ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ

©2010 р. Юрій СИДОРЕНКО, Олександр ЧВАРТАЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 18 жовтня 2010 р.

Для нестаціонарної гіперболічної системи двох рівнянь досліджується пряма та обернена задачі розсіяння. У випадку вироджених даних розсіяння доведено, що основні об'єкти оберненої задачі можна отримати також методом бінарних перетворень.

1 Вступ

Ми розглядаємо нестаціонарну систему двох гіперболічних рівнянь (1), де змінна $y \in \mathbb{R}$ відіграє роль еволюційної (часової), а $x \in \mathbb{R}$ є просторовою змінною. У випадку $\alpha_1 = 1 = -\alpha_2$ рівняння (1) є добре відомою нестаціонарною системою Дірака, пряма та обернена задачі для якої (а також для її конусного зображення) досліджені в різних функціональних просторах в роботах [1-3] (див., також [4, 5]). В нашому випадку ($\alpha_1 > \alpha_2 > 0$) функції a_1, a_2 (4), (5) є асимптотиками падаючих на потенціали u_1, u_2 хвиль, а функції b_1, b_2 (4), (5) є асимптотиками розсіяних хвиль (для системи Дірака відповідними асимптотиками є пари (a_1, b_2), (a_2, b_1)).

Робота організована таким чином. В другому розділі коротко наведено основні результати по прямій та оберненій задачі розсіяння для системи (1). В третьому розділі для вироджених даних розсіяння (33) знайдено в явному вигляді оператор розсіяння S (10), обернений оператор S^{-1} (11) (Теорема 2), а також оператори перетворення оберненої задачі (12) –

УДК 517.9, MSC 2000: 33Q58, 37K10, 37K15

(15) (див. формули (48) – (63)). В четвертому розділі вводяться загальні бінарні перетворення системи (1), а в наступному, п'ятому розділі, виходячи з їх означення, в явному вигляді отримано оператор розсіяння та оператори перетворення оберненої задачі для випадку вироджених даних розсіяння.

Мета, яку ми ставили перед собою в роботі, є продемонструвати те, що методом бінарних перетворень можна отримати всі основні об'єкти дослідження оберненої задачі для системи (1). Відповідні теореми містяться у Розділі 6.

Нижче ми наводимо деякі скорочення для операторів з виродженими ядрами, які використовуються в основному тексті роботи, особливо при складних технічних перетвореннях в доведеннях цієї роботи. Розглянемо простір $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n)$ всіх вимірних векторнозначних функцій $f(x)$. В цьому просторі введемо такі оператори:

1. $K_+f(x) := \int_{-\infty}^{x} K_+(x,s)f(s)ds$ – вольтерівський оператор зі змінною верхньою межею, де ядро при фіксованих x та s є матрицею розмірності $(n \times n)$.

2. $K_-f(x) := \int_{x}^{+\infty} K_-(x,s)f(s)ds$ – вольтерівський оператор зі змінною нижньою межею.

3. $Rf(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} R(x,s)f(s)ds$ – фредгольмівський оператор.

Зауваження. *Для інтегральних операторів 1. – 3. з виродженими ядрами в роботі прийняті скорочені позначення. Якщо ядро A(x,y) інтегрального оператора A допускає факторизацію (тобто, є виродженим) вигляду $A(x,y) = A_1(x)A_2(y)$, то оператор A ми зображатимемо так: $A = A_1(x)\int A_2(y)\,dy$, де пропущені межі інтегрування відображають тип відповідного оператора 1. – 3.*

2 Пряма та обернена задачі розсіяння. Постановка і результати

Розглянемо гіперболічну систему

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1(x,y)}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial Y_1(x,y)}{\partial x} = u_1(x,y)Y_2(x,y), \\ \frac{\partial Y_2(x,y)}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial Y_2(x,y)}{\partial x} = u_2(x,y)Y_1(x,y), \end{cases} \quad \alpha_1 > \alpha_2 > 0, \tag{1}$$

за умови, що коефіцієнти (потенціали) $u_1(x,y), u_2(x,y)$ є комплекснозначними, вимірними за x та y функціями, інтегровними з квадратом за двома змінними

$$u_1, u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}). \tag{2}$$

Розв'язки системи (1) розглядатимемо у просторі Υ пар функцій $Y_1(x,y)$, $Y_2(x,y)$, де функції Y_1, Y_2 вимірні за змінними x та y з нормою

$$||Y(x,y)||_\Upsilon := \max\left\{ \operatorname{vrai}\sup_x \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Y_1(x-\alpha_2 s, s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}, \right. \\ \left. \operatorname{vrai}\sup_x \left[\int_{-\infty}^{\infty} |Y_2(x-\alpha_1 s, s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{3}$$

Вектор-функцію $Y(x,y) := \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ будемо називати припустимим розв'язком системи (1), якщо $Y_1(x,y)$, $Y_2(x,y)$ задовольняють систему (1) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови (2). Тоді для припустимого розв'язку* $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ *системи (1) існують в* $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ *границі при* $x + \alpha_1 y = const$:

$$\begin{aligned} Y_1(x,y) &= a_1(x+\alpha_1 y) + o(1),\ y \to -\infty, \\ Y_1(x,y) &= b_1(x+\alpha_1 y) + o(1),\ y \to +\infty, \end{aligned} \tag{4}$$

та при $x + \alpha_2 y = const$:

$$\begin{aligned} Y_2(x,y) &= a_2(x+\alpha_2 y) + o(1),\ y \to -\infty, \\ Y_2(x,y) &= b_2(x+\alpha_2 y) + o(1), y \to +\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Для кожної з пар (a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2) *довільно заданих функцій з* $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ *існує єдиний припустимий розв'язок, для якого ця пара є відповідною (4) – (5) асимптотикою на безмежності.*

Доведення теореми проводиться аналогічно як і у відповідній теоремі з роботи [2]. Достатньо показати, що система (1) із заданою однією з пар асимптотик (a_1, a_2), (b_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, b_2) (4) – (5) для розв'язку (1) еквівалентна відповідній системі інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} u_1(x+\alpha_1(y-\tau),\tau) Y_2(x+\alpha_1(y-\tau),\tau)\, d\tau, \\ Y_2(x,y) = a_2(x+\alpha_2 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} u_2(x+\alpha_2(y-\tau),\tau) Y_1(x+\alpha_2(y-\tau),\tau)\, d\tau; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(x+\alpha_1 y) - \int\limits_{y}^{+\infty} u_1(x+\alpha_1(y-\tau),\tau) Y_2(x+\alpha_1(y-\tau),\tau)\, d\tau, \\ Y_2(x,y) = a_2(x+\alpha_2 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} u_2(x+\alpha_2(y-\tau),\tau) Y_1(x+\alpha_2(y-\tau),\tau)\, d\tau; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = a_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} u_1(x+\alpha_1(y-\tau),\tau) Y_2(x+\alpha_1(y-\tau),\tau)\, d\tau, \\ Y_2(x,y) = b_2(x+\alpha_2 y) - \int\limits_{y}^{+\infty} u_2(x+\alpha_2(y-\tau),\tau) Y_1(x+\alpha_2(y-\tau),\tau)\, d\tau; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} Y_1(x,y) = b_1(x+\alpha_1 y) - \int\limits_{y}^{+\infty} u_1(x+\alpha_1(y-\tau),\tau) Y_2(x+\alpha_1(y-\tau),\tau)\, d\tau, \\ Y_2(x,y) = b_2(x+\alpha_2 y) - \int\limits_{y}^{+\infty} u_2(x+\alpha_2(y-\tau),\tau) Y_1(x+\alpha_2(y-\tau),\tau)\, d\tau. \end{cases} \tag{9}$$

Існування та єдиність розв'язку кожної з систем (6) – (9) випливає з теореми про розв'язність систем вольтерівського типу (див., наприклад, [2], теорема 4.1.1).

Теорема 1 дає можливість розв'язати пряму задачу розсіяння, яка полягає в знаходженні розв'язків системи (1) за однією із згадуваних пар асимптотик. Отже, з теореми 1 слідує, що кожній парі a_1, a_2 функцій з $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ відповідає єдиний розв'язок прямої задачі розсіяння для системи (1) і цьому ж розв'язку відповідає пара асимптотик b_1, $b_2 \in L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ на іншій безмежності. Це означає, що існує оператор S, який переводить падаючі хвилі $a = (a_1(x+\alpha_1 y), a_2(x+\alpha_2 y))^\top$ в розсіяні $b = (b_1(x+\alpha_1 y), b_2(x+\alpha_2 y))^\top$, і визначається рівністю:

$$\begin{pmatrix} b_1(x+\alpha_1 y) \\ b_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1(x+\alpha_1 y) \\ a_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Із аналогічних міркувань існує обернений оператор S^{-1}:

$$\begin{pmatrix} a_1(x+\alpha_1 y) \\ a_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} b_1(x+\alpha_1 y) \\ b_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Обернена задача розсіяння для системи (1) полягає в знаходженні коефіцієнтів (потенціалів) u_1, u_2 за заданим оператором S, який надалі ми називатимемо оператором розсіяння.

Лема 1. *Припустимий розв'язок системи (1) з коефіцієнтами (потенціалами) u_1, u_2, які задовольняють умови (2), може бути зображений у вигляді*

$$
\begin{cases}
Y_1(x,y) = a_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} H_{11}(x,y,\xi)a_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{y}^{+\infty} H_{12}(x,y,\xi)a_2(x+\alpha_2\xi)d\xi, \\
Y_2(x,y) = a_2(x+\alpha_2 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} H_{21}(x,y,\xi)a_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{y}^{+\infty} H_{22}(x,y,\xi)a_2(x+\alpha_2\xi)d\xi,
\end{cases} \tag{12}
$$

$$
\begin{cases}
Y_1(x,y) = b_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{11}(x,y,\xi)b_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{12}(x,y,\xi)a_2(x+\alpha_2\xi)d\xi, \\
Y_2(x,y) = a_2(x+\alpha_2 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{21}(x,y,\xi)b_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{22}(x,y,\xi)a_2(x+\alpha_2\xi)d\xi,
\end{cases} \tag{13}
$$

$$
\begin{cases}
Y_1(x,y) = a_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{11}(x,y,\xi)a_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{12}(x,y,\xi)b_2(x+\alpha_2\xi)d\xi, \\
Y_2(x,y) = b_2(x+\alpha_2 y) + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{21}(x,y,\xi)a_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{22}(x,y,\xi)b_2(x+\alpha_2\xi)d\xi,
\end{cases} \tag{14}
$$

$$
\begin{cases}
Y_1(x,y) = b_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{y}^{+\infty} K_{11}(x,y,\xi)b_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{-\infty}^{y} K_{12}(x,y,\xi)b_2(x+\alpha_2\xi)d\xi, \\
Y_2(x,y) = b_2(x+\alpha_2 y) + \int\limits_{y}^{+\infty} K_{21}(x,y,\xi)b_1(x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
\qquad + \int\limits_{-\infty}^{y} K_{22}(x,y,\xi)b_2(x+\alpha_2\xi)d\xi,
\end{cases} \tag{15}
$$

де функції a_1, a_2, b_1, b_2 *з* $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ *є асимптотиками цього розв'язку, а ядра* $L_{kl}(x,y,\xi)$, $k,l = 1,2$, *задовольняють оцінки*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_{\tau}\left|L_{11}\left(y-\alpha_1\tau,\tau,\frac{\xi-y}{\alpha_1}+\tau\right)\right|^2 d\xi dy<+\infty, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_{\tau}\left|L_{12}\left(y-\alpha_1\tau,\tau,\frac{\xi-y+\alpha_1\tau}{\alpha_2}\right)\right|^2 dyd\xi<+\infty, \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_{s}\left|L_{21}\left(x-\alpha_2 s,s,\frac{\xi-x+\alpha_2 s}{\alpha_1}\right)\right|^2 d\xi dx<+\infty, \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sup_{s}\left|L_{22}\left(x-\alpha_2 s,s,\frac{\xi-x}{\alpha_2}+s\right)\right|^2 dxd\xi<+\infty. \tag{19}$$

Для ядер $H_{kl}(x,y,\xi)$, $K_{kl}(x,y,\xi)$, $M_{kl}(x,y,\xi)$, $k,l=1,2$, виконуються такі ж оцінки, як і для ядер операторів L_{kl}, $k,l=1,2$.

2. Коефіцієнти u_1, u_2 системи (1) виражаються через ядра операторів перетворення за формулами

$$\begin{aligned} u_1(x,y)&=-\tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}H_{12}(x,y,y)=\tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}K_{12}(x,y,y)=\\ &=-\tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}L_{12}(x,y,y)=\tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}M_{12}(x,y,y),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,y)&=\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}H_{21}(x,y,y)=-\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}K_{21}(x,y,y)=\\ &=-\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}L_{21}(x,y,y)=\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}M_{21}(x,y,y).\end{aligned} \tag{21}$$

Доведення проводиться подібним чином, як і у відповідній теоремі з роботи [2]. Доведемо, наприклад, що розв'язок (Y_1,Y_2) системи (1) допускає зображення (14). Допустимий розв'язок системи (1) з заданими асимптотиками (a_1,b_2) задовольняє систему інтегральних рівнянь (8). Навпаки, розв'язок рівнянь (8) з простору функцій Υ з нормою (3) є допустимим розв'язком системи (1) з потрібними асимптотиками. Якщо розв'язок системи (1) можна зобразити у вигляді (14), то, підставляючи зображення (14) в систему рівнянь (8), отримаємо системи для ядер $L_{kl}(x,y,\xi)$, $k,l=1,2:$

$$\begin{cases} L_{11}(x,y,\xi)=\int\limits_{-\infty}^{y} u_1(x+\alpha_1(y-\tau),\tau)L_{21}(x+\alpha_1(y-\tau),\tau,\xi+\tau-y)d\tau, \\ L_{21}(x,y,\xi)=-\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}u_2\left(x+\alpha_2\left(y-\frac{\alpha_1\xi-\alpha_2 y}{\alpha_1-\alpha_2}\right),\frac{\alpha_1\xi-\alpha_2 y}{\alpha_1-\alpha_2}\right)+ \\ +\int\limits_{\frac{\alpha_1\xi-\alpha_2 y}{\alpha_1-\alpha_2}}^{y} u_2(x+\alpha_2(y-\tau),\tau)L_{11}\left(x+\alpha_2(y-\tau),\tau,\frac{\alpha_1\xi-\alpha_2(y-\tau)}{\alpha_1}\right)d\tau, \\ \xi\geq y; \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} L_{12}(x,y,\xi)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}u_1\left(x+\alpha_1\left(y-\frac{\alpha_2\xi-\alpha_1 y}{\alpha_2-\alpha_1}\right),\frac{\alpha_2\xi-\alpha_1 y}{\alpha_2-\alpha_1}\right)- \\ -\int\limits_{\frac{\alpha_2\xi-\alpha_1 y}{\alpha_2-\alpha_1}}^{y} u_1(x+\alpha_1(y-\tau),\tau)L_{22}\left(x+\alpha_1(y-\tau),\tau,\frac{\alpha_2\xi-\alpha_1(y-\tau)}{\alpha_2}\right)d\tau, \\ L_{22}(x,y,\xi)=-\int\limits_{y}^{+\infty} u_2(x+\alpha_2(y-\tau),\tau)L_{12}(x+\alpha_2(y-\tau),\tau,\xi+\tau-y)d\tau, \\ \xi\geq y. \end{cases} \tag{23}$$

Навпаки, якщо ядра $L_{kl}(x,y,\xi)$ задовольняють системи (22) – (23) та оцінки (16) – (19), то зображення (14) дає допустимий розв'язок при довільних функціях $a_1, b_2 \in L_2$. Таким чином, для існування зображення (14) достатньо показати, що системи (22) – (23) мають розв'язок з простору функцій, які задовольняють оцінки (16) – (19). Це слідує з теореми про розв'язність систем вольтерівського типу (див. [2], теорема 4.1.1). Безпосередньо з систем (22) – (23), поклавши $\xi = y$, отримаємо рівності для знаходження потенціалів через ядра L_{12} та L_{21} (20), (21).

Структура оператора розсіяння S визначається із зображень (12) – (15). Зокрема, поклавши $a_2 = 0$ та прирівнявши перші зображення систем (12) та (13), отримаємо, що

$$I+F_{11}=\left(I+\int\limits_{-\infty}^{y} M_{11}(x,y,\xi)d\xi\right)^{-1}\circ\left(I+\int\limits_{-\infty}^{y} H_{11}(x,y,\xi)d\xi\right)= \\ =I+\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{F}_{11}(x,y,\xi)d\xi. \tag{24}$$

З оцінок для ядер $M_{11}(x,y,\xi)$ та $H_{11}(x,y,\xi)$ з леми 1 випливає існування оберненого оператора $\left(I+\int\limits_{-\infty}^{y} M_{11}(x,y,\xi)d\xi\right)^{-1}$ та інтегровність з квадратом за змінними x та ξ ядра $F_{11}(x,y,\xi)$.

Нехай $a_2 = 0$. З означення оператора розсіяння S отримуємо, що

$$b_1(x+\alpha_1 y) = a_1(x+\alpha_1 y) + \int\limits_{-\infty}^{y} \tilde{F}_{11}(x,y,\xi) a_1(x+\alpha_1\xi) d\xi. \qquad (25)$$

Виконаємо заміну змінних в рівності (25):

$$\left\{ \begin{array}{c} x+\alpha_1 y \to \tau, \\ y \to y. \end{array} \right. \Rightarrow b_1(\tau) = a_1(\tau) + \\ +\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_{-\infty}^{\tau} \tilde{F}_{11}\left(\tau-\alpha_1 y, y, \frac{\eta-(\tau-\alpha_1 y)}{\alpha_1}\right) a_1(\eta) d\eta. \qquad (26)$$

Таким чином, з останнього співвідношення отримуємо, що

$$\tilde{F}_{11}\left(\tau-\alpha_1 y, y, \frac{\eta-(\tau-\alpha_1 y)}{\alpha_1}\right) = F_{11}(\tau,\eta) = F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi).$$

Отже,

$$I + F_{11} = I + \int\limits_{-\infty}^{y} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi)\cdot d\xi. \qquad (27)$$

Подібним чином з систем (12) – (15) отримується структура решти елементів операторів S та S^{-1}, які мають такий вигляд:

$$S = I + \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{y} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi)!d\xi, & \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi) d\xi \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\xi) d\xi, & \int\limits_{+\infty}^{y} F_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\xi)\cdot d\xi \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

$$S^{-1} = I + \begin{pmatrix} \int\limits_{+\infty}^{y} G_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi) d\xi, & \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi) d\xi \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\xi) d\xi, & \int\limits_{-\infty}^{y} G_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\xi) d\xi \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Лема 2. *Оператор розсіяння S та обернений до нього S^{-1} однозначно визначаються однією з пар операторів (F_{12}, G_{21}) або (F_{21}, G_{12}), які називатимемо даними розсіяння.*

Доведемо лему 2 для пари (F_{12}, G_{21}). З операторних рівностей $(SS^{-1})_{11} = I$ та $(S^{-1}S)_{22} = I$ отримуємо, що $(I+F_{11})(I+G_{11}) = I - F_{12}G_{21}$ та $(I+G_{22})(I+F_{22}) = I - G_{21}F_{12}$.

З єдиності правої та лівої факторизації для операторів Фредгольма (див., наприклад, [2]) оператори $F_{11}, G_{11}, F_{22}, G_{22}$ однозначно визначаються за парою (F_{12}, G_{21}).

З рівностей $(S^{-1}S)_{21} = 0$ та $(SS^{-1})_{12} = 0$ отримуємо формули для знаходження операторів F_{21} та G_{12}: $F_{21} = -(I + G_{22})^{-1}G_{21}(I + F_{11})$, $G_{12} = (I + F_{11})^{-1}F_{12}(I + G_{22})$.

3 Обернена задача з виродженими даними розсіяння

Припустимо, що пара (F_{12}, G_{21}) є відомою.

Розпишемо операторну рівність $(SS^{-1})_{11} = I$ в явному вигляді:

$$\begin{gathered}
I + \int\limits_{-\infty}^{y} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi)d\xi + \int\limits_{+\infty}^{y} G_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi)d\xi + \\
+ \int\limits_{-\infty}^{y} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi)\left\{\int\limits_{+\infty}^{\xi} G_{11}(x+\alpha_1\xi, x+\alpha_1\eta)d\eta\right\}d\xi + \\
+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x+\alpha_2\xi, x+\alpha_1\eta)\cdot d\eta\right\}d\xi = I.
\end{gathered} \tag{30}$$

Остання рівність еквівалентна системі інтегральних рівнянь для ядер операторів F_{11} та G_{11}:

$$\begin{cases}
F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi) - \left\{\int\limits_{-\infty}^{\xi} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\eta)\times\right. \\
\left.\times G_{11}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta\right\} + \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\eta)\times\right. \\
\left.\times G_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta\right\} = 0,\ \xi \le y, \\
G_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi) + \left\{\int\limits_{-\infty}^{t} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\eta)\times\right. \\
\left.\times G_{11}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta\right\} - \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\eta)\times\right. \\
\left.\times G_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta = 0\right\},\ \xi \ge y.
\end{cases} \tag{31}$$

Аналогічно, з рівності $(S^{-1}S)_{22} = I$ отримаємо систему для ядер F_{22} та G_{22}:

$$\begin{cases} G_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\xi) - \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{\xi} G_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\eta)\times \\ \times F_{22}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_2\xi)d\eta \Big\} + \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\eta)\times \\ \times F_{12}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_2\xi)d\eta \Big\} = 0,\ \xi \le y, \\ F_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\xi) + \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{y} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\eta)\times \\ \times G_{11}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta - \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\eta)\times \\ \times G_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta \Big\} = 0,\ \xi \ge y. \end{cases} \tag{32}$$

Нехай дані розсіяння F_{12} та G_{21} допускають факторизацію

$$\begin{array}{c} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\eta) = p_1(x+\alpha_1 y)q_1^\top(x+\alpha_2\eta), \\ G_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\eta) = q_2(x+\alpha_2 y)p_2^\top(x+\alpha_1\eta). \end{array} \tag{33}$$

Теорема 2 *У випадку вироджених даних розсіяння* (F_{12}, G_{21}) *(33) ядра оператора розсіяння S (28) та оберненого до нього S^{-1} (29) мають такий вигляд:*

$$\begin{array}{c} F_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi) = -p_1(x+\alpha_1 y)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2(x+\alpha_2\eta)d\eta \right)\times \\ \times\Delta^{-1}(\xi, +\infty; x)p_2^\top(x+\alpha_1\xi), \end{array} \tag{34}$$

$$\begin{array}{c} F_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\xi) = -q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(+\infty, y; x)\times \\ \times\Delta(+\infty, +\infty; x)\Delta^{-1}(\xi, +\infty; x)p_2^\top(x+\alpha_1\xi), \end{array} \tag{35}$$

$$\begin{array}{c} F_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\xi) = q_2(x+\alpha_2 y)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1(x+\alpha_1\eta)d\eta \right)\times \\ \times\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty, y; x)q_1^\top(x+\alpha_2\xi), \end{array} \tag{36}$$

$$\begin{array}{c} G_{11}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_1\xi) = p_1(x+\alpha_1 y)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_1^\top q_2(x+\alpha_2\eta)d\eta \right)\times \\ \times\Delta^{-1}(y, +\infty; x)p_2^\top(x+\alpha_1\xi), \end{array} \tag{37}$$

$$\begin{array}{c} G_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi) = -p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y, +\infty; x)\times \\ \times\tilde{\Delta}(+\infty, +\infty; x)\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty, \xi; x)q_1^\top(x+\alpha_2\xi), \end{array} \tag{38}$$

$$G_{22}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_2\xi) = -q_2(x+\alpha_2 y)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_2^\top p_1(x+\alpha_1\eta)d\eta\right)\times \\ \times\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty,\xi;x)q_1^\top(x+\alpha_2\xi), \tag{39}$$

де

$$\Delta(\eta,\xi;x) = I - \left(\int\limits_{-\infty}^{\eta} p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\xi} q_1^\top q_2(x+\alpha_2\tau)d\tau\right), \tag{40}$$

$$\tilde{\Delta}(\eta,\xi;x) = I - \left(\int\limits_{-\infty}^{\xi} q_1^\top q_2(x+\alpha_2\tau)d\tau\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\eta} p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right). \tag{41}$$

Доведення. Знаходження операторів S та S^{-1} у випадку вироджених даних розсіяння (33) проводиться аналогічно, як і в [5].

Підставивши зображення (33) у формули (31) – (32), отримуємо системи для ядер F_{11}, G_{11}, F_{22}, G_{22}, які розв'язуються в явному вигляді і згідно леми 2 мають єдиний розв'язок. Далі з формул

$F_{21} = -(I+G_{22})^{-1}\times G_{21}(I+F_{11})$ та $G_{12} = (I+F_{11})^{-1}F_{12}(I+G_{22})$ знаходимо оператори F_{12} та G_{21}.

Тепер знайдемо зв'язок між ядрами операторів S, S^{-1} та ядрами операторів перетворення. Прирівнюючи перші рівності зображень (14) та (15), покладаючи $a_1 = 0$, $b_1 = F_{12}a_2$, $b_2 = a_2 + F_{22}a_2$, отримаємо:

$$F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{11}(x,y,\eta)F_{12}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_2\xi)d\eta + \\ + M_{12}(x,y,\xi) = 0,\ \xi\le y. \tag{42}$$

Аналогічним чином, з рівностей (14) та (15), поклавши $b_2 = 0$, отримаємо:

$$M_{11}(x,y,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{12}(x,y,\eta)G_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta = 0,\ \xi\le y. \tag{43}$$

Таким чином, ми отримали систему для знаходження ядер операторів M_{11} та M_{12}:

$$\begin{cases} F_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{11}(x,y,\eta)F_{12}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_2\xi)d\eta + \\ \qquad + M_{12}(x,y,\xi) = 0,\ \xi\le y, \\ M_{11}(x,y,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{12}(x,y,\eta)G_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi)d\eta = 0,\ \xi\le y. \end{cases} \tag{44}$$

Аналогічним чином знаходятся системи для решти елементів операторів M та L:

$$\begin{cases} G_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\xi) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{22}(x,y,\eta) G_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi) d\eta + \\ \qquad + M_{21}(x,y,\xi) = 0,\ \xi \le y, \\ M_{22}(x,y,\xi) + \int\limits_{-\infty}^{y} M_{21}(x,y,\eta) F_{12}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi) d\eta = 0,\ \xi \le y, \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} G_{12}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2\xi) + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{11}(x,y,\eta) G_{12}(x+\alpha_1\eta, x+\alpha_2\xi) d\eta + \\ \qquad + L_{12}(x,y,\xi) = 0,\ \xi \ge y, \\ L_{11}(x,y,\xi) + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{12}(x,y,\eta) F_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi) d\eta = 0,\ \xi \ge y, \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} F_{21}(x+\alpha_2 y, x+\alpha_1\xi) + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{22}(x,y,\eta) F_{21}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi) d\eta + \\ \qquad + L_{21}(x,y,\xi) = 0,\ \xi \ge y, \\ L_{22}(x,y,\xi) + \int\limits_{y}^{+\infty} L_{21}(x,y,\eta) G_{12}(x+\alpha_2\eta, x+\alpha_1\xi) d\eta = 0,\ \xi \ge y. \end{cases} \tag{47}$$

Зауваження. *Згідно формул (20) та (21) для відновлення потенціалів u_1, u_2 за даними розсіяння (F_{12}, G_{21}) (33) достатньо розв'язати системи (44) та (45). Системи (46) та (47) є складнішими, оскільки потребують для розв'язування явного вигляду операторів F_{21} та G_{12}.*

Системи (44) – (47) є системами інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. За теоремою 2 у випадку вироджених даних розсіяння (33) ядра F_{21}, G_{12} будуть виродженими а, отже, рівняння (44) – (47) розв'язуються явно.

Отримаємо такий вигляд елементів операторів M та L:

$$\int\limits_{-\infty}^{y} M_{11}(x,y,\xi) d\xi = p_1(x+\alpha_1 y) \left(\int\limits_{-\infty}^{y} q_1^{\top} q_2(x+\alpha_2\eta) d\eta \right) \times \\ \times \Delta^{-1}(y,y;x) \int\limits_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi) d\xi, \tag{48}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{y} M_{12}(x,y,\xi) d\xi = -p_1(x+\alpha_1 y) \tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x) \int\limits_{-\infty}^{y} q_1^{\top}(x+\alpha_2\xi) d\xi, \tag{49}$$

$$\int_{-\infty}^{y} M_{21}(x,y,\xi)d\xi = -q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi, \tag{50}$$

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{y} M_{22}(x,y,\xi)d\xi = q_2(x+\alpha_2 y)\left(\int_{-\infty}^{y} p_2^{\top}p_1(x+\alpha_1\eta)d\eta\right)\times \\ \times\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\int_{-\infty}^{y} q_1^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\int_{y}^{+\infty} L_{11}(x,y,\xi)d\xi = p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\left(\int_{y}^{+\infty} q_1^{\top}q_2(x+\alpha_2\eta)d\eta\right)\int_{y}^{+\infty}\Delta^{-1}(\xi,+\infty;x)p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\int_{y}^{+\infty} L_{12}(x,y,\xi)d\xi = p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\tilde{\Delta}(+\infty,y;x)\int_{y}^{+\infty}\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty,\xi;x)q_1^{\top}(x+\alpha_2\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered}\int_{y}^{+\infty} L_{21}(x,y,\xi)d\xi = q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\Delta(y,+\infty;x)\int_{y}^{+\infty}\Delta^{-1}(\xi,+\infty;x)p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{54}$$

$$\begin{gathered}\int_{y}^{+\infty} L_{22}(x,y,\xi)d\xi = q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\left(\int_{y}^{+\infty} p_2^{\top}p_1(x+\alpha_1\eta)d\eta\right)\int_{y}^{+\infty}\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty,\xi;x)q_1^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi.\end{gathered} \tag{55}$$

Аналогічно, як і для ядер операторів L, M, можна вивести системи для операторів H та K, які теж є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду і у випадку вироджених ядер (33) розв'язуються явно.

Системи для H та K є розмірності (4×4) і їхнє розв'язання є технічно складнішим. Наведемо лише явний вигляд операторів H та K:

$$\begin{gathered}\int_{y}^{+\infty} K_{11}(x,y,\xi)d\xi = -p_1(x+\alpha_1 y)\left(\int_{-\infty}^{y} q_1^{\top}q_2(x+\alpha_2\eta)d\eta\right)\times \\ \times\Delta^{-1}(y,y;x)\int_{y}^{+\infty} p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{56}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{y} K_{12}(x,y,\xi)d\xi = -p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\tilde{\Delta}(+\infty,y;x)\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty,\xi;x)q_1^{\top}(x+\alpha_2\xi)d\xi, \tag{57}$$

$$\int\limits_{y}^{+\infty} K_{21}(x,y,\xi)\cdot d\xi = q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)\int\limits_{y}^{+\infty} p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi, \tag{58}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{y} K_{22}(x,y,\xi)d\xi = -q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\left(\int\limits_{y}^{+\infty} p_2^{\top}p_1(x+\alpha_1\eta)d\eta\right)\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}^{-1}(+\infty,\xi;x)q_1^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi, \tag{59}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{y} H_{11}(x,y,\xi)d\xi = -p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\left(\int\limits_{y}^{+\infty} q_1^{\top}q_2(x+\alpha_2\eta)d\eta\right)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta^{-1}(\xi,+\infty;x)p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi, \tag{60}$$

$$\int\limits_{y}^{+\infty} H_{12}(x,y,\xi)d\xi = p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\int\limits_{y}^{+\infty} q_1^{\top}(x+\alpha_2\xi)d\xi, \tag{61}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{y} H_{21}(x,y,\xi)d\xi = -q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)\times \\ \times\Delta(y,+\infty;x)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta^{-1}(\xi,+\infty;x)p_2^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi, \tag{62}$$

$$\int\limits_{y}^{+\infty} H_{22}(x,y,\xi)d\xi = -q_2(x+\alpha_2 y)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} p_2^{\top}p_1(x+\alpha_1\eta)d\eta\right)\times \\ \times\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)\int\limits_{y}^{+\infty} q_1^{\top}(x+\alpha_1\xi)d\xi. \tag{63}$$

З рівностей (20) та (21) отримуємо такі зображення для потенціалів u_1 та u_2 у випадку вироджених даних (F_{12}, G_{21}) (33):

$$u_1(x,y) = \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}p_1(x+\alpha_1 y)\tilde{\Delta}^{-1}(y,y;x)q_1^{\top}(x+\alpha_2 y), \tag{64}$$

$$u_2(x,y) = \tfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}q_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(y,y;x)p_2^{\top}(x+\alpha_1 y). \tag{65}$$

4 Бінарні перетворення

Нехай:

1) $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1K} \\ Y_{21} & \dots & Y_{2K} \end{pmatrix}$ – довільний розв'язок розмірності $(2 \times K)$ системи

$$LY = 0 \tag{66}$$

з оператором

$$L = \begin{pmatrix} \partial_y - \alpha_1 \partial_x & -u_1(x,y) \\ -u_2(x,y) & \partial_y - \alpha_2 \partial_x \end{pmatrix}, \tag{67}$$

а

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1K} \\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2K} \end{pmatrix}$$

– деякий фіксований $(2 \times K)$-матричний розв'язок системи (66).

2) $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \dots & \psi_{1K} \\ \psi_{21} & \dots & \psi_{2K} \end{pmatrix}$ – деякий фіксований $(2 \times K)$-матричний розв'язок транспонованої системи рівнянь

$$L^\tau \psi = 0, \;\; L^\tau = \begin{pmatrix} -\partial_y + \alpha_1 \partial_x & -u_1(x,y) \\ -u_2(x,y) & -\partial_y + \alpha_2 \partial_x \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що $(K \times K)$-матричні функції

$$P[\psi,\varphi] := \alpha_1 \psi_1^\top \varphi_1 + \alpha_2 \psi_2^\top \varphi_2, \;\; Q[\psi,\varphi] := \psi_1^\top \varphi_1 + \psi_2^\top \varphi_2$$

задовольняють співвідношення:

$$P_x = Q_y. \tag{68}$$

Наслідком співвідношень (68) є існування $(K \times K)$-матричного потенціалу $\Omega := \Omega[\psi,\varphi]$:

$$\begin{aligned} d\Omega[\psi,\varphi] &= P\,dy + Q\,dx, \\ \Omega[\psi,\varphi] &= \int_{M_0}^{M} P\,dy + Q\,dx, \end{aligned} \tag{69}$$

де

$$M_0 = (x_0, y_0) \in \bar{\mathbb{R}}^2, \;\; M = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Оскільки потенціал визначається з точністю до сталої $(K \times K)$-матриці, його завжди можна зробити невиродженим (локально) в околі довільної фіксованої точки (x_0, y_0).

За теоремою про бінарні перетворення інтегро-диференціального оператора [6] оператор W вигляду:

$$WY := Y - \varphi(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\Omega[\psi, Y] = \hat{Y} \tag{70}$$

переводить розв'язок Y системи (66) в розв'язок $\hat{Y}$ системи $\hat{L}\hat{Y} := = WLW^{-1}\hat{Y} = 0$ з оператором $\hat{L}$ вигляду

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \partial_y - \alpha_1\partial_x & -\hat{u}_1 \\ -\hat{u}_2 & \partial_y - \alpha_2\partial_x \end{pmatrix}, \tag{71}$$

де

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_1(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_2^\top, \\ \hat{u}_2 &= u_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi_2(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_1^\top. \end{aligned} \tag{72}$$

Для незбуреного оператора $L := L_0 = \begin{pmatrix} \partial_y - \alpha_1\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y - \alpha_2\partial_x \end{pmatrix}$ та розв'язку $Y := Y_0$ системи

$$L_0Y_0 = 0 \tag{73}$$

формули (70) – (72) після відповідних перепозначень набудуть вигляду:

$$\hat{Y} := Y = WY_0 = Y_0 - \varphi(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\Omega[\psi, Y_0]\ , \tag{74}$$

де $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x+\alpha_1 y) \\ \varphi_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}$ та $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x+\alpha_1 y) \\ \psi_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}$ є фіксованими розв'язками систем $L_0\varphi = 0$, $L_0^\tau\psi = 0$;

$$\Omega[\psi,\varphi] := \int_{M_0}^{M} Pdy + Qdx, \tag{75}$$

$$\hat{L} := L = WL_0W^{-1}, \tag{76}$$

$$L = \begin{pmatrix} \partial_y - \alpha_1\partial_x & -u_1 \\ -u_2 & \partial_y - \alpha_2\partial_x \end{pmatrix}, \tag{77}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 := u_1 &= (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_1(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_2^\top := (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_1\Delta^{-1}\psi_2^\top, \\ \hat{u}_2 := u_2 &= (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi_2(C + \Omega[\psi,\varphi])^{-1}\psi_1^\top := (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi_2\Delta^{-1}\psi_1^\top. \end{aligned} \tag{78}$$

За формулою (69) визначимо матричні потенціали $\Omega_1[\psi,\varphi]$ (поклавши $x_0 = x$, $y_0 = -\infty$) та $\Omega_2[\psi,\varphi]$ (поклавши $x_0 = x$, $y_0 = +\infty$):

$$\Omega_1[\psi,\varphi] = \alpha_1 \int_{-\infty}^{y} \psi_1^\top\varphi_1(x+\alpha_1 s)ds + \alpha_2 \int_{-\infty}^{y} \psi_2^\top\varphi_2(x+\alpha_2 s)ds, \tag{79}$$

$$\Omega_2[\psi,\varphi] = \alpha_1 \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^\top \varphi_1(x+\alpha_1 s)ds + \alpha_2 \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^\top \varphi_2(x+\alpha_2 s)ds. \qquad (80)$$

Враховуючи визначення потенціалів у формі (79), (80), розв'язки системи (73) можна зобразити різними виразами

$$Y = W_1\tilde{a} = W_2\tilde{b}, \qquad (81)$$

де $\tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1(x+\alpha_1 y) \\ \tilde{a}_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(x+\alpha_1 y) \\ \tilde{b}_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}$ – деякі вектор-функції, компоненти яких належать $L_2(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$, і які є розв'язками незбуреної системи (73),

$$W_1 = I - \begin{pmatrix} \alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, & \alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds \\ \alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, & \alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds \end{pmatrix}, \qquad (82)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_1 :=& \Delta_1(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y) = C_1 + \alpha_1\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1(x+\alpha_1 s)ds + \\ &+\alpha_2\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^\top\varphi_2(x+\alpha_2 s)ds = C_1 + \int\limits_{-\infty}^{x+\alpha_1 y}\psi_1^\top\varphi_1(\eta)d\eta + \int\limits_{-\infty}^{x+\alpha_2 y}\psi_2^\top\varphi_2(\tau)d\tau, \end{aligned} \qquad (83)$$

C_1 – довільна стала матриця, I – одиничний оператор,

$$W_2 = I - \begin{pmatrix} \alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, & \alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds \\ \alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, & \alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds \end{pmatrix}, \qquad (84)$$

де

$$\begin{gathered}\Delta_2 := \Delta_2(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y) = C_1 + \alpha_1 \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^\top \varphi_1(x+\alpha_1 s) ds + \\ +\alpha_2 \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^\top \varphi_2(x+\alpha_2 s) ds = C_1 + \int\limits_{+\infty}^{x+\alpha_1 y} \psi_1^\top \varphi_1(\eta) d\eta + \int\limits_{+\infty}^{x+\alpha_2 y} \psi_2^\top \varphi_2(\tau) d\tau,\end{gathered} \tag{85}$$

C_2 – довільна стала матриця,

$$\Delta_1(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y) = \Delta_2(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y) := \Delta(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y).$$

За теоремою про бінарні перетворення інтегро-диференціального оператора [6] отримаємо явний вигляд обернених операторів W_1^{-1}, W_2^{-1}:

$$W_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_1^\top (x+\alpha_1 s) ds; & \\ & \alpha_2 \varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_2^\top (x+\alpha_2 s) ds; \\ \alpha_1 \varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_1^\top (x+\alpha_1 s) ds; & \\ & \alpha_2 \varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta_1^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_2^\top (x+\alpha_2 s) ds; \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$W_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta_2^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_1^\top (x+\alpha_1 s) ds; & \\ & \alpha_2 \varphi_1 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta_2^{-1}(x+\alpha_2 s, x+\alpha_2 s) \psi_2^\top (x+\alpha_2 s) ds; \\ \alpha_1 \varphi_2 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta_2^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_1^\top (x+\alpha_1 s) ds; & \\ & \alpha_2 \varphi_2 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta_2^{-1}(x+\alpha_1 s, x+\alpha_2 s) \psi_2^\top (x+\alpha_2 s) ds; \end{pmatrix}. \tag{87}$$

5 Побудова операторів перетворення та розсіяння

Для побудови операторів перетворень $\hat{W}_1$ та $\hat{W}_2$ оберненої задачі розсіяння задамо інваріантні оператори S_1 та S_2, що діють у просторі розв'язків незбуреної системи (73), таким чином, щоб для довільних вектор-функцій

$$a := \begin{pmatrix} a_1(x+\alpha_1 y) \\ a_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1(x+\alpha_1 y) \\ b_2(x+\alpha_2 y) \end{pmatrix}$$

з $L_2(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$ виконувалися асимптотичні умови (4) – (5):

$$\begin{aligned}Y_1(x,y)=(\hat{W}_1a)_1:=(W_1S_1a)_1 \xrightarrow[y\to-\infty]{x+\alpha_1y=const} a_1(x+\alpha_1y),\\ Y_2(x,y)=(\hat{W}_1a)_2:=(W_1S_1a)_2 \xrightarrow[y\to-\infty]{x+\alpha_2y=const} a_2(x+\alpha_2y),\end{aligned}\tag{88}$$

$$\begin{aligned}Y_1(x,y)=(\hat{W}_2b)_1:=(W_2S_2b)_1 \xrightarrow[y\to+\infty]{x+\alpha_1y=const} b_1(x+\alpha_1y),\\ Y_2(x,y)=(\hat{W}_2b)_2:=(W_2S_2b)_2 \xrightarrow[y\to+\infty]{x+\alpha_2y=const} b_2(x+\alpha_2y).\end{aligned}\tag{89}$$

Розпишемо $(W_1S_1a)_1$ та $(W_1S_1a)_2$ у явному вигляді:

$$\begin{aligned}&\{(S_1)_{11}a_1+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1y)-\alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1y)\Delta^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\times\\ &\times\{(S_1)_{11}a_1+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1s)ds-\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1y)\Delta^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^\top\times\\ &\times\{(S_1)_{21}a_1+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2s)ds \xrightarrow[y\to-\infty]{x+\alpha_1y=const} \{(S_1)_{11}a_1+\\ &+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1y)-\alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1y,+\infty)\times\\ &\times\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^\top(x+\alpha_1s)\{(S_1)_{11}a_1+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1s)ds-\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1y)\times\\ &\times\Delta^{-1}(x+\alpha_1y,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\{(S_1)_{21}a_1+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2s)ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\{(S_1)_{21}a_1+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2y)-\alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2y)\Delta^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\times\\ &\times\{(S_1)_{11}a_1+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1s)ds-\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2y)\Delta^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^\top\times\\ &\times\{(S_1)_{21}a_1+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2s)ds \xrightarrow[y\to-\infty]{x+\alpha_2y=const} \{(S_1)_{21}a_1+\\ &+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2y)-\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2y)\Delta^{-1}(-\infty,x+\alpha_2y)\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^\top\times\\ &\times\{(S_1)_{21}a_1+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2s)ds.\end{aligned}$$

Згідно зі співвідношеннями (88) повинні виконуватись рівності

$$\begin{aligned}&\{(S_1)_{11}a_1+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1y)-\alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1y,+\infty)\times\\ &\times\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\{(S_1)_{11}a_1+(S_1)_{12}a_2\}(x+\alpha_1s)ds-\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1y)\times\\ &\times\Delta^{-1}(x+\alpha_1y,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\{(S_1)_{21}a_1+(S_1)_{22}a_2\}(x+\alpha_2s)ds=a_1(x+\alpha_1y),\end{aligned}$$

$$\{S_{21}a_1 + S_{22}a_2\}(x+\alpha_2 y) - \alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 y)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^{\top}\{S_{21}a_1 + S_{22}a_2\}(x+\alpha_2 s)ds = a_2(x+\alpha_2 y),$$

з яких отримаємо таку систему для знаходження елементів оператора S_1:

$$\begin{cases}\left(I-\alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(-\infty,x+\alpha_2 y)\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^{\top}(x+\alpha_2 s)ds\right)\circ(S_1)_{21}=0,\\ \left(I-\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(-\infty,x+\alpha_2 y)\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_2^{\top}(x+\alpha_2 s)ds\right)\circ(S_1)_{22}=I,\\ \left(I-\alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^{\top}(x+\alpha_1 s)ds\right)\circ(S_1)_{11}-\\ -\left(\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\top}(x+\alpha_2 s)ds\right)\circ(S_1)_{21}=I,\\ \left(I-\alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{y}\psi_1^{\top}(x+\alpha_1 s)ds\right)\circ(S_1)_{12}-\\ -\left(\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\top}(x+\alpha_2 s)ds\right)\circ(S_1)_{22}=0.\end{cases}\tag{90}$$

З першого рівняння системи (90) отримуємо, що $(S_1)_{21}=0$.

З другого та третього рівняння (90) за допомогою теореми про бінарні перетворення інтегро-диференціального оператора [6] знаходимо явний вигляд операторів $(S_1)_{11}$ та $(S_1)_{22}$:

$$(S_1)_{11} = I + \alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1 y)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta^{-1}(x+\alpha_1 s,+\infty)\psi_1^{\top}(x+\alpha_1 s)ds, \tag{91}$$

$$(S_1)_{22} = I + \alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta^{-1}(-\infty,x+\alpha_2 s)\psi_2^{\top}(x+\alpha_2 s)ds. \tag{92}$$

З четвертого рівняння системи (90) та теореми про бінарні перетворення інтегро-диференціального оператора [6] отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
(S_1)_{12} = & \left(I - \alpha_1\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, +\infty) \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds \right)^{-1} \circ \\
\circ & \left(\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, +\infty) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds \right) \circ (S_1)_{22} = \\
& = \alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds.
\end{aligned}
$$

Таким чином, оператор S_1, який діє інваріантно у просторі розв'язків незбуреної системи (73), має такий вигляд:

$$
S_1 = I + \begin{pmatrix}
\alpha_1\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, +\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds; & \\
& \alpha_2\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds; \\
0; & \\
& \alpha_2\varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds;
\end{pmatrix} \quad (93)
$$

Оператор S_2 знаходиться аналогічним чином і виглядає так:

$$
S_2 = I + \begin{pmatrix}
\alpha_1\varphi_1 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, -\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds; & \\
& -\alpha_2\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds; \\
0; & \\
& \alpha_2\varphi_2 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds;
\end{pmatrix} \quad (94)
$$

Отже, оператори перетворень $\hat{W}_1$ та $\hat{W}_2$ допускають факторизації:

$$
\hat{W}_1 = W_1 S_1, \quad \hat{W}_2 = W_2 S_2. \quad (95)
$$

З формул (82), (84) та (93), (94), а також факторизацій (95) знаходимо

$$
\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} (\hat{W}_1)_{11} & (\hat{W}_1)_{12} \\ (\hat{W}_1)_{21} & (\hat{W}_1)_{22} \end{pmatrix}, \quad (96)
$$

де

$$
\begin{gathered}
(\hat{W}_1)_{11} = I + \alpha_1\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}\left(\int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^\top\varphi_2(x+\alpha_2 s)ds\right)\times \\
\times\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, +\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \\
(\hat{W}_1)_{12} = -\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y)\times \\
\times\Delta(-\infty, x+\alpha_2 y)\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds, \\
(\hat{W}_1)_{21} = -\alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y)\times \\
\times\Delta(x+\alpha_1 y, +\infty)\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, +\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \\
(\hat{W}_1)_{22} = I + \alpha_1\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^\top\varphi_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\times \\
\times\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds;
\end{gathered}
\tag{97}
$$

$$
\hat{W}_2 = \begin{pmatrix} (\hat{W}_2)_{11} & (\hat{W}_2)_{12} \\ (\hat{W}_2)_{21} & (\hat{W}_2)_{22} \end{pmatrix},
\tag{98}
$$

де

$$
\begin{gathered}
(\hat{W}_2)_{11} = I + \alpha_1\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} \psi_2^\top\varphi_2(x+\alpha_2 s)ds\right)\times \\
\times\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, -\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \\
(\hat{W}_2)_{12} = -\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y)\times \\
\times\Delta(+\infty, x+\alpha_2 y)\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds, \\
(\hat{W}_2)_{21} = -\alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, x+\alpha_2 y)\times \\
\times\Delta(x+\alpha_1 y, -\infty)\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, -\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \\
(\hat{W}_2)_{22} = I + \alpha_1\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}\left(\int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^\top\varphi_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\times \\
\times\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds.
\end{gathered}
\tag{99}
$$

Зі співвідношення $Y = \hat{W}_1 a = \hat{W}_2 b$ (див. зображення (12), (15) леми 1) та означення оператора розсіяння знаходимо факторизацію для оператора розсіяння S та оберненого S^{-1}:

$$S = \hat{W}_2^{-1}\hat{W}_1 = S_2^{-1}W_2^{-1}W_1S_1,\ S^{-1} = \hat{W}_1^{-1}\hat{W}_2 = S_1^{-1}W_1^{-1}W_2S_2. \tag{100}$$

Використавши рівності (100), отримаємо явний вигляд операторів S та S^{-1}. Маємо:

$$S = I + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \tag{101}$$

де

$$\begin{gathered} F_{11} = -\alpha_1\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, -\infty)\times \\ \times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 ds\right)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, +\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \\ F_{12} = \alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, -\infty)\times \\ \times\Delta(-\infty,-\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds, \\ F_{21} = -\alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 y)\times \\ \times\Delta(+\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, +\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \\ F_{22} = \alpha_1\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 y)\times \\ \times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1 ds\right)\int\limits_{+\infty}^{y}\Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds; \end{gathered} \tag{102}$$

$$S^{-1} = I + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}; \tag{103}$$

де

$$\begin{gathered} G_{11} = \alpha_1\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, +\infty)\times \\ \times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^\top\varphi_2 ds\right)\int\limits_{+\infty}^{y}\Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, -\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \end{gathered} \tag{104}$$

$$\begin{gathered} G_{12} = -\alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y, +\infty)\times \\ \times\Delta(+\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds, \end{gathered} \tag{105}$$

$$\begin{gathered} G_{21} = \alpha_1\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 y)\times \\ \times\Delta(-\infty,-\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^{-1}(x+\alpha_1 s, -\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 s)ds, \end{gathered} \tag{106}$$

$$G_{22} = -\alpha_1\alpha_2\varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(-\infty, x+\alpha_2 y)\times \\ \times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^\top\varphi_1 ds\right)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta^{-1}(+\infty, x+\alpha_2 s)\psi_2^\top(x+\alpha_2 s)ds. \tag{107}$$

Зауваження. *Нехай оператор L має вигляд*

$$L = \begin{pmatrix} \partial_y - \alpha_1\partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y - \alpha_2\partial_x \end{pmatrix}, \ \ \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{108}$$

де

$$u_1 := u, \ u_2 := \mu\overline{u}, \ u \in L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}). \tag{109}$$

У цьому випадку виконуються такі співвідношення:

$$L^* = -\sigma L\sigma^{-1}, \ \ L^* := \overline{L}^\tau, \tag{110}$$

де $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \end{pmatrix}$, *тобто, оператор L є σ-косоермітовим. Внаслідок цього між розв'язками лінійної системи $LY = 0$ та транспонованої системи $L^\tau\tilde{Y}(x,y) = 0$ існує такий зв'язок:*

$$\tilde{Y} = \sigma\overline{Y}. \tag{111}$$

Формули (78) за умов редукції набудуть вигляду

$$u_1 = u = \mu^{-1}(\alpha_2-\alpha_1)\varphi_1(C+\Omega[\sigma\bar{\varphi},\varphi])^{-1}\varphi_2^*, \ u_2 = \mu\overline{u}, \ \ C = C^*. \tag{112}$$

Неважко бачити з формул (101), (103), що між компонентами операторів S та S^{-1} виконуються такі співвідношення:

$$\alpha_2 G_{21} = -\alpha_1\mu F_{12}^*, \ \ \alpha_1 G_{12} = -\alpha_2\mu^{-1}F_{21}^*, \ \ G_{11} = F_{11}^*, \ \ G_{22} = F_{22}^*.$$

6 Еквівалентність результатів, отриманих методами оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень

Проведемо заміну функцій

$$\varphi_1(x+\alpha_1 y), \quad \varphi_2(x+\alpha_2 y), \quad \psi_1(x+\alpha_1 y), \quad \psi_2(x+\alpha_2 y)$$

таким чином, щоб для ядер F_{12} (102) та G_{21} (106) виконувалися рівності:

$$F_{12}(x,y) = p_1(x+\alpha_1 y)q_1^\top(x+\alpha_2 y), \;\; G_{21} = q_2(x+\alpha_2 y)p_2^\top(x+\alpha_1 y). \quad (113)$$

Для цього впровадимо функції $p_1(x+\alpha_1 y)$, $q_1(x+\alpha_2 y)$, $p_2(x+\alpha_1 y)$, $q_2(x+\alpha_2 y)$ так:

$$\begin{aligned} p_1(x+\alpha_1 y) &= \varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,-\infty)\Delta(-\infty,-\infty), \\ q_1^\top(x+\alpha_2 y) &= \alpha_2\Delta^{-1}(-\infty,x+\alpha_2 y)\psi_2^\top(x+\alpha_2 y), \\ p_2^\top(x+\alpha_1 y) &= \alpha_1\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,-\infty)\psi_1^\top(x+\alpha_1 y), \\ q_2(x+\alpha_2 y) &= \varphi_2(x+\alpha_2 y)\Delta^{-1}(-\infty,x+\alpha_2 y)\Delta(-\infty,-\infty). \end{aligned} \quad (114)$$

Теорема 3. *Після заміни змінних (114) потенціали u_1, u_2 (78) співпадають з відповідними потенціалами u_1, u_2 (64), (65), що отримані методом оберненої задачі розсіяння.*

Доведення. Безпосередньо з формул заміни змінних (114) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \alpha_1\int_{-\infty}^{y}\psi_1^\top\varphi_1(x+\alpha_1 s)ds &= \Delta(-\infty,-\infty)\times\left\{\left(I-\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)^{-1}-I\right\}, \\ \alpha_2\int_{-\infty}^{y}\psi_2^\top\varphi_2(x+\alpha_2 s)ds &= \Delta(-\infty,-\infty)\times\left\{\left(I-\int_{-\infty}^{y}q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)^{-1}-I\right\}. \end{aligned} \quad (115)$$

З формул (115) шляхом технічних перетворень отримуємо:

$$\Delta(x+\alpha_1 y,x+\alpha_2 y) = \Delta(-\infty,-\infty)\times\left(I-\int_{-\infty}^{y}q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{I-\left(\int_{-\infty}^{y}q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)\left(\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\right\}\times\left(I-\int_{-\infty}^{y}p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)^{-1}.$$

Доведемо, наприклад, еквівалентність зображень для потенціалу u_1 (64) та (78). Маємо:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}u_1(x,y) = \alpha_2\varphi_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,x+\alpha_2 y)\psi_2^\top(x+\alpha_2 y) =$$
$$= p_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(-\infty,-\infty)\Delta(x+\alpha_1 y,-\infty)\times$$
$$\times\Delta^{-1}(x+\alpha_1 y,x+\alpha_2 y)\Delta(-\infty,x+\alpha_2 y)q_1^\top(x+\alpha_2 y) =$$

$$= p_1(x+\alpha_1 y)\Delta^{-1}(-\infty,-\infty)\Delta(-\infty,-\infty)\left(I-\int\limits_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(I-\int\limits_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\left\{I-\left(\int\limits_{-\infty}^{y} q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left(I-\int\limits_{-\infty}^{y} q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)\Delta^{-1}(-\infty,-\infty)\Delta(-\infty,-\infty)\times$$
$$\times\left(I-\int\limits_{-\infty}^{y} q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)^{-1} q_1^\top(x+\alpha_2 y) =$$
$$= p_1(x+\alpha_1 y)\left\{I-\left(\int\limits_{-\infty}^{y} q_1^\top q_2(x+\alpha_2 s)ds\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} p_2^\top p_1(x+\alpha_1 s)ds\right)\right\}^{-1} q_1^\top(x+\alpha_2 y).$$

Для потенціалу u_2 еквівалентність зображень перевіряється аналогічно.

Теорема 4. *Після заміни (114) оператор розсіяння S (101) та обернений S^{-1} (103), а також оператори перетворень $\hat{W}_1$ (96), $\hat{W}_2$ (98) співпадають з відповідними операторами S (28), S^{-1} (29) та H (60) – (63), K (56) – (59).*

Доведення аналогічно як і в теоремі 3, проводиться шляхом технічних обчислень.

7 Висновки

Як і для систем Дірака, користуючись підходом робіт [2, 3], можна довести щільність потенціалів $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ (64),(65), що відповідають виродженим даним розсіяння (33), в просторі $L_2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$. Відповідні твердження можна розповсюдити і на задачі Коші-Діріхле для нелінійних систем теорії солітонів, що тісно пов'язані з системою (1) (див., наприклад, [2, 7–9]).

Результати статі, сформульовані в теоремах 3 і 4, показують, що класи точних розв'язків цих систем, які можна отримати методом бінарних перетворень, є ширшими, ніж при класичному підході.

Так як результати Розділу 5 носять алгебричний характер, вони без змін переносяться на випадок $\alpha_1, \alpha_2 \in i\mathbb{R}$, в якому система (1) є еліптичною і пов'язана з іншими типами нелінійних рівнянь [7–9].

Питанню про співвідношення між класичним підходом в методі оберненої задачі розсіяння та методом бінарних перетворень для загальної гіперболічної системи рівнянь [2] ми плануємо присвятити одну з наступних праць.

[1] *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. – К.: Наук.думка, 1973. – 182 с.

[2] *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – К.: Наук.думка, 1991. – 232 с.

[3] *Нижник Л.П., Починайко М.Д., Тарасов В.Г.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака в характеристических переменных // Спектральная теория операторов в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1983. – С. 72 – 93.

[4] *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №8. – С. 1238 – 1260.

[5] *Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І.* Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень. // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010 – №287: Серія фізико-математичні науки. – С. 28 – 59.

[6] *Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегро-диференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип.22. – С. 32 – 35.

[7] *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №2. – С. 252 – 264.

[8] *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і $(2+1)$-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №11. – С. 1531 – 1550.

[9] *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* Інтегрування деяких $(2+1)$–вимірних інтегровних систем методами оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу // Мат. студії. – 2003. – Т. 20, №2. – С. 119 – 132.

OPERATORS OF TRANSFORMATIONS FOR THE HYPERBOLIC SYSTEM OF TWO EQUATIONS

Yuriy SYDORENKO, Olexandr CHVARTATSKYY

Ivan Franko National University of L'viv
1, Universytetska Str., Lviv 79000

We consider the scattering and the inverse scattering problem. It is proved that all the main objects of the inverse scattering problem can be obtained by the method of binary transformations in case of the degenerate scattering data.