$ простору X є скінченно автоматною підстановкою над алфавітом X. А функція φ_{ti} є мономорфізмом з групи G_i в групу скінченно автоматних підстановок $FGA(X)$.*

Нехай $\mathbb{G}_t(G_1, \ldots, G_s)$ — підгрупа в групі скінченно автоматних підстановок над X, породжена $\varphi_{t1}(G_1), \ldots, \varphi_{ts}(G_s)$, $1 \leq t \leq 2$.

Теорема 3.4. *([9, 10]) Має місце ізоморфізм*

$$\mathbb{G}_t(G_1, \ldots, G_s) \simeq G_1 * \ldots * G_s,\ 1 \leq t \leq 2.$$

4. Властивості графів Шраєра на рівнях

Нехай група G породжена скінченним набором S (скінченно) автоматних підстановок над алфавітом X. Група G діє на множині всіх скінченних слів X^* та нескінченних слів X^ω над X. Для кожного нескінченного слова ω можна розглянути граф Шраєра Γ_ω дії групи G на орбіті слова ω.

Означення 4.1. Для кожного $\omega \in X^\omega$ граф Шраєра $\Gamma(G, S, \omega)$ дії групи G на G-орбіті точки ω називається *орбітальним графом Шраєра* і позначається Γ_ω.

Група G діє на множинах X^n, $n \geq 1$, тобто множинах слів рівної довжини. Таким чином природно виникає послідовність Γ_n скінченних графів Шраєра дії G на X^n, $n \geq 1$. Їх називають графами Шраєра дії групи G на рівнях.

Опишемо ряд властивостей графів Шраєра на рівнях побудованих дій (1) і (2).

Твердження 4.2. *Єдині слова довжини n, що не змінюються під дією всіх твірних у $\mathbb{G}_1(C_{p_1}, \ldots, C_{p_s})$ та $\mathbb{G}_2(C_{p_1}, \ldots, C_{p_s})$ мають вигляд $00\ldots00ab$ та $00\ldots cdef$ відповідно, де $ab \in X^2$, $cdef \in X^4$ – довільні склади з X^2 та X^4.*

Доведення. Розглянемо випадок дії (1).
Необхідність. Розглянемо дію довільного твірного на слово виду $00\ldots00ab$. За означенням дії склад слова довжини 2 буде змінюватись під дією деякого твірного лише якщо попередній склад цього слова відмінний від 00. В нашому випадку єдиним ненульовим складом може бути останній, який не впливає на зміну слова. Таким чином слово виду $00\ldots00ab$ не змінюється під дією будь-якого твірного.
Достатність. Нехай деяке слово ω довжини m не змінюється під дією всіх твірних, що задають $C_{p_1} * \ldots * C_{p_s}$. З урахуванням означення дії, це означає, що жоден з перших $n-1$ складів не належать множинам D_i, $1 \leq i \leq m$. Таке можливо лише якщо вони належать $X^2 \setminus \bigcup_1^s D_i = \{00\}$. Отже, перші $n-1$ складів цього слова складаються з нулів. Останній склад не впливає на зміну слова, тому його можна обрати довільним.

Доведення для випадку (2) проводиться аналогічним чином, але враховується, що на зміну слова не впливають чотири останні символи. □

На n-тому рівні граф Шраєра вільного добутку містить 9 (відповідно 81) компонент зв'язності, що мають вигляд вершини з двома петлями, поміченими A_1 та

A_2. Такі компоненти задаються словами довжини $2n$, перші $(n-1)$ (відповідно $(n-2)$) складів довжини 2 яких є 00, а останній — довільний.

Зауваження 4.3. Всі зв'язні компоненти графа Шраєра Γ_1 групи $\mathbb{G}_t(C_{p_1}, \ldots, C_{p_s})$, $1 \le t \le 2$, $s \ge 2$, мають рівно по 2 ребра.

Одним зі способів побудувати компоненту зв'язності Υ_2 на $(n+1)$-ому рівні є обрання компоненти Υ_1 графа Шраєра Γ_n на рівні n, що містить петлі. Якщо вершина у Υ_1, при якій є петля з поміткою A_i, позначена словом останній (у випадку дії 1) або передостанній (у випадку дії 2) склад якого належить множині D_i, $1 \le i \le 2$, то при переході на наступний рівень незалежно від того, який склад буде дописано до помітки заданої вершини, петля, позначена A_i перетвориться на цикл довжини 3, кожне ребро якого має помітку A_i.

Твердження 4.4. *Розглянемо довільний рівень k. Для всіх натуральних $j > k$, для довільної компоненти зв'язності Υ графа Шраєра на рівні k у графі Шраєра на рівні j знайдеться компонента зв'язності, ізоморфна Υ.*

Доведення. Розглянемо довільну вершину компоненти зв'язності Υ графа Шраєра на рівні k. Нехай ця вершина має помітку ω і під дією твірного A_i, $1 \le i \le 2$, переходить у вершину з поміткою ω_i, яка, взагалі кажучи, може співпадати з ω. Зафіксуємо довільний рівень $j > k$. Покажемо, що компонента зв'язності Υ_j графа Шраєра на рівні j, якій належить вершина з поміткою $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\omega$, ізоморфна Υ.

Розглянемо як діють твірні A_i, $1 \le i \le 2$, на $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\omega$. Оскільки $00 \notin D_i$, то перші $(j-k+1)$ складів для представлення (1) та перші $(j-k+2)$ складів для представлення (2) не змінюються. Тобто, префікси довжини $2(j-k+1)$ слів, у які переходить $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\omega$ під дією твірного A_i, мають вигляд $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\Pi_2(\omega_i)$. Подальше перетворення слова $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\omega$ залежить лише від вигляду ω, тому слово $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\omega$ під дією твірних A_i переходить у слово $\underbrace{00\ldots00}_{2(j-k)}\omega_i$.

Застосувавши аналогічні міркування до всіх інших вершин Υ_j, бачимо, що є взаємнооднозначна відповідність між мітками і переходами вершин Υ_j та Υ, отже вони ізоморфні між собою.

$\square$

Таким чином, для того, щоб знайти на наступному рівні компоненту зв'язності, ізоморфну заданій, достатньо до початку слова ω (зліва) дописати склад 00, який не вплине на перетворення слова ω, і побудувати компоненту графа Шраєра.

Лема 4.5. *Розглянемо компоненту зв'язності Γ_0 графа Шраєра на рівні, що має γ ребер, відмінних від петель. Нехай в ній побудовано деякий цикл без повторів* *ребер, що має меншу кількість ребер, ніж γ. У цьому циклі завжди можна знайти вершину, в яку входить або з якої виходить ребро, що не належить заданому циклу.*

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що в заданому циклі π не існує жодної вершини, що мала б незадіяне у побудові даного циклу ребро, що не є петлею.

Розглянемо множину E_- ребер, що не входять у цикл π, але належать компоненті зв'язності Γ_0. Оскільки, за припущенням, π не містить жодної вершини, що мала б не задіяне у побудові циклу ребро, що не є петлею, то всі вершини, що з'єднані з ребрами з множини E_-, також не належать циклу π. Таким чином ми можемо розбити компоненту зв'язності Γ_0 на дві підкомпоненти Γ_1 і Γ_2, які містять та не містять вершини та ребра циклу π відповідно. Враховуючи властивість циклу π, яку було припущено, Γ_1 і Γ_2 є відокремленими, а Γ_0 не є компонентою зв'язності. Це неможливо, тому цикл π покриває всі вершини компоненти графа Шраєра, що розглядається. Але, за умовою задачі, цикл покриває не всі ребра компоненти. Тобто існує вершина компоненти, що належить циклу, і є початком або кінцем ребра, що не належить заданому циклу. □

Теорема 4.6. *Нехай G — вільний добуток скінченної кількості скінченних груп. Існує точна дія групи G скінченно автоматними підстановками над деяким алфавітом X така, що графи Шраєра на рівнях цієї дії не містять кратних ребер, відмінних від петель.*

Доведення. Розглянемо конструкцію (1) та (2) занурення вільного добутку скінченної кількості скінченних груп у групу автоматних підстановок. У даній побудові твірні задані автоматами, що або не рухають слово, або перетворюють його по-різному. Тобто дія двох твірних на слово може бути однакова тоді і лише тоді, коли вони діють на слово тривіально. При побудові графа Шраєра на рівні це означає, що два ребра з різними помітками будуть з'єднувати однакові вершини (в один бік) тоді і лише тоді, коли ці вершини співпадають, тобто ребра утворюватимуть петлі. □

Розглянемо задані представлення (1) і (2) для вільного добутку $C_p * \ldots * C_p$ скінченної кількості циклічних груп порядку p.

Теорема 4.7. *Нехай Υ — компонента зв'язності графа Шраєра Γ_n $(n > 1)$, яка містить більше однієї вершини, S — кількість ребер в Υ, які є відмінними від петель. Тоді для кожного k такого, що $1 \leq k \leq S/p$, в Υ існує орієнтований замкнений ланцюг довжини pk.*

Доведення. Якщо Γ_n містить більше однієї вершини, то її можна задати дією на слово ω довжини $n \geq 2$, що має вигляд, відмінний від вказаного у твердженні 4.2. Подіємо на це слово твірними A_1 і A_2 та отримаємо компоненту графа Шраєра на рівні n. За твердженням 4.2, є твірний елемент, який діє нетривіально на слово ω.

У зв'язку з тим, що ми діємо у $C_p * \ldots * C_p$, отримуємо, що в цій компоненті є цикл довжини p, що складається з ребер з однаковими помітками.

Збільшимо цей цикл наступним чином. За лемою 4.5 в заданому циклі існує вершина, з якої виходить або в яку входить ребро з поміткою, що відрізняється від тієї, якою був побудований перший цикл, бо у вершину може входити і виходити не більше двох ребер з однаковою поміткою (а у першому циклі задіяні два ребра з певною поміткою: вхідне і вихідне). Це означає, що обрана вершина належить деякому циклу довжини p, ребра якого позначені іншою поміткою, ніж ребра початкового циклу. Отже, жодне ребро цього циклу не задіяне при побудові заданого циклу. Побудуємо новий цикл наступним чином: почнемо з обраної вершини і пройдемо знайдений цикл довжини p. Повернемось у задану вершину і пройдемо по початковому циклу довжини p, повернемось у задану вершину. Отримаємо цикл довжини $2p$. Продовжимо побудову аналогічно. За індукцією доведемо, що це можливо.

База індукції. У графі Шраєра на рівні, більшому за 1 існує цикл довжини p згідно з побудовою вище.

Нехай у заданій компоненті графа Γ_n ми маємо побудований цикл із кількістю ребер $p(t-1)$. За його допомогою побудуємо цикл довжиною pt. За лемою 4.5, у цьому циклі є вершина, з якої входить або виходить ребро, не задіяне у побудові заданого циклу довжини $p(t-1)$. За принципом побудови заданого циклу довжини $p(t-1)$, якщо хоча б одне ребро не належить попередньому циклу, то і всі ребра цього циклу не належать заданому циклу. Побудуємо новий цикл наступним чином: почнемо з обраної вершини і пройдемо знайдений цикл довжини p. Повернемось в задану вершину і пройдемо по початковому циклу довжини $p(t-1)$, повернемось в задану вершину. Отримаємо цикл довжини $p(t-1)+p=pt$. □

Розглянемо орбіту нескінченного слова w. Позначимо P_i множину префіксів довжини i всіх слів, що належить цій орбіті. Нехай k_i — кількість елементів множини P_i. Тоді має місце наступна

Лема 4.8. *Орбітальний граф Шраєра* Γ_ω *має необмежену кількість вершин тоді і тільки тоді, коли послідовність* $(k_i)_{i\geq 1}$ *необмежена.*

Доведення. Нехай орбітальний граф Шраєра Γ_ω має необмежену кількість вершин. Припустимо, що послідовність $(k_i)_{i\geq 1}$ обмежена. Тоді існує натуральне число N таке, що для всіх $i \geq N$ виконується $k_i = k_N$. З цього випливає, що кількість слів у даній орбіті дорівнює k_N, що відповідає кількості вершин у Γ_ω і суперечить необмеженості Γ_ω.

Нехай послідовність $(k_i)_{i\geq 1}$ необмежена. Це означає, що кількість різних префіксів слів в даній орбіті нескінченна. Отже, і кількість слів в орбіті, що відповідає кількості вершин орбітального графа Шраєра Γ_ω, необмежена. □

Розглянемо орбіту нескінченного слова що має вигляд $\omega_{00} = v00\ldots00\ldots$, де v — довільне нетривіальне скінченне слово над алфавітом X.

Твердження 4.9. *Орбітальний граф Шраєра $\Gamma_{\omega_{00}}$, заданого орбітою нескінченного слова $\omega_{00} = v00\dots00\dots$, де v — довільне нетривіальне скінченне слово над алфавітом X, має необмежену кількість вершин.*

Доведення. Розглянемо останній ненульовий склад довжини 2 слова v (або слова $v0$, якщо $v \in X$). Цей склад належить $D_1 \cup D_2$. Отже, під дією першої та/або другої твірної він змінюватиме наступний нульовий склад на склад з $D_1 \cup D_2$. Таким чином, кожна наступна дія твірних створює новий нетривіальний префікс більшої довжини, ніж на попередньому кроці. Тобто для всіх k_i, $i \geq 1$, виконується $k_i < k_{i+1}$. Це означає, що послідовність $(k_i)_{i\geq 1}$ є необмеженою, і за лемою 4.8 орбітальний граф Шраєра $\Gamma_{\omega_{00}}$ також є нескінченним. □

5. Шраєрова вкладеність та еквівалентність

В термінах графів Шраєра можна дати природну достатню умову точності дії групи на множині. А саме, нехай група G діє на множинах M_1 та M_2, тобто задано зображення ψ_1 та ψ_2 групи G на цих множинах відповідно.

Означення 5.1. Будемо казати, що зображення ψ_1 *шраєрово вкладене* у зображення ψ_2, якщо в групі G знайдеться система твірних A така, що кожна компонента зв'язності графа Шраєра цієї групи відносно системи твірних А дії ψ_1 ізоморфна деякій компоненті графа Шраєра дії ψ_2.

Два зображення ψ_1 та ψ_2 назвемо *шраєрово еквівалентними*, якщо зображення ψ_1 шраєрово вкладене у ψ_2 і навпаки.

Теорема 5.2. *Нехай G – група, ψ_1 та ψ_2 – зображення цієї групи такі, що ψ_1 шраєрово вкладене у ψ_2. Якщо зображення ψ_2 є точним, то ψ_1 також є точним.*

Доведення. За означенням ψ_1 не буде точною дією у випадку, якщо знайдеться неодиничний елемент $g_1 \cdots g_n$ групи G такий, що фіксує довільне слово множини, на якій діє група G. Це означає, що на графі Шраєра дії ψ_1 групи G шляхи з помітками ребер $g_1, \dots, g_n$ фіксують довільну точку, тобто утворюють цикли. За припущенням теореми, дія ψ_1 групи G шраєрово вкладена у дію ψ_2 групи G, тому в графі Шраєра дії ψ_2 групи G також всі шляхи з помітками $g_1, \dots, g_n$ є циклами. Це означає, що неодиничний елемент $g_1 \cdots g_n$ групи G фіксує довільне слово множини, на якій діє група G, що суперечить точності дії ψ_2. □

Помітимо, що дія, задана співвідношенням (1), є шраєрово вкладеною у дію, що задана співвідношенням (2):

Теорема 5.3. *Зображення групи $G_1 * \dots * G_s$, задане співвідношенням* (1)*, є шраєрово вкладеним у зображення, задане співвідношенням* (2)*.*

Доведення. Щоб це довести виразимо перше зображення через друге.

Нехай зображення 2 діє на слово ω. Розглянемо підслова ω, що складаються з парних ω_{ev} та непарних ω_{od} складів ω довжини s:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega[s,1]\omega[s,2]\omega[s,3]\dots\\ \omega_{od} &= \omega[s,1]\omega[s,3]\omega[s,5]\dots\\ \omega_{ev} &= \omega[s,2]\omega[s,4]\omega[s,6]\dots\end{aligned}$$

Нехай v_2 — слово, що є результатом другої дії на ω та задається співвідношенням (2), $v_{1,od}$ та $v_{1,ev}$ — слова, що є результатами першої дії на ω_{od} та ω_{ev} відповідно та задаються співвідношенням (1). Порівнявши склади v_2, $v_{1,od}$ та $v_{1,ev}$, маємо наступні співвідношення для довільного натурального k:

$$\begin{cases} v_2[s,2k-1] = v_{1,od}[s,k],\\ v_2[s,2k] = v_{1,ev}[s,k].\end{cases} \tag{3}$$

Таким чином, ми отримаємо, що для того, щоб виразити другу дію через першу, достатньо розкласти слово ω, на яке діє друге відображення, на слова ω_{ev} та ω_{od} з парних та непарних складів ω відповідно, застосувати до них перше перетворення, та утворити нове слово, використавши співвідношення (3).

Розглянемо довільну компоненту зв'язності графа Шраєра першої дії. Зафіксуємо деяку вершину цієї компоненти, позначену деяким словом ω_1. Доведемо, що у графі Шраєра другої дії є ізоморфна обраній компонента зв'язності. Для цього розглянемо слово $\omega_{00,1}$, що для натуральних k буде утворене наступним чином:

$$\begin{cases} \omega_{00,1}[s,2k-1] = 00;\\ \omega_{00,1}[s,2k] = \omega_1[s,k].\end{cases} \tag{4}$$

Враховуючи, що $00 \notin D_i$, $1 \le i \le s$, то під дією другого відображення непарні склади $\omega_{00,1}$ не будуть змінюватись, а парні будуть змінюватись так само, як склади ω_1 під дією першого перетворення. Таким чином, компонента зв'язності графа Шраєра другої дії, що містить в собі помітку вершини словом $\omega_{00,1}$, буде ізоморфна компоненті зв'язності графа Шраєра першої дії, що містить помітку вершини словом ω_1.

Отже, для довільної компоненти зв'язності графа Шраєра першої дії можна знайти ізоморфну компоненту зв'язності графа Шраєра другої дії. Тобто, перша дія є шраєрово вкладеною у другу дію. □

Наслідок 5.4. *З того, що перетворення* (2) *задає вільний добуток, випливає, що перетворення* (1) *теж задає вільний добуток.*

Простим прикладом шраєрово еквівалентних дій до (1) або (2) є дії, побудовані аналогічним чином, з використанням перестановки елементів алфавіту X. Тобто, при побудові множин D_i ми можемо використати замість слова $\overline{x_1}$ довільне інше слово $\overline{x_i}$, $2 \le i \le s$.

Побудуємо клас дій, в які буде шраєрово вкладене перетворення (1). Визначимо на G_i, $1 \leq i \leq s$, серію наборів функцій $\varphi_{ti}, t \geq 3$, котрі кожному елементу $g \in G_i$ ставлять у відповідність скінченно автоматні перетворення $\varphi_{ti}(g)$ множини X^{∞} всіх нескінченних слів над X. Для довільних $g \in G_i$, $u \in X^{\infty}$, визначимо $v_t = (\varphi_{ti}(g))(u)$ наступним чином. Для довільного $1 \leq j < t+1$ покладемо $v_t[s, j] = u[s, j]$, а для всіх $j \geq t+1$

$$v_t[s, j] = \begin{cases} (u[s, j])^g, & \text{якщо } u[s, j-n] \in D_i, \\ u[s, j], & \text{інакше.} \end{cases} \tag{5}$$

Аналогічно до позначення $\mathbb{G}_t(G_1, \ldots, G_s)$ для $t = 1, 2$, нехай $\mathbb{G}_t(G_1, \ldots, G_s)$ — підгрупа в групі скінченно автоматних підстановок над X, породжена $\varphi_{t1}(G_1), \ldots, \varphi_{ts}(G_s)$, $t \geq 3$. Подібно до міркувань [9, 10], можна довести:

Теорема 5.5. *Має місце ізоморфізм* $\mathbb{G}_t(G_1, \ldots, G_s) \simeq G_1 * \ldots * G_s, t \geq 1.$

Дія, задана співвідношенням 1, є шраєрово вкладеною в дії, що задані співвідношенням 5. Доведення цього факту проводиться аналогічно доведенню теореми 5.5, з розбиттям слова ω, на яке діє зображення (5), на t слів

$$\begin{cases} v_t[s, tk-1] = v_{1,1}[s, k], \\ v_t[s, tk-2] = v_{1,2}[s, k], \\ \ldots \\ v_t[s, tk-t+1] = v_{1,t-1}[s, k]. \end{cases} \tag{6}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. O. Schreier, *Die untergruppen der freien gruppen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. – Springer Berlin/Heidelberg, **5**:1 (1927) 161–183.
2. J.L. Gross, *Every connected regular graph of even degree is a Schreier coset graph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B. **22**:3 (1977) 227–232.
3. L. Bartholdi, R.I. Grigorchuk, *On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups*, Тр. МИАН. **231** (2000) 5–45.
4. Р.И. Григорчук, В.В. Некрашевич, В.И. Сущанский, *Автоматы, динамические системы и группы* , Тр. МИАН. **231** (2000) 134–214.
5. I.V. Bondarenko, *Growth of Schreier graphs of automaton groups*, Math. Annalen. **354**:2 (2012) 765–785.
6. R. Grigorchuk, P.H. Leemann, T. Nagnibeda, *Lamplighter groups, de Bruijn graphs, spider-web graphs and their spectra*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **49**:20 (2016) 205004.
7. V. Diekert, A.G. Myasnikov, A. Weiß, *Amenability of Schreier graphs and strongly generic algorithms for the conjugacy problem*, Proceedings of the 2015 ACM on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, (2015) 141–148.
8. A. Miasnikov, D. Savchuk, *An example of an automatic graph of intermediate growth*, Annals of Pure and Applied Logic. **166**:10 (2015) 1037–1048.
9. А.С. Олийнык, *Свободные произведения конечных групп и группы конечно автоматных подстановок*, Тр. МИАН. **231** (2000) 323–331.
10. М.В. Федорова, *Вільні добутки скінченних груп, задані скінченними автоматами*, Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. **152** (2014) 48–51.

Надійшло 12.02.2016

Після переробки 30.08.2016