Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2016. — Т.13

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2016. — V.13

ДЕЯКІ КОНСТРУКЦІЇ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА В ТЕОРІЇ РЕГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

НАТАЛІЯ ВІКТОРІВНА СТЕПАНЕНКО

Національний Технічний Університет України «КПІ», м.Київ

Н.В. Степаненко. *Деякі конструкції функцій Ляпунова в теорії регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2016. — Т.13. — С. 121–129.

Досліджуються питання можливості зміни коефіцієнтів лінійного розширення динамічної системи для збереження вигляду квадратичної форми, похідна якої в силу цієї системи є знаковизначеною.

N.V. Stepanenko, *Some constructions of Lyapunov's functions in the theory of regular linear extensions of the dynamical systems of torus*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **13** (2016), 121–129.

In this paper the author investigate the question of possibility of a change of the coefficients of linear extensions of a dynamical system for maintenance of quadratic form whose derivative with respect to this system is positive definite.

Introduction

Ключовим питанням в теорії збурення інваріантних многовидів динамічних систем є питання існування функції Гріна [1]. Ця функція дозволяє записувати інваріантні многовиди в явному інтегральному вигляді, що дає можливість дослідженя гладкості інваріантних многовидів, а також неперервну залежність від параметрів. Питання існування функції Гріна тісно пов'язано з питанням існування узагальненої функції Ляпунова, яка розглядається у вигляді квадратичних форм [2]. Такі форми можуть змінювати знак і вироджуватись в деяких точках, але їх похідна в силу певної системи рівнянь є знаковизначеною. Досить часто виникає задача побудови функції Ляпунова [2]–[5]. Знання конкретного вигляду функції Ляпунова дає

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E99 *УДК:* 517.9

Ключові слова та фрази: лінійне розширення динамічної системи, функція Гріна, регулярні та слабо регулярні лінійні розширення, квадратична форма, похідна в силу системи, додатно визначена матриця

E-mail: nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

можливість оцінити величину збурення динамічних систем, при яких зберігаються обмежені інваріантні многовиди. Не дивлячись на глибокі теоретичні дослідження інваріантних тороїдальних многовидів [2], питання побудови функції Гріна і функції Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем на торі залишається відкритим. Дослідженню задачі конструкції функцій Ляпунова для деяких лінійних розширень динамічних систем і присвячена запропонована стаття.

1. Main results

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, дійсна векторна функція $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \dots, a_m(\varphi)\}$ є 2π-періодичною по кожній змінній φ_j, $j = \overline{1, m}$, і задовольняє умові Ліпшиця. Це припущення дозволяє стверджувати, що задача Коші ${}^{d\varphi}/_{dt} = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$ при кожному фіксованому значенні φ_0. Оскільки функція $a(\varphi)$ є періодичною, то вона є обмеженою. Звідси випливає, що кожний такий розв'язок $\varphi_t\,(\varphi_0)$ буде визначеним при всіх $t \in \mathbb{R}$. Квадратна матриця $A(\varphi)$ є $n{\times}n$-вимірною, а її елементами є дійсні скалярні функції, неперервні за сукупністю змінних $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ і періодичні по кожній змінній φ_j. Функція $A(\varphi)$ визначена на m-вимірному торі T_m, тобто $A(\varphi) \in C(T_m)$ і $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$.

Поряд із системою (1) будемо розглядати відповідну неоднорідну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad f(\varphi) \in C(T_m). \tag{2}$$

Нагадаємо (див. [3]) означення простору $C'(T_m; a)$, інваріантного тору системи (2) і функції Гріна задачі про інваріантні тори $G_0(\tau, \varphi)$ системи (1).

Означення 1.1. $C'(T_m; a)$ є підпростором простору $C(T_m)$ неперервних функцій $\Phi(\varphi)$ таких, що суперпозиція $\Phi(\varphi_t(\varphi))$ є неперервно диференційовною функцією дійсної змінної t. При цьому, за означенням,

$$\left.\frac{d\Phi(\varphi_t(\varphi))}{dt}\right|_{t=0} \overset{df}{=} \dot{\Phi}(\varphi)$$

– похідна вздовж розв'язків $\varphi_t(\varphi)$.

Означення 1.2. Говорять, що система (2) має інваріантний тор $x = u(\varphi)$, якщо $u(\varphi) \in C'(T_m; a)$ і виконується тотожність $\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi)\ \forall \varphi \in T_m$.

Позначаючи $\Omega_\tau^t(\varphi)$ нормовану фундаментальну матрицю розв'язків лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{3}$$

$\Omega_\tau^t\big|_{t=\tau} = I_n$, I_n — n-вимірна одинична матриця, нагадаємо означення функції Гріна [2].

Означення 1.3. Якщо існує $n \times n$-вимірна квадратна матриця $C(\varphi) \in C(T_m)$ така, що для функції

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{4}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\} \quad \forall \tau \in R, \quad \forall \varphi \in T_m \tag{5}$$

з додатніми сталими K, γ, не залежними від τ і φ, то функцію (4) називають *функцією Гріна задачі про інваріантні тори* системи (1).

Зауваження. Якщо існує функція Гріна (4) з оцінкою (5), то система (2) при кожній функції $f(\varphi) \in C(T_m)$ має інваріантний тор, який можна записати в явному інтегральному вигляді

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{6}$$

Зауваження. Виконання оцінки (5) для функції (4) є еквівалентним виконанню оцінки $\|G_t(0, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|t|\}$, $\forall t \in R$, $\forall \varphi \in T_m$ для допоміжної функції

$$G_t(0, \varphi) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi), & t \ge 0, \\ \Omega_0^t(\varphi)[C(\varphi) - I_n], & t < 0, \end{cases}$$

з тими ж самими додатніми сталими K, γ.

Зауваження. Якщо існує функція Гріна (4) з оцінкою (5), то наступна функція

$$G_t(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le t, \\ \Omega_\tau^t(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > t, \end{cases}$$

є функцією Гріна задачі про обмежені розв'язки системи (3), тобто неоднорідна система

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(t) \tag{7}$$

при кожній неперервній і обмеженій на $\mathbb{R}$ вектор-функції $f(t)$ буде мати обмежений розв'язок: $x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(\tau, \varphi) f(\tau) d\tau$.

Наслідок 1.4. *Якщо лінійна неоднорідна система* (7) *для деякого фіксованого значення параметра* φ *і неперервної обмеженої на* $\mathbb{R}$ *функції* $f(t)$ *не має обмеженого на* $\mathbb{R}$ *розв'язку, то система* (1) *не має функції Гріна* (4).

Систему (1), яка має єдину функцію Гріна (4) з оцінкою (5) прийнято називати *регулярною*; якщо відомо тільки, що існує хоча б одна така функція (4), то систему (1) називають *слабко регулярною*, а у випадку існування нескінченної кількості різних таких функцій, систему (1) називають *строго слабо регулярною*.

Нагадаємо, що через $\langle y, \bar{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{y}_j$ позначається скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$ – норма вектора y в $\mathbb{R}^n$, $\langle Sy, y\rangle$ – квадратична форма з симетричною матрицею коефіцієнтів S. Норма матриці $M(\varphi)$ розглядається як норма відповідного оператора:

$$\|M(\varphi)\| = \max_{\|y\|=1} \|M(\varphi)y\|, \quad \|M\|_0 = \max_{\varphi\in T_m} \|M(\varphi)\|.$$

Відомий наступний критерій регулярності для систем вигляду (1).

Теорема 1.5. *Нехай $W = \langle S(\varphi)y, y\rangle$, $y \in \mathbb{R}^n$, — квадратична форма із симетричною матрицею коефіцієнтів $S(\varphi) \in C'(T_m; a)$, похідна якої в силу системи рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y$$

є додатно визначеною, тобто

$$\dot{W} = \big\langle [\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)]y, y\big\rangle \geq \|y\|^2, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

тоді система (1) *буде слабко регулярною. Якщо крім того припустити, що*

$$\det S(\varphi) \neq 0 \quad \forall\varphi \in T_m, \tag{9}$$

то система (1) *буде регулярною і у структурі функції Гріна* (4) *матриця $C(\varphi)$ буде матрицею проектування, для якої виконуються тотожності*

$$C^2(\varphi) \equiv C(\varphi), \forall\varphi \in T_m; \quad C(\varphi_t(\varphi)) \equiv \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_t^0(\varphi), \ \forall\varphi \in T_m, \ t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Якщо ж умова (9) *не виконується, а існують такі значення $\varphi = \varphi_0 \in T_m$, при яких виконується рівність $\det S(\varphi_0) = 0$ то система* (1) *буде строго слабко регулярною і кожна з матриць $C(\varphi)$ не буде задовольняти жодної з тотожностей* (10).

Зауваження. Якщо в нерівності (8) симетрична матриця $S(\varphi) \in C'(T_m; a)$ є невиродженою, то для матриці $\bar{S}(\varphi) = -S^{-1}(\varphi)$, буде виконуватись наступна нерівність

$$\big\langle [\dot{\bar{S}}(\varphi) + \bar{S}(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)\bar{S}(\varphi)]x, x\big\rangle \geq \gamma\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \gamma = \mathrm{const} > 0,$$

а це означає, що похідна в силу системи (1) невиродженої квадратичної форми $-\langle S^{-1}(\varphi)x, x\rangle = \langle \bar{S}(\varphi)x, x\rangle$ є додатно визначеною.

Відмітимо, що для подальших досліджень зручніше розглядати систему (1), яка є регулярною, оскільки інваріантний тор, записаний в явному інтегральному вигляді (6) буде зручним для подальших досліджень на гладкість і т.д.

Відомо [3], що слабко регулярну систему (1) завжди можна розширити так, щоб утворена система була регулярною. Одне із найпростіших таких розширень має вигляд

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad \frac{dy}{dt} = x - A^T(\varphi)y. \tag{11}$$

Якщо виконується нерівність (8) з деякою симетричною матрицею $S(\varphi) \in C'(T_m; a)$, то не дивлячись на те чи матриця $S(\varphi)$, вироджується чи ні, наступна квадратична форма $V = p\langle x, y\rangle + \langle S(\varphi)y, y\rangle$ буде невиродженою і її похідна в силу системи (11) при досить великих дійсних значеннях параметру $p > 0$ буде додатно визначеною.

В цьому легко переконатись:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= p\langle A(\varphi)x, y\rangle + p\langle x, x - A^T(\varphi)y\rangle + \langle \dot{S}(\varphi)y, y\rangle + 2\langle S(\varphi)y, x - A^T(\varphi)y\rangle = \\ &= p\|x\|^2 + 2\langle S(\varphi)x, y\rangle + \big\langle [\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)]y, y\big\rangle \geq \\ &\geq p\|x\|^2 - 2\|S\|_0\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \geq \frac{p - \|S\|_0^2}{p+1}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big), \quad p > \|S\|_0^2.\end{aligned}$$

Якщо розглядати систему (11) як самостійну, не припускаючи виконання умови (8), то не при кожній матриці $A(\varphi) \in C(T_m)$ ця система буде регулярною (наприклад, при $A(\varphi) \equiv 0$ ця система не має функції Гріна). Але існує квадратична форма $V = \langle x, y\rangle$, похідна якої в силу системи (11) є невід'ємною $\dot{V} \geq \|x\|^2$.

Отже виникає питання дослідження властивості регулярності систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad \frac{dy}{dt} = B(\varphi)x - A^T(\varphi)y.$$

Продовжуючи узагальнення записаної системи, отримуємо наступну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = A_{11}(\varphi)x_1 + A_{21}(\varphi)x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = A_{21}(\varphi)x_1 + A_{22}(\varphi)x_2. \quad (12)$$

Для охоплення більш широкого класу систем припустимо, що $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ – різної розмірності. Виявляється, що діючи за аналогією попереднім викладам, припускаючи, що для підсистеми системи (12), а саме для системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_2}{dt} = A_{22}(\varphi)x_2.$$

існує квадратична форма $V_2 = \langle S_{22}(\varphi)x_2, x_2\rangle$ така, що її похідна в силу цієї системи є додатно визначеною $\dot{V}_2 \geq \|x_2\|^2$ і існує квадратична форма $V_1 = \langle S(\varphi)x, x\rangle$, похідна якої в силу системи (12) додатно визначена по частині змінних $\dot{V}_1 \geq \|x_1\|^2$ отримаємо, що похідна квадратичної форми $V = pV_1 + V_2$ в силу системи (12) при достатньо великих значеннях параметру p є додатно визначеною. При цьому якщо $S(\varphi)$ – невироджена, то система (12) буде регулярною.

Запишемо умови для існування такої квадратичної форми

$$\begin{aligned}&\big\langle(\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi))x, x\big\rangle \geq \|x_1\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ &\big\langle(\dot{S}_{22}(\varphi) + S_{22}(\varphi)A_{22}(\varphi) + A_{22}^T(\varphi)S_{22}(\varphi))\, x_2, x_2\big\rangle \geq \|x_2\|^2, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}.\end{aligned} \quad (13)$$

Якщо позначити

$$S_2(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{22}(\varphi) \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (14)$$

то нерівності (13) записуються в наступному вигляді

$$\left\langle(\dot S(\varphi)+S(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S(\varphi))x,x\right\rangle \ge \|C_1x\|^2,$$
$$\left\langle(\dot S_2(\varphi)+S_2(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S_2(\varphi))C_2x,C_2x\right\rangle \ge \|C_2x\|^2.$$

Якщо ж відмовитись від вигляду матриць (14) і припустити, що записані вище нерівності виконуються з деякими матрицями $C_1 = C_1(\varphi)$, $C_2 = M_2(\varphi)$, сума яких $C_1(\varphi)+M_2(\varphi) = M_1(\varphi)$ є невиродженою матрицею, то цього не досить, щоб існувала квадратична форма, похідна якої в силу системи (12) була б додатно визначеною. Для того, щоб така форма існувала, потрібно додатково припускати комутативність матриць $M_1(\varphi)$, $M_2(\varphi)$. Це дозволяє приведені вище нерівності записати у вигляді

$$\left\langle(\dot S(\varphi)+S(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S(\varphi))M_1(\varphi)x,M_1(\varphi)x\right\rangle \ge \left\|[M_1(\varphi)-M_2(\varphi)]x\right\|^2,$$
$$\left\langle(\dot S_2(\varphi)+S_2(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S_2(\varphi))M_2(\varphi)x,M_2(\varphi)x\right\rangle \ge \|M_2(\varphi)x\|^2.$$

Основний результат статті міститься в наступному твердженні.

Теорема 1.6. *Припустимо, що симетричні $n\times n$-матриці $S_i(\varphi)\in C'(T_m;a)$, $i=\overline{1,k}$, задовольняють нерівності*

$$\langle(\dot S_i(\varphi)+S_i(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S_i(\varphi))M_i(\varphi)x,M_i(\varphi)x\rangle \ge \left\|[M_i(\varphi)-M_{i+1}(\varphi)]x\right\|^2,$$
$$i=\overline{1,(k-1)}, \tag{15}$$
$$\langle(\dot S_k(\varphi)+S_k(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S_k(\varphi))M_k(\varphi)x,M_k(\varphi)x\rangle \ge \|M_k(\varphi)x\|^2$$

з деякими матрицями $M_i(\varphi)\in C^0(T_m)$, $i=\overline{1,k}$, причому перша з матриць $M_1(\varphi)$, є невиродженою: $\det M_1(\varphi)\neq 0$. *Тоді похідна в силу системи* (1) *квадратичної форми з параметрами*

$$V=\lambda_1\langle S_1(\varphi)x,x\rangle+\cdots+\lambda_{k-1}\langle S_{k-1}(\varphi)x,x\rangle+\langle S_k(\varphi)x,x\rangle \tag{16}$$

буде додатно визначеною при достатньо великих дійсних значеннях параметрів $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{k-1}>0$.

Доведення. Розглянемо спочатку суму матриць із одним скалярним параметром:

$$\lambda_{k-1}S_{k-1}(\varphi)+S_k(\varphi)=\tilde S(\varphi) \tag{17}$$

і покажемо, що при достатньо великих значеннях параметра $\lambda_{k-1}>0$ буде виконуватись нерівність

$$\left\langle[\dot{\tilde S}(\varphi)+\tilde S(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)\tilde S(\varphi)]M_{k-1}(\varphi)x,M_{k-1}(\varphi)x\right\rangle\ge\mu(\lambda_{k-1})\cdot\|M_{k-1}(\varphi)x\|^2, \tag{18}$$

де

$$\mu(\lambda_{k-1})=\frac{\lambda_{k-1}-\gamma-\gamma^2}{2(\lambda_{k-1}-\gamma+1)},\quad \lambda_{k-1}>\gamma+\gamma^2,$$

постійна γ визначена нерівністю

$$\|\dot{S}_i(x) + S_i(x)A(x) + A^T(x)S_i(x)\| \le \gamma \ , \quad i = \overline{1,k}. \tag{19}$$

Ліву частину нерівності (18) запишемо, підставивши суму матриць (17), отримуємо

$$\begin{aligned}&\lambda_{k-1}\big\langle[\dot{S}_{k-1} + S_{k-1}A + A^T S_{k-1}]M_{k-1}x, M_{k-1}x\big\rangle + \\ &\quad + \big\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k][M_k + (M_{k-1} - M_k)]x, [M_k + (M_{k-1} - M_k)]x\big\rangle.\end{aligned} \tag{20}$$

Перший доданок оцінюється на основі нерівностей (15):

$$\lambda_{k-1}\big\langle[\dot{S}_{k-1} + S_{k-1}A + A^T S_{k-1}]M_{k-1}x, M_{k-1}x\big\rangle \ge \lambda_{k-1}\|(M_{k-1} - M_k)x\|^2, \tag{21}$$

при додатних значеннях λ_{k-1}. Для другого доданку із суми (20) маємо

$$\begin{aligned}&\big\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k][M_k + (M_{k-1} - M_k)]x, [M_k + (M_{k-1} - M_k)]x\big\rangle = \\ &= \big\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k]M_k x, M_k x\big\rangle + 2\big\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k]M_k x, (M_{k-1} - M_k)x\big\rangle + \\ &+ \big\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k](M_{k-1} - M_k)x, (M_{k-1} - M_k)x\big\rangle.\end{aligned}$$

Кожний з доданків оцінюється наступним чином

$$2\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k]M_k x, (M_{k-1} - M_k)x\rangle \ge -2\gamma\|M_k x\| \cdot \|(M_{k-1} - M_k)x\| \tag{22}$$

$$\langle[\dot{S}_k + S_k A + A^T S_k](M_{k-1} - M_k)x, (M_{k-1} - M_k)x\rangle \ge -\gamma\|(M_{k-1} - M_k)x\|^2 \tag{23}$$

Враховуючи нерівності (21)–(23), а також останню з нерівностей (15), отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}&\langle[\dot{\tilde{S}}(\varphi) + \tilde{S}(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)\tilde{S}(\varphi)]M_{k-1}(\varphi)x, M_{k-1}(\varphi)x\rangle \ge \\ &\ge (\lambda_{k-1} - \gamma)\|(M_{k-1} - M_k)x\|^2 - 2\gamma\|M_k x\| \cdot \|(M_{k-1} - M_k)x\| + \|M_k x\|^2.\end{aligned} \tag{24}$$

Позначимо $\|(M_{k-1} - M_k)x\| = t_1$, $\|M_k x\| = t_2$ і оцінимо знизу квадратичну форму $\Phi(t_1, t_2) = (\lambda_{k-1} - \gamma)t_1^2 - 2\gamma t_1 t_2 + t_2^2$:

$$\Phi(t_1, t_2) \ge \frac{\lambda_{k-1} - \gamma - \gamma^2}{\lambda_{k-1} - \gamma + 1}(t_1^2 + t_2^2), \ \ \lambda_{k-1} > \gamma + \gamma^2.$$

Таким чином, із нерівності (24) випливає:

$$\begin{aligned}&\langle[\dot{\tilde{S}}(\varphi) + \tilde{S}(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)\tilde{S}(\varphi)]M_{k-1}(\varphi)x, M_{k-1}(\varphi)x\rangle \ge \\ &\ge \frac{\lambda_{k-1} - \gamma - \gamma^2}{\lambda_{k-1} - \gamma + 1}(\|(M_{k-1} - M_k)x\|^2 + \|M_k x\|^2) \ge \\ &\ge \frac{\lambda_{k-1} - \gamma - \gamma^2}{2(\lambda_{k-1} - \gamma + 1)}\|M_{k-1}x\|^2 = \mu(\lambda_{k-1}) \cdot \|M_{k-1}(\varphi)x\|^2,\end{aligned}$$

що і переконує нас в справедливості нерівності (18).

Тепер розглянемо наступну суму матриць

$$\lambda_{k-2}S_{k-2}(\varphi) + \lambda_{k-1}S_{k-1}(\varphi) + S_k(\varphi) = \lambda_{k-2}S_{k-2}(\varphi) + \tilde{S}(\varphi) = \bar{S}(\varphi) \qquad (25)$$

і переконаємось, що при достатньо великих значеннях параметра $\lambda_{k-2} > 0$ виконується нерівність

$$\left\langle [\dot{\bar{S}} + \bar{S}A + A^T\bar{S}]M_{k-2}x, M_{k-2}x \right\rangle \geq \mu(\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1})\|M_{k-2}x\|^2 \qquad (26)$$

де $\mu(\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}) = \dfrac{[\lambda_{k-2} - \gamma(\lambda_{k-1}+1)]\mu(\lambda_{k-1}) - \gamma^2(\lambda_{k-1}+1)^2}{2[\lambda_{k-2} - \gamma(\lambda_{k-1}+1) + \mu(\lambda_{k-1})]} > 0.$

З цією метою в ліву частину нерівності (26) підставимо матрицю (25), будемо мати

$$\begin{aligned}
&\lambda_{k-2}\langle[\dot{S}_{k-2} + S_{k-2}A + A^T S_{k-2}]M_{k-2}x, M_{k-2}x\rangle + \\
&+ \langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}]M_{k-2}x, M_{k-2}x\rangle \geq \lambda_{k-2}\|(M_{k-2} - M_{k-1})x\|^2 + \\
&+ \langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}][M_{k-1} + (M_{k-2} - M_{k-1})]x, [M_{k-1} + (M_{k-2} - M_{k-1})]x\rangle = \\
&= \lambda_{k-2}\|(M_{k-2} - M_{k-1})x\|^2 + \langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}]M_{k-1}x, M_{k-1}x\rangle + \\
&+ 2\langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}]M_{k-1}x, [(M_{k-2} - M_{k-1})]x\rangle + \\
&+ \langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}][(M_{k-2} - M_{k-1})]x, [(M_{k-2} - M_{k-1})]x\rangle.
\end{aligned}$$

Для другого доданку використаємо нерівність (18), а третій і четвертий доданки оцінимо знизу:

$$\begin{aligned}
&2\left\langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}]M_{k-1}x, [(M_{k-2} - M_{k-1})]x\right\rangle \geq \\
&\qquad\qquad \geq -2\gamma(\lambda_{k-1}+1)\left\|M_{k-1}x\right\| \cdot \left\|[(M_{k-2} - M_{k-1})]x\right\|, \\
&\left\langle[\dot{\tilde{S}} + \tilde{S}A + A^T\tilde{S}][(M_{k-2} - M_{k-1})]x, [(M_{k-2} - M_{k-1})]x\right\rangle \geq \\
&\qquad\qquad \geq -\gamma(\lambda_{k-1}+1)\left\|[(M_{k-2} - M_{k-1})]x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Таким чином, ліва частина нерівності (26) оцінюється знизу

$$\begin{aligned}
&\langle[\dot{\bar{S}} + \bar{S}A + A^T\bar{S}]M_{k-2}x, M_{k-2}x\rangle \geq (\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1}\gamma - \gamma)\|[(M_{k-2} - M_{k-1})]x\|^2 - \\
&\quad - 2\gamma(\lambda_{k-1}+1)\|M_{k-1}x\| \cdot \|[(M_{k-2} - M_{k-1})]x\| + \mu(\lambda_{k-1}) \cdot \|M_{k-1}x\|^2 \geq \\
&\quad \geq \frac{\lambda_{k-2}\mu(\lambda_{k-1}) - \gamma\cdot(\lambda_{k-1}+1)\cdot\mu(\lambda_{k-1}) - \gamma^2\cdot(\lambda_{k-1}+1)^2}{\lambda_{k-2} - \gamma\cdot(\lambda_{k-1}+1) + \mu(\lambda_{k-1})} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\|[(M_{k-2} - M_{k-1})]x\|^2 + \|M_{k-1}x\|^2\right) \geq \\
&\quad \geq \frac{\lambda_{k-2}\mu(\lambda_{k-1}) - \gamma\cdot(\lambda_{k-1}+1)\cdot\mu(\lambda_{k-1}) - \gamma^2\cdot(\lambda_{k-1}+1)^2}{2[\lambda_{k-2} - \gamma\cdot(\lambda_{k-1}+1) + \mu(\lambda_{k-1})]} \cdot \|M_{k-2}x\|^2.
\end{aligned}$$

Це підтверджує нерівність (26).

Продовжуючи аналогічним чином, для лінійної комбінації симетричних матриць $S_\lambda(\varphi) = \lambda_1 S_1(\varphi) + \lambda_2 S_2(\varphi) + \dots + \lambda_{k-1} S_{k-1}(\varphi) + S_k(\varphi)$ отримуємо наступну нерівність

$$\langle [\dot{S_\lambda}(\varphi) + S_\lambda(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S_\lambda(\varphi)]M_1(\varphi)x, M_1(\varphi)x\rangle \geq$$
$$\geq \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1})\|M_1(\varphi)x\|^2, \quad (27)$$

де додатний коефіцієнт $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1})$ можна записати у вигляді рівності

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}) =$$
$$= \frac{[\lambda_1 - \gamma \cdot (1+\lambda_2+...+\lambda_{k-1})] \cdot \mu(\lambda_2, ..., \lambda_{k-1}) - \gamma^2 \cdot (1+\lambda_2+...+\lambda_{k-1})^2}{2[\lambda_1 - \gamma \cdot (1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}) + \mu(\lambda_2, \dots, \lambda_{k-1})]}. \quad (28)$$

Причому, для додатних коефіцієнтів має місце формула:

$$\mu(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{k-1}) =$$
$$= \frac{[\lambda_j - \gamma(1+\lambda_{j+1}+...+\lambda_{k-1})] \cdot \mu(\lambda_{j+1}, ..., \lambda_{k-1}) - \gamma^2(1+\lambda_{j+1}+...+\lambda_{k-1})^2}{2[\lambda_1 - \gamma \cdot (1 + \lambda_{j+1} + \dots + \lambda_{k-1}) + \mu(\lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{k-1})]}, \quad (29)$$

для $j = 1, 2, \dots, (k-3)$.

При $j = k-2$ маємо рівність $\mu(\lambda_{k-1}) = \dfrac{\lambda_{k-1} - \gamma - \gamma^2}{2(\lambda_{k-1} - \gamma + 1)}$, $\lambda_{k-1} > \gamma + \gamma^2$. Стала γ визначається нерівністю (19).

Оскільки в нерівності (27) матриця $M_1(\varphi)$ є невиродженою, то ця нерівність і означає, що похідна в силу системи (1) квадратичної форми (16) буде додатно визначеною при достатньо великих дійсних значеннях параметрів $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{k-1} > 0$. □

Зауваження. Із формул (28), (29) випливає, що при достатньо великих значеннях параметрів $\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}$ коефіцієнт $\mu(\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1})$ приймає близькі значення до $\frac{1}{4}$. Легко зауважити, що коефіцієнт $\mu(\lambda_j, \dots, \lambda_{k-1})$ може приймати як завгодно близькі значення до числа $\frac{1}{2^{k-j}}$, $j = 1, 2, \dots, (k-2)$, $k \geq 3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А.М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* – М.: Наука. (1987) 302 с.
2. А.М. Самойленко, *К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе*, Укр. мат. журн. **53**:4 (2001) 513–521.
3. Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко, В.Л. Кулик, *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Київ: Наук. думка, (1990) 270 с.
4. В.Л. Кулик, А.Н. Кулик, Н.В. Степаненко, *Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных*, Математический журнал. Алматы. **11**:1 (2011) 74–86.
5. В.Л. Кулик, Н.В. Степаненко, *Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі*, Укр. мат. журн. **46**:4 (2007) 488–500.

Надійшло 14.01.2016

© Наталія Вікторівна Степаненко, 2016