ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ПЛОСКОЇ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Юрій ТОКОВИЙ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Наукова 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 15 грудня 2003 р.

Побудовано розв'язок плоскої квазістатичної мішаної задачі термопружності у прямокутній області шляхом зведення її до відповідної задачі для напружень.

Проблема побудови розв'язків мішаних задач теорії пружності й термопружності є значно складнішою [1–3] порівняно з розв'язуванням першої та другої крайових задач. Більшість методів, які використовують при розв'язуванні мішаних задач, полягає у зведенні їх до задач, сформульованих для переміщень. Проте при побудові таким способом точних аналітичних розв'язків квазістатичних задач теорії пружності або термопружності у обмежених областях з кутовими точками часто виникають труднощі, які пов'язані із необхідністю виконання крайових умов на межі області, що особливо складно зробити в околі кутових точок.

У даній роботі розв'язування мішаної задачі термопружності у прямокутній області зведено до розв'язування відповідної задачі для напружень. На сторонах прямокутника, де задано переміщення, задаються невідомі спочатку зовнішні зусилля, які вдається знайти завдяки відомому розв'язку силової задачі [4–8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо довге пружне тіло прямокутного поперечного перерізу з однорідного ізотропного матеріалу. Розташуємо вісь Oz прямокутної декартової системи координат вздовж осі тіла. Нехай механічні та теплові навантаження тіла рівномірно розподілені вздовж його осі і діють перпендикулярно до неї. Тоді переміщення вздовж осі тіла, можливо, за виключенням зон біля торців, є лінійною фунцією координати z [9], а, отже, осьова деформація $e_z = e$ =const. Решта компонент вектора переміщень, а також компоненти тензорів напружень та деформації, залежать лише від планарних координат x та y. Таким чином, розглянуте довге тіло знаходиться в умовах плоскої деформації [9], і ми можемо від тривимірного випадку перейти до розгляду двовимірної задачі для довільного поперечного перерізу $D = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$, що є на достатній відстані від торців. Зауважимо, що коли торці тіла жорстко защемлені щодо переміщень в осьовому напрямку, то також справджується гіпотеза плоскої деформації, причому $e_z = 0$ [10,11].

Вважаємо, що механічні та теплові навантаження є квазістаціонарними [12], тобто залежать від часової змінної так, що можна знехтувати інерційними членами в рівняннях руху. Надалі опускатимемо (там, де це не є суттєвим) при описі функцій залежність від часової змінної.

Отже, для прямокутної області D сформулюємо плоску квазістатичну задачу термопружності, яка при відсутності масових сил описується [9-12] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad x \in D, \tag{1}$$

рівнянням суцільності в деформаціях

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad x \in D, \tag{2}$$

фізичними співвідношеннями ($e_z = e = \text{const}$)

$$\begin{aligned} &Ee_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha ET, \quad Ee_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha ET, \\ &Ee = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha ET, \quad Ge_{xy} = \sigma_{xy} \end{aligned} \tag{3}$$

та співвідношеннями Коші

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Тут $\sigma_i, \sigma_{xy}; e_i, e_{xy} (i = x, y)$ – компоненти тензорів напружень і деформації; $u = u^*/l$, $v = v^*/l$; u^*, v^* – розмірні компоненти вектора переміщень; l – деяка довжина; E, G, ν, α – відповідно модулі пружності й зсуву, коефіцієнти Пуассона й лінійного температурного видовження; T –

температурне поле, яке визначається [13] із відповідної задачі теплопровідності.

Розв'язок системи рівнянь (1)–(4) будуємо при заданих на межі області крайових умовах для переміщень

$$u\,|_{x=\pm a} = 0 \tag{5}$$

та напружень

$$\sigma_{xy}|_{x=\pm a} = 0, \quad \sigma_y|_{y=\pm b} = \sigma_{xy}|_{y=\pm b} = 0. \tag{6}$$

Вважаємо, що зовнішні зусилля задовольняють загальні статичні умови рівноваги та закон парності дотичних напружень у кутових точках області. Розв'язування задачі полягає у знаходженні компонент тензорів напружень та деформації, а також вектора переміщень, які задовольняють рівняння (1)–(4) та умови (5), (6).

2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Внаслідок дії температурного поля T в області D виникають напруження, компоненти яких повинні задовольняти на межі умови (6) та

$$\sigma_x|_{x=a} = -p_1(y), \quad \sigma_x|_{x=-a} = -p_2(y). \tag{7}$$

Тут p_1, p_2 – невідомі функції, які слід визначити у вигляді функціональних залежностей від температурного поля T.

Вилучивши зі співвідношень (3) напруження σ_z, отримуємо наступні вирази деформацій через напруження:

$$\begin{aligned} &2Ge_x = (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y - 2\nu Ge + \alpha ET, \\ &2Ge_y = (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x - 2\nu Ge + \alpha ET, \quad Ge_{xy} = \sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{8}$$

З рівностей (1), (2), (8) отримуємо рівняння суцільності для напружень

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\alpha E}{1-\nu}\Delta T, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{9}$$

Для визначення компонент тензора напружень на основі задачі термопружності для напружень (1), (6), (7), (9) встановимо залежності між невідомими функціями p_1, p_2 та відомим температурним полем з урахуванням умов (5).

Насамперед, інтегруючи перше рівняння у (4) за змінною x від $-a$ до a та використовуючи крайові умови для переміщень (5), знаходимо

$$\int_{-a}^{a} e_x dx = 0. \tag{10}$$

Далі слід скористатись знайденим у роботах [4–8] розв'язком задачі в напруженнях (1), (6), (7), (9) у вигляді розвинень компонент тензора напружень в збіжні ряди за повними системами власних і приєднаних функцій, а саме: $\{1,\ y,\ \cos\gamma_n y/b,\ \sin\lambda_n y/b\}$ – для напружень σ_x, $\{1,\ x,\ \cos\gamma_n x/a,\ \sin\lambda_n x/a\}$ – для напружень σ_y, $\{1,\ y,\ y^2,\ \sin\gamma_n y/b,\ \cos\lambda_n - \cos\lambda_n y/b\}$ або $\{1,\ x,\ x^2,\ \sin\gamma_n x/a,\ \cos\lambda_n - \cos\lambda_n x/a\}$ – для дотичних напружень σ_{xy}. Тут $\gamma_n = \pi n$, λ_n – додатні корені рівняння $\mathrm{tg}\lambda = \lambda$, $n = 1, 2, \ldots$ Задані на межі області зусилля також слід розвинути за відповідними системами функцій, звідки для зусиль p_1, p_2 отримуємо розвинення

$$p_i = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} p_i dy + \frac{3y}{2b^3}\int_{-b}^{b} p_i y dy + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(\gamma_m y/b)}{b}\int_{-b}^{b} p_i \cos\frac{\gamma_m y}{b} dy + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin(\lambda_m y/b)}{b\sin^2\lambda_m}\int_{-b}^{b} p_i \sin\frac{\lambda_m y}{b} dy\right), \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Приєднані функції $\{1,\ y\}$, $\{1,\ x\}$, $\{1,\ y,\ y^2\}$ та $\{1,\ x,\ x^2\}$ виділяють у розвиненнях напружень елементарні розв'язки σ_x^0, σ_y^0, σ_{xy}^0 [6], які залежать від головного вектора та головного моменту зовнішніх зусиль (6), (7) і мають наступний вигляд:

$$\sigma_x^0 = -\frac{1}{4b}\int_{-b}^{b}(p_1 + p_2)\, dy - \frac{3y}{4b^3}\int_{-b}^{b}(p_1 + p_2)\, y dy, \sigma_y^0 = \sigma_{xy}^0 = 0. \tag{12}$$

Крім того, на основі необхідних умов [4, 6] існування розв'язку задачі (1), (6), (7), (9), отримуємо умови взаємного зрівноваження зусиль p_1, p_2:

$$\int_{-b}^{b} p_1 dy = \int_{-b}^{b} p_2 dy, \quad \int_{-b}^{b} y p_1 dy = \int_{-b}^{b} y p_2 dy. \tag{13}$$

Самозрівноважені частини напружень мають вигляд

$$\sigma_x^s = \sum_{m=1}^{\infty} \left(X_m^1(x) \cos \frac{\gamma_m y}{b} + X_m^2(x) \sin \frac{\lambda_m y}{b} \right),$$
$$\sigma_y^s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_n^1(y) \cos \frac{\gamma_n x}{a} + Y_n^2(y) \sin \frac{\lambda_n x}{a} \right),$$
$$\sigma_{xy}^s = -a \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{dY_n^1}{dy} \frac{\sin \gamma_n x/a}{\gamma_n} + \frac{dY_n^2}{dy} \frac{\cos \lambda_n - \cos \lambda_n x/a}{\lambda_n} \right] -$$
$$- b \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{dX_m^1}{dx} \frac{\sin \gamma_m y/b}{\gamma_m} + \frac{dX_m^2}{dx} \frac{\cos \lambda_m - \cos \lambda_m y/b}{\lambda_m} \right], \tag{14}$$

а складові X_m^i, Y_n^i $(i = 1, 2)$ встановлено в роботах [4, 7, 8] у формі залежностей від самозрівноважених частин зовнішніх зусиль (6), (7) та температурного поля T.

З останнього співвідношення у (3) з урахуванням (12), (13) легко встановити вираз для сталих осьових деформацій

$$e = \frac{\nu}{2bE} \int_{-b}^{b} p_1 dy + \frac{\alpha}{4ab} \iint_D T dx dy, \tag{15}$$

з використанням якого на основі формул (8), (10) отримуємо рівність

$$\int_{-a}^{a} \sigma_x dx = \frac{a\nu^2}{b(1-\nu)^2} \int_{-b}^{b} p_1 dy + \frac{\alpha \nu E}{2b(1-\nu)^2} \iint_D T dx dy - \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-a}^{a} T dx.$$

Використовуючи ортогональність повної системи функцій для напружень σ_x і беручи до уваги формули (12)–(14), на основі останньої рівності знаходимо вирази

$$\int_{-b}^{b} p_i dy = \frac{\alpha E}{2a} \iint_D T dx dy, \quad \int_{-b}^{b} y p_i dy = \frac{\alpha E}{2a(1-\nu)} \iint_D y T dx dy,$$
$$\int_{-a}^{a} X_m^1 dx = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)b} \iint_D T \cos \frac{\gamma_m y}{b} dx dy,$$
$$\int_{-a}^{a} X_m^2 dx = -\frac{\alpha E}{(1-\nu) b \sin^2 \lambda_m} \iint_D T \sin \frac{\lambda_m y}{b} dx dy, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

два перші з яких визначають несамозрівноважену частину розвинень (11) зовнішніх зусиль p_1, p_2. Два останні вирази у (16) використаємо для визначення виразів через відоме температурне поле T коефіцієнтів самозрівноважених частин розвинень (11). Це легко здійснити на основі отриманих в роботах [4, 7, 8] взаємно-однозначних відповідностей між складовими X_m^i $(i = 1, 2)$ та силовими й тепловими факторами навантажень. Таким чином, після визначення зусиль p_1, p_2, можна стверджувати, що поставлену змішану задачу термопружності (1)–(6) зведено до першої крайової задачі (1), (6), (7), (9).

3. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ

Здійснимо розрахунок термонапруженого стану в прямокутній області D для задачі (1)–(6) із температурним полем, яке є розв'язком наступної задачі теплопровідності. Нехай сторони $x = \pm a$ області є теплоізольованими, а сторони $y = \pm b$ піддані нагріванню:

$$T|_{y=\pm b} = T_0 + \omega\tau, \quad T_0, \omega = \text{const}.$$

Зі сформульованої задачі теплопровідності випливає, що температурне поле T є функцією від координати y і його слід шукати на основі рівняння теплопровідності

$$\partial^2 T/\partial y^2 = \partial T/\partial\tau.$$

Розв'язуючи поставлену задачу теплопровідності [13] в умовах асимптотичного теплового режиму, знаходимо температурне поле у вигляді

$$T = \frac{\omega}{2}\left(y^2 - b^2 + 2\tau\right) + T_0. \tag{17}$$

Подамо отримане температурне поле (17) у вигляді розвинення

$$T(y) = T_1^0 + \sum_{m=1}^{\infty} T_m \cos\frac{\gamma_m y}{b}, \tag{18}$$

де

$$T_1^0 = \omega\left(\tau - b^2/3\right) + T_0, \quad T_m = (-1)^m 2\omega b^2/\gamma_m^2.$$

Вираз для коефіцієнта X_m^1 розвинень самозрівноважених напружень (13) із врахуванням крайових умов (6), (7) та рівності (17) має вигляд [4, 7, 8]

$$\begin{aligned} X_m^1 = \sum_{i=1}^{\infty} \Big\{ & X_{1m}^{(2i)} + 2\tfrac{(-1)^m}{b} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} & \left((-1)^n - \cos\tfrac{\gamma_n x}{a}\right) K\left(\tfrac{\gamma_n}{a}, \tfrac{\gamma_m}{b}, b\right) \alpha_{1n}^{(2i-1)} \Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

де

$$X_{1m}^{(2i)} = \left(P_m^{(i)} + \tilde{\alpha}_{1m}^{(2i-1)} + \delta_{i,1} T_m\right) f\left(\frac{\gamma_m}{b}, a, x\right) + P_m^{(i)},$$

$$T_m = (-1)^m \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{2\omega b^2}{\gamma_m^2}, \quad P_m^{(i)} = -\frac{\delta_{i,1}}{b} \int\limits_{-b}^{b} p_1 \cos\frac{\gamma_m y}{b} dy,$$

$$K(r,s,h) = -\frac{4rs^2 \mathrm{sh}^2 rh}{(r^2+s^2)^2(\mathrm{sh}2rh + 2rh)},$$

$$f(r,h,t) = 2\frac{(\mathrm{sh}rh + rh\mathrm{ch}rh)\mathrm{ch}rh - rt\mathrm{sh}rh\mathrm{sh}rt}{\mathrm{sh}2rh + 2rh} - 1,$$

$$\tilde{\alpha}_{1m}^{(2i-1)} = 2\frac{(-1)^m}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K\left(\frac{\gamma_n}{a}, \frac{\gamma_m}{b}, b\right) \alpha_{1n}^{(2i-2)},$$

$$\alpha_{1n}^{(2i)} = 2\frac{(-1)^n}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K\left(\frac{\gamma_m}{b}, \frac{\gamma_n}{a}, a\right) \left(\tilde{\alpha}_{1m}^{(2i-1)} + P_m^{(i)} + \delta_{i,1} T_m\right).$$

Підставляючи (19) у третю рівність у (16) і враховуючи (18), знаходимо

$$\int\limits_{-b}^{b} p_1 \cos\frac{\gamma_m y}{b} dy = bT_m. \tag{20}$$

Аналогічно встановлюємо, що

$$\int\limits_{-b}^{b} p_i \sin\frac{\lambda_n y}{b} dy = \int\limits_{-b}^{b} p_2 \cos\frac{\gamma_n y}{b} dy = 0, \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Таким чином, для розвинень (11) зовнішніх зусиль p_1, p_2 знайдено коефіцієнти, які мають вигляд двох перших рівностей (16) та (20), (21).

Використовуючи розв'язок задачі термопружності (1), (6), (7), (9) для напружень із розглянутого прикладу температурного поля (17) і беручи до уваги формулу (18), знаходимо компоненти тензора напружень у довгій призмі прямокутного поперечного перерізу у вигляді

$$\sigma_x = \frac{\alpha E \nu}{1-\nu}\left(\omega\left(\tau - \frac{b^2}{3}\right) + T_0\right) - \frac{\alpha E}{1-\nu} T(y), \quad \sigma_y = \sigma_{xy} = 0. \tag{22}$$

На основі фізичних співвідношень (3) з урахуванням (15) та виразів для напружень (22) визначаємо деформації в прямокутній області D

$$e_x = e_{xy} = 0, \quad e_y = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)G}\left[T - \nu\left(\omega\left(\tau - \frac{b^2}{3}\right) + T_0\right)\right].$$

Розраховані на основі співвідношень Коші (4), компоненти вектора переміщень мають вигляд

$$u = 0, \quad v = A + \frac{\alpha E y}{2(1-\nu)G}\left[\frac{\omega}{6}\left(y^2 + (2\nu - 3)b^2\right) + (1-\nu)\left(T_0 + \omega\tau\right)\right],$$

де A – стала інтегрування. Цю сталу можна визначити за умов виключення переміщень області D як жорсткого цілого.

ВИСНОВОК

У роботі побудовано розв'язок мішаної задачі термопружності у прямокутній області (1)–(6) шляхом зведення її до задачі в напруженнях (1), (6), (7), (9). При цьому вигідно використано те, що розв'язки задач теорії пружності й термопружності в напруженнях для прямокутної області [4–8] знайдено у вигляді явної функціональної залежності від силових та теплових факторів навантаження.

Оскільки при використанні наведеного у роботі підходу на чільне місце висувається інтегрування рівнянь рівноваги, які не залежать від пружних властивостей матеріалу, цю методику доцільно розвивати, зокрема, для розв'язування задач теорії пружності чи термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл.

[1] *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.

[2] *Буланов Г.С., Шалдырван В.А.* О методе однородных решений в задачах со смешанными граничными условиями // Прикл. механика. – 1989. – Том 25, № 9. – С. 57–62.

[3] *Захарова С.В., Пельц С.П.* Смешанная задача для упругого прямоугольника // Докл. Рос. АН. – 1993. – Том 328, № 2 – С. 164–167.

[4] *Vihak V.M., Tokovyi Y.V.* Investigation of the Plane Stressed State in a Rectangular Domain // Materials Science. – 2002. – Vol. 38, № 2. – P. 230–237.

[5] *Вігак В.М., Токовий Ю.В.* Визначення розв'язку плоскої задачі пружності в прямокутній області у випадку ортотропного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 97–102.

[6] *Vigak V.M., Tokovyi Yu.V.* Construction of Elementary Solutions to a Plane Elastic Problem for a Rectangular Domain // Int. Appl. Mech. – 2002. – Vol. 38, № 7. – P. 829–836.

[7] *Vihak V., Tokovyi Yu., Rychahivskyy A.* Exact Solution of the Plane Problem of Elasticity in a Rectangular Region // J. Comp. Appl. Mech. – 2002. – Vol. 3, No 2. – P. 193–206.

[8] *Vihak V.M., Yuzvyak M.Y., Yasinsky A.V.* The Solution of the Thermoelasticity Problem for a Rectangular Domain // J. Thermal Stresses. – 1998. – Vol. 21, № 5. – P. 545–561.

[9] *Noda N., Hetnarski R.B., Tanigawa Yo.* Thermall stresses. – NY.: Lastran Corporation, 2000. – 455 c.

[10] *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

[11] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

[12] *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 304 с.

[13] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.

CONSTRUCTION OF SOLUTION TO THE PLANE MIXED THERMOELASTICITY PROBLEM IN A RECTANGULAR DOMAIN

Yuriy TOKOVYI

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

In this paper a method for reducing of solution construction of the plane mixed problem of thermoelasticity in a rectangle to solving the corresponding elastic problem in terms of stresses is proposed.