ІНВАРІАНТНІСТЬ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ ДИФУЗІЇ ВІДНОСНО УЗАГАЛЬНЕНОЇ АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ У ВИПАДКУ ТРИВИМІРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

©2010 р. Микола СЄРОВ, Тамара КАРПАЛЮК

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка
Першотравневий проспект, 24, Полтава 36011

Редакція отримала статтю 26 листопада 2010 р.

Проведено класифікацію лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля. Із класу систем рівнянь конвекції дифузії для тривимірного векторного поля виділено ті системи, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку однієї просторової змінної.

1 Вступ

Добре відоме скалярне рівняння конвекції дифузії

$$u_0 = u_{11} + f(u)u_1, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $f(u)$ — довільна гладка функція, має широке застосування у фізиці [1], хімії [2], біології [3] та привернуло увагу багатьох дослідників у області математики, зокрема, симетрійного аналізу. Ліївську симетрію рівняння (1) досліджено у статті [4]. Рівняння (1), як частинний випадок, містить у собі класичне рівняння Бюргерса, симетрійні властивості якого добре відомі.

УДК 517.9:519.46, MSC 2000: 58J70, 35A30

Останнім часом все більше досліджень пов'язано з узагальненням рівняння (1) на випадок багатовимірного векторного поля та багатьох просторових змінних

$$U_0 = \Delta U + F^a(U)U_a, \tag{2}$$

де $U = (u^1, u^2, ..., u^n) \in \mathbb{R}^n$, $u^k = u^k(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, ..., x_m)$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2},$$

$F^a(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $n \times n$, $a = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$, індекси внизу (наприклад, в записі U_a) використовуються для позначення похідних за відповідними змінними.

Система (2) при конкретному вигляді її нелінійної частини і значеннях n, m знаходить широке застосування при описі різноманітних фізичних, хімічних, біологічних процесів. Так, математичні моделі, що базуються на цій системі, застосовуються у макрокінетиці, основний зміст якої є вивчення ролі дифузії, теплопередачі та конвекції в протіканні хімічних реакцій.

Розв'язання широкого кола науково-технічних проблем передбачає дослідження явища вільної конвекції. Важливу роль конвективний тепломасоперенос відіграє в технології виробництва об'ємних монокристалів і напівпровідникових структур із рідкої фази. Процес тепломасообміну має велике практичне значення для інтенсифікації теплоенергетичних і хімікотехнологічних процесів у різних сферах промисловості.

З точки зору фізичного застосування системи (2), звичайно, найбільш цікавими є випадки $n, m = \overline{1,3}$. Тому більшість публікацій стосується саме цих систем. Так, у статті [5] досліджено ліївську та Q-умовну симетрії системи двох рівнянь типу Бюргерса. Також ліївська та Q-умовна симетрії описані в [6] для системи вигляду (2), в якій $n = 2$, $m = 1$, матриця F містить дві довільні функції. Інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея системи (2) досліджено в [7] при $n = 2$, $m = 1$, а в [8] – при $n = 2, 3$, $m = 2$. Задача дослідження інваріантності системи (2) відносно узагальненої алгебри Галілея з оператором маси розв'язана в [9] для $n = 2$, $m = 1$.

У даній статті розглянуто систему (2) при $n = 3$, $m = 1$:

$$U_0 = U_{11} + F(U)U_1. \tag{3}$$

Проведено класифікацію лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля $U = \{u^1, u^2, u^3\}$, досліджено її інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея, знайдено всі зображення функції F в (3), при яких вона інваріантна відносно вказаної алгебри.

2 Перетворення еквівалентності системи (3)

Оскільки система (3) містить довільні функції, то вона описує деякий клас систем. Важливою в цьому випадку є задача знаходження перетворень еквівалентності цього класу, оскільки в результаті дії перетворень із групи еквівалентності дана система переходить в еквівалентну їй систему, а її алгебра інваріантності – в подібну їй алгебру Лі операторів симетрії. Тому дослідження симетрійних властивостей однієї системи дозволяє провести дослідження відразу усього класу систем, які можна отримати із даної системи шляхом заміни змінних. Знайдемо групу перетворень еквівалентності системи (3).

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Основну групу перетворень еквівалентності (більш детально див. [10], [11]) системи (3) генерує оператор*

$$E = \tau^{\mu}(x,u)\partial_{\mu} + \gamma^{a}(x,u)\partial_{u^a} + \zeta^{ab}(x,u,F)\partial_{F^{ab}}, \tag{4}$$

координати якого мають вигляд

$$\begin{aligned} &\tau^0 = 2æx_0 + d_0, \quad \tau^1 = æx_1 + gx_0 + d_1, \\ &\gamma^a = k_{ab}u^b + l_a, \quad \zeta^{ab} = k_{ac}F^{cb} - k_{cb}F^{ac} - æF^{ab} - \delta_{ab}g, \end{aligned} \tag{5}$$

де $æ$, g, d_{μ}, k_{ab}, l_a *— довільні сталі.*

Доведення. Для доведення леми використаємо інфінітезимальний метод [10], [11]. Оператор еквівалентності шукаємо у вигляді (4). З умови еквівалентності системи (3) відносно цього оператора

$$\tilde{E}\left(u_0^a - u_{11}^a - F^{ab}u_1^b\right)|_M = 0, \quad \tilde{E}F_{\mu}^{ab}|_M = 0, \quad \tilde{E}F_{u_{\mu}^c}^{ab}|_M = 0,$$

де M — многовид

$$u_0^a = u_{11}^a + F^{ab}u_1^b, \quad F_{\mu}^{ab} = F_{u_{\mu}^c}^{ab} = 0,$$

отримаємо систему рівнянь для визначення координат оператора E

$$\tau_1^0 = \tau_{u^a}^{\mu} = 0, \quad \tau_0^0 - 2\tau_1^1 = 0; \tag{6}$$

$$\gamma_{u^b u^c}^a = 0, \quad \gamma_{\mu}^a = 0; \tag{7}$$

$$\gamma_1^b F^{ab} - \gamma_0^a + \gamma_{11}^a = 0; \tag{8}$$

$$\zeta^{ab}_{\mu} = 0; \tag{9}$$

$$\zeta^{ab} - \gamma^a_{u^c} F^{cb} + \gamma^c_{u^b} F^{ac} + \tau^1_1 F^{ab} + \delta_{ab}\tau^1_0 + 2\gamma^a_{1u^b} = 0. \tag{10}$$

Інтегруючи рівняння (6), отримаємо вигляд функцій τ^μ:

$$\tau^0 = 2A(x_0), \quad \tau^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \tag{11}$$

де A, B — довільні гладкі функції, крапка означає похідну за змінною x_0. Система (7) визначає вигляд функцій γ^a

$$\gamma^a = k_{ab}u^b + l_a, \tag{12}$$

де k_{ab}, l_a – довільні сталі. Рівняння (8) при умовах (12) виконуються тотожно. Підставивши (11) і (12) у систему (10), отримаємо

$$\zeta^{ab} = k_{ac}F^{cb} - k_{cb}F^{ac} - \dot{A}F^{ab} - \delta_{ab}(\ddot{A}x_1 + \dot{B}).$$

Із рівняння (9) одержимо умови $\ddot{A} = \ddot{B} = 0$. Таким чином, функції A, B набувають вигляду

$$A = æx_0 + \frac{d_0}{2}, \quad B = gx_0 + d_1.$$

Отже, розв'язок системи (6) – (10) — це функції (5), які і є координатами оператора еквівалентності E, що породжує групу перетворень еквівалентності системи (3). Лему 1 доведено.

3 Система визначальних рівнянь

Використовуючи інфінітезимальний метод С. Лі, знайдемо систему визначальних рівнянь для нелінійностей $F(U)$ та координат інфінітезимального оператора групи симетрії системи (3). Справедливе наступне твердження.

Лема 2. *Система (3) інваріантна відносно інфінітезимального оператора*

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta^a(x,u)\partial_{u^a} \tag{13}$$

тоді і тільки тоді, коли функції ξ^μ, η^a, F^{ab} задовольняють наступну систему диференціальних рівнянь

$$\xi^0_1 = \xi^\mu_{u^a} = 0, \quad \xi^0_0 - 2\xi^1_1 = 0, \tag{14}$$

$$\eta^a_{u^b u^c} = 0, \tag{15}$$

$$\eta^b_1 F^{ab} - \eta^a_0 + \eta^a_{11} = 0, \tag{16}$$

$$\eta^c F^{ab}_{u^c} - \eta^a_{u^c} F^{cb} + \eta^c_{u^b} F^{ac} + \xi^1_1 F^{ab} + \delta_{ab}\xi^1_0 + 2\eta^a_{1u^b} = 0, \tag{17}$$

де $\mu = 0,1$*,* $a,b,c = \overline{1,3}$*,* δ_{ab} *— символ Кронекера, індекс внизу біля функції означає диференціювання за відповідним аргументом.*

Лема 2 доводиться стандартним методом С. Лі [12], [13], [14].

4 Зображення узагальненої алгебри Галілея

Алгеброю Галілея називається [15] тривимірна алгебра Лі, яка породжується перетвореннями зсувів та чисто галілеївськими перетвореннями

$$\begin{aligned} x_0{}' &= x_0 + \theta_0, \\ x_1{}' &= x_1 + \theta_1 + \theta_2 x_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Перетворення (18) породжують алгебру Лі з базисними операторами X_1, X_2, X_3, які задовольняють комутаційні співвідношення розв'язної нерозкладної алгебри

$$[X_1, X_2] = [X_2, X_3] = 0, \quad [X_1, X_3] = X_2. \tag{19}$$

Оскільки система (3) навіть при довільній функції F інваріантна відносно алгебри $< \partial_0, \partial_1 >$, то ці оператори візьмемо в якості X_1, X_2, а в якості X_3 — оператор Галілея G. З рівнянь (14), (15) випливає, що найбільш загальний вигляд, якого може набувати оператор G, виражається формулою

$$G = 2A\partial_0 + \left(\dot{A}x_1 + B\right)\partial_1 + \left(\alpha^{ab}u^b + \beta^a\right)\partial_{u^a},$$

де $A = A(x_0)$, $B = B(x_0)$, $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(x_0, x_1)$, $\beta^a = \beta^a(x_0, x_1)$ – довільні гладкі функції.

З умов комутування (19) одержимо $\dot{A} = 0, \quad \dot{B} = 1, \quad \alpha^{ab}_\mu = \beta^a_\mu = 0$. Тоді $G = c_1\partial_0 + (x_0 + c_2)\,\partial_1 + Q_1$, де $Q_1 = \left(a_{ab}u^b + b_a\right)\partial_{u^a}$, c_1, c_2, a_{ab}, b_a — довільні сталі.

Алгебра $< \partial_0, \partial_1, G = c_1\partial_0 + (x_0 + c_2)\,\partial_1 + Q_1 >$ еквівалентна алгебрі

$$< \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1 >, \tag{20}$$

оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, G] = \partial_1, \quad [\partial_1, G] = 0. \tag{21}$$

Цю алгебру будемо називати алгеброю Галілея $AG\,(1,1)$. Оператори алгебри (20), доповнені операторами масштабних

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2 \tag{22}$$

та проективних

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1Q_1 + x_0Q_2 + Q_3 \tag{23}$$

перетворень, утворюють узагальнену алгебру Галілея

$$AG_2\,(1,1) =< \partial_0, \partial_1, G, D, \Pi >, \tag{24}$$

де $Q_2 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}$, $Q_3 = (\theta_{ab}u^b + \sigma_a)\partial_{u^a}$, α_{ab}, θ_{ab}, β_a, σ_a — довільні сталі, $a, b = \overline{1,3}$, якщо оператори алгебри (24) задовольняють комутаційні співвідношення (21) та

$$[\partial_0, D]{=}2\partial_0, \quad [\partial_1, D]{=}\partial_1, \tag{25}$$

$$[\partial_0, \Pi]{=}D, \quad [\partial_1, \Pi]{=}G, \quad [G, D]{=}{-}G, \quad [G, \Pi]{=}0, \quad [D, \Pi]{=}2\Pi. \tag{26}$$

Зауважимо, що вигляд операторів D та Π, як і оператора G, встановлено з рівнянь (14), (15) визначальної системи та комутаційних співвідношень (25), (26). Крім того, із (26) випливають комутаційні співвідношення для операторів Q_i $(i = \overline{1,3})$

$$[Q_1, Q_2] = -Q_1, \quad [Q_1, Q_3] = 0, \quad [Q_2, Q_3] = 2Q_3. \tag{27}$$

5 Класифікація лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля

Як бачимо з формул (5), система рівнянь (3) допускає лінійні перетворення еквівалентності

$$W = KU + L, \tag{28}$$

де K — невироджена стала матриця розмірності 3×3, L — стала матриця розмірності 3×1. Оскільки оператори Q_i $(i = \overline{1,3})$ містять довільні сталі, то вони задають деякий клас операторів (20), (22), (23). Прокласифікуємо зображення узагальненої алгебри Галілея (24), нееквівалентні відносно перетворень (28). Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *З точністю до перетворень еквівалентності (28) існує 49 нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея (24), які визначаються операторами Q_i, $i = \overline{1,3}$, що подані в таблиці 1.*

Таблиця 1: Нееквівалентні зображення $AG_2(1,1)$.

№	Q_1	Q_2	Q_3	*Умови*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}+nu^3\partial_{u^3}$	$\theta_1\partial_{u^2}$	
2.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I_{12}-u^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	$\theta_1\partial_{u^2}$	
3.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}+u^3\partial_{u^2}$	$\theta_1\partial_{u^2}$	
4.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I_{12}-u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	
5.	$\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}$	∂_{u^3}	
6.	$u^1\partial_{u^2}$	$n_1I-I_{23}+n_2u^3\partial_{u^3}$	0	$n_i\neq-1$
7.	$u^1\partial_{u^2}$	$nI_{12}-u^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	0	$n\neq-1$, $n\neq2$
8.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}+nu^3\partial_{u^3}$	0	
9.	$u^1\partial_{u^2}$	$nI-u^2\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	0	
10.	$u^1\partial_{u^2}$	$-u^2\partial_{u^2}+(u^1+1)\partial_{u^3}$	0	
11.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	0	
12.	$u^1\partial_{u^2}$	$nI-I_{23}+u^3\partial_{u^2}$	0	$n\neq-1$
13.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	0	
14.	$u^1\partial_{u^2}$	$-I-u^2\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	∂_{u^2}	
15.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}-2u^3\partial_{u^3}$	$u^1\partial_{u^3}$	
16.	$u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	
17.	$u^1\partial_{u^2}$	$nI-I_{23}+2u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	$n\neq-1$
18.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}+u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	
19.	$u^1\partial_{u^2}$	$nI_{12}-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	∂_{u^3}	$n\neq0$
20.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}-3u^3\partial_{u^3}$	∂_{u^3}	
21.	$u^1\partial_{u^2}$	$-2I-u^2\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	∂_{u^3}	
22.	$u^1\partial_{u^2}$	$-2I-I_{12}-u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	
23.	$u^1\partial_{u^2}+æu^2\partial_{u^3}$	$nI-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$\theta u^1\partial_{u^3}$	
24.	$u^1\partial_{u^2}+æu^2\partial_{u^3}$	$I_{12}+u^1\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$	$\theta u^1\partial_{u^3}$	
25.	$u^1\partial_{u^2}+æu^2\partial_{u^3}$	$-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$(\theta u^1+1)\partial_{u^3}$	

1	*2*	*3*	*4*	*5*
26.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$-I_{13}+nI_{23}$	0	$n\neq\pm1$, $n\neq-2$
27.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$-I_{13}+\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	0	
28.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$-I_{12}+2u^2\partial_{u^2}+n\partial_{u^3}$	$mu^2\partial_{u^1}$	
29.	$\partial_{u^1}+æu^2\partial_{u^3}$	$-I+nu^2\partial_{u^1}-u^3\partial_{u^3}$	$\theta\partial_{u^3}$	
30.	$\partial_{u^1}+æu^1\partial_{u^2}$ $+u^2\partial_{u^3}$	$-I-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$\theta(\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3})$	
31.	∂_{u^1}	$-I_{13}+\partial_{u^2}+nu^3\partial_{u^3}$	0	$n\neq-1$
32.	∂_{u^1}	$-I_{13}+u^3\partial_{u^1}+\partial_{u^2}$	0	
33.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1}+\partial_{u^2}+u^2\partial_{u^3}$	0	
34.	∂_{u^1}	$-I+n_1u^2\partial_{u^2}+n_2u^3\partial_{u^3}$	0	$n_i\neq-1$
35.	∂_{u^1}	$-I+u^3\partial_{u^1}+nu^2\partial_{u^2}$	0	$n\neq-1$
36.	∂_{u^1}	$-I+nI_{23}+u^2\partial_{u^3}$	0	$n\neq-1$
37.	∂_{u^1}	$-I+u^3\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	0	
38.	∂_{u^1}	$-I+(u^2+u^3)\partial_{u^1}$	0	
39.	∂_{u^1}	$-I+n_1I_{23}+n_2J_{32}$	0	
40.	∂_{u^1}	$-I+nI_{23}+2u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	$n\neq-1$
41.	∂_{u^1}	$-I+u^3\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	
42.	∂_{u^1}	$-I_{13}+\partial_{u^2}+3u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	
43.	∂_{u^1}	$-I+2I_{23}+2u^3\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^2}$	
44.	∂_{u^1}	$-I-I_{23}-2u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	
45.	∂_{u^1}	$-I+2I_{23}+nu^3\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}$	
46.	∂_{u^1}	$-I_{12}+2u^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}$	
47.	∂_{u^1}	$-I+2I_{23}+u^2\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}$	
48.	∂_{u^1}	$-I+u^3\partial_{u^1}+2u^2\partial_{u^2}$	$u^2\partial_{u^1}$	
49.	∂_{u^1}	$-I-I_{23}+3u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^1}+\partial_{u^2}$	

У таблиці 1 n, n_i, m — *довільні сталі,* $i=1,2$,
$I=u^1\partial u^1+u^2\partial u^2+u^3\partial u^3$, $I_{12}=u^1\partial u^1+u^2\partial u^2$, $I_{13}=u^1\partial u^1+u^3\partial u^3$,

$I_{23}{=}u^2\partial u^2{+}u^3\partial u^3,\ J_{32}{=}u^2\partial u^3{-}u^3\partial u^2,$
$æ \in \{0,1\},\ (æ_1, æ_2) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\},$
$\theta \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{якщо } æ = 1, \\ \{0,1\}, & \textit{якщо } æ = 0, \end{cases} \quad \theta_1 \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{якщо } æ_1 \cdot æ_2 = 1, \\ \{0,1\}, & \textit{якщо } æ_1 \cdot æ_2 = 0. \end{cases}$

Доведення. Використаємо класифікацію алгебри Галілея (20), яка проведена в [8], де показано, що існує 10 нееквівалентних зображень оператора Q_1, який визначає вигляд алгебри Галілея:

I. $Q_1 = æI + ku^2\partial_{u^2} + \theta u^3\partial_{u^3},$

II. $Q_1 = æI + u^1\partial_{u^2} + \theta u^3\partial_{u^3},$

III. $Q_1 = æI + u^1\partial_{u^2} + u^2\partial_{u^3},$

IV. $Q_1 = k_1 I + k_2 I_{23} + J_{32},$

V. $Q_1 = \partial_{u^1},$

VI. $Q_1 = \partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2} + u^3\partial_{u^3},$

VII. $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} + æu^3\partial_{u^3},$

VIII. $Q_1 = \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2} + u^2\partial_{u^3},$

IX. $Q_1 = \partial_{u^1} + I_{23} + u^2\partial_{u^3},$

X. $Q_1 = \partial_{u^1} + kI_{23} + J_{32},$

де k, k_i — довільні сталі, $i = 1, 2$.

Щоб отримати узагальнену алгебру Галілея (24), кожне із 10 зображень алгебри (20), доповнимо операторами (22), (23), вимагаючи виконання комутаційних співвідношень (27). Покажемо це детально на прикладі зображення вигляду VII. Для інших випадків доведення теореми аналогічне.

Розглянемо алгебру Галілея, яку визначає зображення VII

$$AG(1,1) =< \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} + æu^3\partial_{u^3} >, \tag{29}$$

та доповнимо її операторами масштабних і проективних перетворень, вимагаючи виконання умов (27). Перша умова

$$\begin{aligned}[Q_1, Q_2] &= [\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} + æu^3\partial_{u^3}, (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}] = \\ &= (\alpha_{a1} + \alpha_{a2}u^1 + æ\alpha_{a3}u^3)\partial_{u^a} - (\alpha_{1b}u^b + \beta_1)\partial_{u^2} - (\alpha_{3b}u^b + \beta_3)æ\partial_{u^3} = \\ &= -\,\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2} - æu^3\partial_{u^3}\end{aligned}$$

виконується тільки при $æ = 0$ та визначає вигляд операторів Q_1, Q_2:

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2},\\
&Q_2 = (\beta_1 - u^1)\partial_{u^1} + (\beta_1 u^1 - 2u^2 + \alpha_{23}u^3 + \beta_2)\partial_{u^2} +\\
&\quad + (\alpha_{33}u^3 + \beta_3)\partial_{u^3}.
\end{aligned}$$

Друга умова

$$\begin{aligned}
[Q_1, Q_3] &= [\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, (\theta_{ab}u^b + \sigma_a)\partial_{u^a}] =\\
&= (\theta_{a1} + \theta_{a2}u^1)\partial_{u^a} - (\theta_{1b}u^b + \sigma_1)\partial_{u^2} = 0
\end{aligned}$$

визначає вигляд оператора Q_3

$$Q_3 = \sigma_1\partial_{u^1} + (\sigma_1 u^1 + \theta_{23}u^3 + \sigma_2)\partial_{u^2} + (\theta_{33}u^3 + \sigma_3)\partial_{u^3}.$$

Умова комутування операторів Q_2 і Q_3 приводить до системи рівнянь

$$\sigma_1 = \theta_{33} = 0, \quad \theta_{23}\alpha_{33} = 0, \quad \theta_{23}\beta_3 = \alpha_{23}\sigma_3, \quad (\alpha_{33} + 2)\sigma_3 = 0.$$

Очевидно, що розв'язком цієї системи є такі набори сталих:

a) $\sigma_1 = \theta_{33} = 0, \quad \sigma_3 \neq 0, \quad \alpha_{33} = -2, \quad \theta_{23} = \alpha_{23} = 0;$

b) $\sigma_1 = \theta_{33} = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \theta_{23} = 0;$

c) $\sigma_1 = \theta_{33} = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \theta_{23} \neq 0, \quad \alpha_{33} = \beta_3 = 0,$

які уточнюють вигляд операторів Q_i $(i = \overline{1,3})$. Отже, маємо три набори операторів:

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (\beta_1 - u^1)\partial_{u^1} + (\beta_1 u^1 - 2u^2 + \beta_2)\partial_{u^2} +\\
&\quad + (\beta_3 - 2u^3)\partial_{u^3}, \quad Q_3 = \sigma_2\partial_{u^2} + \sigma_3\partial_{u^3}, \quad \sigma_3 \neq 0;
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (\beta_1 - u^1)\partial_{u^1} + (\beta_1 u^1 - 2u^2 + \alpha_{23}u^3 + \beta_2)\partial_{u^2} +\\
&\quad + (\alpha_{33}u^3 + \beta_3)\partial_{u^3}, \quad Q_3 = \sigma_2\partial_{u^2};
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (\beta_1 - u^1)\partial_{u^1} + (\beta_1 u^1 - 2u^2 + \alpha_{23}u^3 + \beta_2)\partial_{u^2},\\
&Q_3 = (\theta_{23}u^3 + \sigma_2)\partial_{u^2}, \quad \theta_{23} \neq 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Оскільки оператори (30) – (32) містять довільні сталі, то кожен з цих наборів Q_i описує деякий клас операторів.

Знайдемо всі нееквівалентні відносно перетворень (28) зображення алгебри (24) (фактично нееквівалентні набори операторів Q_i), вимагаючи при цьому інваріантність відносно перетворень (28) оператора $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$. Оскільки після заміни (28)

$$
\begin{aligned}
u^1 = \frac{1}{\triangle}[(k_{22}k_{33} - k_{23}k_{32})(w^1 - l_1) + (k_{13}k_{32} - k_{12}k_{33})(w^2 - l_2)+ \\
+ (k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22})(w^3 - l_3)], \quad \triangle = det(k_{ij}) \neq 0, \\
\partial_{u^1} = k_{11}\partial_{w^1} + k_{21}\partial_{w^2} + k_{31}\partial_{w^3}, \quad \partial_{u^2} = k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2} + k_{32}\partial_{w^3},
\end{aligned}
$$

то з рівності

$$
\begin{aligned}
& k_{11}\partial_{w^1}+k_{21}\partial_{w^2}+k_{31}\partial_{w^3}+\frac{1}{\triangle}[(k_{22}k_{33}-k_{23}k_{32})(w^1-l_1)+ \\
& +(k_{13}k_{32}-k_{12}k_{33})(w^2-l_2)+(k_{12}k_{23}-k_{13}k_{22})(w^3-l_3)](k_{12}\partial_{w^1}+ \\
& +k_{22}\partial_{w^2}+k_{32}\partial_{w^3})=\partial_{w^1}+w^1\partial_{w^2}
\end{aligned}
$$

одержимо умови:

$$
k_{12} = k_{13} = k_{31} = k_{32} = 0, \quad k_{11} = k_{22} = 1, \quad k_{21} = l_1, \quad k_{33} \neq 0.
$$

Таким чином, у даному випадку лінійні невироджені перетворення еквівалентності, відносно яких інваріантний оператор Q_1, мають вигляд

$$
\begin{aligned}
w^1 &= u^1 + l_1, \\
w^2 &= l_1u^1 + u^2 + k_{23}u^3 + l_2, \\
w^3 &= k_{33}u^3 + l_3, \quad k_{33} \neq 0.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Застосувавши перетворення (33) до операторів (30), бачимо, що оператор Q_1 не змінюється, а оператори Q_2, Q_3 набувають вигляду

$$
\begin{aligned}
Q_2 = [(\beta_1 + l_1) - w^1]\partial_{w^1} + [(\beta_1 + l_1)w^1 - 2w^2+ \\
+ (2l_2 + \beta_2 - l_1^2 + k_{23}\beta_3)]\partial_{w^2} + [-2w^3 + (2l_3 + k_{33}\beta_3)]\partial_{w^3}, \\
Q_3 = (\sigma_2 + \sigma_3k_{23})\partial_{w^2} + \sigma_3k_{33}\partial_{w^3}.
\end{aligned}
$$

Підберемо сталі k_{ij} та l_i так, щоб максимально спростити вигляд операторів Q_2, Q_3. Очевидно, оскільки $\sigma_3 \neq 0$, то це можна зробити, вибравши константи так

$$k_{23} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad k_{33} = \frac{1}{\sigma_3}, \quad l_1 = -\beta_1,$$
$$l_2 = \frac{1}{2}\left(\beta_1^2 - \beta_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\beta_3\right), \quad l_3 = -\frac{\beta_3}{2\sigma_3}.$$

Отже, після застосування перетворень (33) оператори (30) мають вигляд

$$\begin{aligned} &Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} - 2u^3\partial_{u^3} = -I - I_{23}, \\ &Q_3 = \partial_{u^3}, \end{aligned} \tag{34}$$

який відповідає п'ятому пункту таблиці 1.

Аналогічно, застосувавши перетворення (33) до операторів (31), отримаємо:

$$\begin{aligned} Q_2 = &\left[(\beta_1 + l_1) - w^1\right]\partial_{w^1} + \left[(\beta_1 + l_1)\, w^1 - 2w^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{k_{33}}\left(\alpha_{23} + k_{23}\left(\alpha_{33} + 2\right)\right) w^3 + 2l_2 - l_1^2 + \beta_2 - k_{23}\beta_3 - \\ &\left. - \frac{l_3}{k_{33}}\left(\alpha_{23} + k_{23}\left(\alpha_{33} + 2\right)\right)\right]\partial_{w^2} + \left[\alpha_{33}w^3 + (k_{33}\beta_3 - \alpha_{33}l_3)\right]\partial_{w^3}, \\ Q_3 = &\sigma_2\partial_{w^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, що спрощення вигляду оператора Q_2 залежить від значення сталої α_{33}. Розрізняються наступні випадки:

1. $\alpha_{33} \neq 0, -2$, тоді вибравши константи
$k_{23} = -\dfrac{\alpha_{23}}{\alpha_{33} + 2}, \quad l_1 = -\beta_1, \quad l_2 = \dfrac{1}{2}\left(\beta_1^2 - \beta_2 - \dfrac{\alpha_{23}\beta_3}{\alpha_{33} + 2}\right),$
$l_3 = \dfrac{k_{33}\beta_3}{\alpha_{33}},$
отримуємо вигляд оператора:
$$Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} + \alpha_{33}w^3\partial_{w^3}; \tag{35}$$

2. $\alpha_{33} = 0$, тоді набір констант
$k_{23} = -\dfrac{\alpha_{23}}{2}, \quad l_1 = -\beta_1, \quad l_2 = \dfrac{1}{2}\left(\beta_1^2 - \beta_2 - \dfrac{\alpha_{23}\beta_3}{2}\right)$
приводить до оператора:
$$Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} + \beta_3\partial_{w^3}; \tag{36}$$

3. $\alpha_{33} = -2$, тоді вибравши сталі
$l_1 = -\beta_1, \quad l_2 = \frac{1}{2}\left(\beta_1^2 - \beta_2 + k_{23}\beta_3 - \frac{\alpha_{23}\beta_3}{2}\right), \quad l_3 = -\frac{k_{33}\beta_3}{2},$
отримуємо наступний вигляд оператора:

$$Q_2 = -w^1\partial_{w^1} + (\alpha_{23}w^3 - 2w^2)\partial_{w^2} - 2w^3\partial_{w^3}. \tag{37}$$

Слід зазначити, що для оператора (35) умову $\alpha_{33} \neq 0, -2$ можна опустити, якщо на коефіцієнти операторів (36), (37) накласти, відповідно, умови $\beta_3 \neq 0$, $\alpha_{23} \neq 0$. У такому разі заміни $v^1 = w^1$, $v^2 = w^2$, $v^3 = \frac{1}{\beta_3}w^3$ та $v^1 = w^1$, $v^2 = w^2$, $v^3 = \alpha_{23}w^3$, відповідно, приводять до значень констант $\beta_3 = 1$ у формулі (36) та $\alpha_{23} = 1$ у формулі (37).

Отже, набори операторів Q_i $(i = \overline{1,3})$ для (31) мають вигляд:

$$\begin{gathered}Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} + \alpha_{33}u^3\partial_{u^3} = \\ -I - I_{23} + (\alpha_{33}+2)u^3\partial_{u^3}, \quad Q_3 = m\partial_{u^2};\end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered}Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2} + \partial_{u^3} = \\ -I_{12} - u^2\partial_{u^2} + \partial_{u^3}, \quad Q_3 = m\partial_{u^2};\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + (u^3 - 2u^2)\partial_{u^2} - 2u^3\partial_{u^3} = \\ -I - I_{23} + u^3\partial_{u^2}, \quad Q_3 = m\partial_{u^2},\end{gathered} \tag{40}$$

що відповідають першим трьом пунктам таблиці 1 при $æ_1 = æ_2 = 1$ та $n = \alpha_{33} + 2$.

Діючи аналогічно, отримаємо ще один набір операторів, у який переходять оператори (32):

$$Q_1{=}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2{=}{-}u^1\partial_{u^1}{-}2u^2\partial_{u^2}{=}{-}I_{12}{-}u^2\partial_{u^2}, \quad Q_3{=}u^3\partial_{u^2}, \tag{41}$$

який відповідає четвертому пункту таблиці 1 при $æ_1 = æ_2 = 1$.

Отже, розглянувши алгебру Галілея (29), яку визначає зображення VII, та доповнивши її операторами масштабних і проективних перетворень, ми з точністю до перетворень еквівалентності (28) одержали 5 нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея, які відповідають першим п'яти пунктам таблиці 1 при $(æ_1, æ_2) = (1, 1)$.

Аналогічно можна отримати решту результатів таблиці 1.

Зазначимо, що при доповненні алгебри Галілея (20) до узагальненої алгебри Галілея (24) комутаційні співвідношення (27) виконуються для зображень алгебри Галілея, які визначаються операторами Q_1 з пунктів II (при æ $= \theta = 0$), III (при æ $= 0$), V, VII (при æ $= 0$), VIII (при æ $\in \{0;1\}$). У решті випадків співвідношення (27) не виконуються.

Теорему 1 доведено.

6 Інваріантність системи (3) відносно узагальненої алгебри Галілея

Розв'яжемо задачу класифікації нелінійностей $F(U)$, при яких система (3) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (24) у випадку тривимірного векторного поля та однієї просторової змінної. Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Система (3) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (24) тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:*

$$\begin{aligned}
&w_0^1+w^1w_1^1=w_{11}^1+\lambda_{12}w_1^2+\lambda_{13}(w^3)^{2l-1}w_1^3+G^1,\\
&w_0^2+w^1w_1^2=w_{11}^2-2w^2w_1^1+\lambda_{22}(w^3)^lw_1^2+\lambda_{23}(w^3)^{3l-1}w_1^3+G^2,\\
&w_0^3+w^1w_1^3=w_{11}^3-\frac{w^3}{l}w_1^1+\lambda_{32}(w^3)^{1-l}w_1^2+\lambda_{33}(w^3)^lw_1^3+G^3,
\end{aligned} \tag{42}$$

причому

$$Q_1=\partial_{w^1},\quad Q_2=-w^1\partial_{w^1}-2w^2\partial_{w^2}-\frac{1}{l}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3=\partial_{w^2},$$

λ_{ij} — довільні сталі, $l\neq 0$ — стала, значення якої, а також функцій w^a, G^a подані у таблиці 2;
або

$$\begin{aligned}
&w_0^1+w^1w_1^1=w_{11}^1+\psi(w^3)w_1^2+G^1,\\
&w_0^2+w^1w_1^2=w_{11}^2-2w^2w_1^1+G^2,\\
&w_0^3+w^1w_1^3=w_{11}^3+G^3,
\end{aligned} \tag{43}$$

причому $Q_1=\partial_{w^1}$, $Q_2=-w^1\partial_{w^1}-2w^2\partial_{w^2}$, $Q_3=\partial_{w^2}$, $\psi(w^3)$ — довільна функція, значення w^a, G^a подані у таблиці 3;
або

$$\begin{aligned}
&w_0^1+w^1w_1^1=w_{11}^1+(w^2)^{2l-1}\psi^{12}w_1^2+(w^2)^{2l}\psi^{13}w_1^3+G^1,\\
&w_0^2+w^1w_1^2=w_{11}^2-\frac{w^2}{l}w_1^1+(w^2)^l\psi^{22}w_1^2+(w^2)^{l+1}\psi^{23}w_1^3+G^2,\\
&w_0^3+w^1w_1^3=w_{11}^3+(w^2)^{l-1}\psi^{32}w_1^2+(w^2)^l\psi^{33}w_1^3+G^3,
\end{aligned} \tag{44}$$

причому $Q_1 = \partial_{w^1}$, $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - \dfrac{1}{l}w^2\partial_{w^2}$, $Q_3 = 0$, $\psi^{ab}(w^3)$ *— довільні функції,* $a, b = \overline{1,3}$, $l \neq 0$ *— стала, значення якої, а також функцій* w^a, G^a *подані в таблиці 4.*

Таблиця 2: Набір значень l, w^a, G^a *для системи* (42).

№	l	w^a	G^a
1.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \dfrac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 0$
2.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \dfrac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = e^{u^3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = -\dfrac{(w^3_1)^2}{w^3}$
3.	$\dfrac{l}{2}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \dfrac{(u^1)^2}{2} + u^3 \ln\sqrt{u^3}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2 - \dfrac{(w^3_1)^2}{2w^3}$ $G^3 = 0$
4.	l	$w^1 = \dfrac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \dfrac{u^3}{u^1} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \dfrac{2w^1_1 w^3_1}{w^3} - \dfrac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \dfrac{2w^2_1 w^3_1}{w^3}$ $G^3 = 0$
5.	$\dfrac{1}{3}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \dfrac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3 - u^1u^2 + \dfrac{(u^1)^3}{3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 2w^1_1 w^2_1 - 2w^2 w^2_1$

Таблиця 2: Набір значень l, w^a, G^a для системи (42).

№	l	w^a	G^a
6.	$-\frac{1}{2}$	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$ $w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2-\frac{1}{2u^1}\ln u^1$ $w^3=u^1$	$G^1=\frac{2w^1_1w^3_1}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2=(w^1_1)^2+\frac{2w^2_1w^3_1}{w^3}-\frac{(w^3_1)^2}{2(w^3)^3}$ $G^3=0$

Таблиця 3: Набір значень w^a, G^a для системи (43).

№	w^a	G^a
1.	$w^1=u^1$ $w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3=u^3$	$G^1=0$ $G^2=(w^1_1)^2$ $G^3=0$
2.	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$ $w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2$ $w^3=u^1$	$G^1=\frac{2w^1_1w^3_1}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2=(w^1_1)^2+\frac{2w^2_1w^3_1}{w^3}$ $G^3=0$

Таблиця 4: Набір значень l, w^a, G^a для системи (44).

№	l	w^a	G^a
1	*2*	*3*	*4*
1.	1	$w^1=u^1$ $w^2=e^{-u^2}$ $w^3=u^3e^{-nu^2}$	$G^1=0$ $G^2=-\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^3=-\frac{2nw^2_1w^3_1}{w^2}+\frac{n^2w^3(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$
2.	1	$w^1=u^1+u^3\ln u^3$ $w^2=u^3$ $w^3=u^2+\ln u^3$	$G^1=-\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^2=0$ $G^3=\frac{(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$

1	*2*	*3*	*4*
3.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-u^2}$ $w^3 = u^3 - \frac{(u^2)^2}{2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = -\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^3 = \frac{(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$
4.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$ $w^3 = u^3(u^2)^n$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{n(n+1)w^3(w^2_1)^2}{(w^2)^2} - \frac{2nw^2_1w^3_1}{w^2}$
5.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = u^2(u^3)^n$	$G^1 = -\frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{n(n+1)w^3(w^2_1)^2}{(w^2)^2} - \frac{2nw^2_1w^3_1}{w^2}$
6.	l	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2$ $w^3 = \frac{u^3}{u^2} + l \ln u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{2w^2_1w^3_1}{w^2} - \frac{l(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$
7.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3 = u^2$	$G^1 = 0$ $G^2 = \frac{2w^2_1w^3_1}{w^3} - \frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^3 = 0$
8.	1	$w^1 = u^1 + u^2 \ln u^2 + u^3 \ln u^3$ $w^2 = u^3$ $w^3 = \frac{u^2}{u^3}$	$G^1 = -\frac{w^3(w^2_1)^2}{w^2} - \frac{w^2(w^3_1)^2}{w^3} -$ $-\frac{(w^2_1)^2}{w^2} - 2w^2_1w^3_1,\ G^2 = 0$ $G^3 = \frac{2w^2_1w^3_1}{w^2}$
9.	1	$w^1 = u^1 + u^3 \ln u^2 + \frac{1}{2}u^2 \ln^2 u^2$ $w^2 = u^2$ $w^3 = \frac{u^3}{u^2} + \ln u^2$	$G^1 = -\frac{w^3(w^2_1)^2}{w^2} - 2w^2_1w^3_1 + \frac{(w^2_1)^2}{w^2}$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{2w^2_1w^3_1}{w^2} - \frac{(w^2_1)^2}{(w^2)^2}$

1	*2*	*3*	*4*
10.	1	$w^1 = u^1$ $w^2 = e^{-\frac{1}{m}\arctan\frac{u^3}{u^2}}$ $w^3 = \ln\Big(\big(u^2\big)^2 + \big(u^3\big)^2\Big) -$ $-\dfrac{2n}{m}\arctan\dfrac{u^3}{u^2}$	$G^1 = 0$ $G^2 = w_1^2 w_1^3 - (2n+1)\dfrac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3 = \dfrac{(w_1^3)^2}{2} - 2(m^2+n^2)\dfrac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$

У таблиці 4 $m \neq 0$, n — довільні сталі.

Доведення. Знайдемо функції $F^{ab}(U)$, при яких система (3) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (24). Для цього використаємо класифікацію зображень узагальненої алгебри Галілея, описану в таблиці 1. Для знаходження функцій $F^{ab}(U)$ необхідно підставити відповідні ξ^μ, η^a ($\mu = 0, 1$, $a = \overline{1,3}$), одержані із зображень операторів алгебри (24) (тобто з таблиці 1), у систему визначальних рівнянь (14) – (17), одержану в лемі 2, та розв'язати її для кожного пункту таблиці 1.

Проілюструємо доведення теореми на прикладі операторів з першого пункту таблиці 1 при $(æ_1, æ_2) = (1, 1)$. Зображення операторів Q_i, записаних у цьому пункті, визначає базисні оператори узагальненої алгебри Галілея:

$$
\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2},\\
&D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - I - I_{23} + nu^3\partial_{u^3},\\
&\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(I + I_{23} - nu^3\partial_{u^3}) + m\partial_{u^2},
\end{aligned}
$$

де $n, m \in \mathbb{R}$ — довільні сталі, та координати оператора X:

$$
\begin{aligned}
\xi^0 &= ax_0^2 + 2æx_0 + d_0,\\
\xi^1 &= ax_0x_1 + æx_1 + gx_0 + d_1,\\
\eta^1 &= a(x_1 - x_0u^1) - æu^1 + g,\\
\eta^2 &= a(x_1u^1 - 2x_0u^2 + m) - 2æu^2 + gu^1,\\
\eta^3 &= (n-2)(ax_0 + æ)u^3,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

де a, æ, g, d_μ — довільні сталі, $\mu = 0, 1$.

Підставивши (45) у систему (14) – (17) бачимо, що рівняння (14), (15) виконуються тотожньо. Рівняння (16) та (17) після розщеплення за змінними x_0, x_1 зводяться до наступної системи для знаходження функцій $F(U)$ та уточнення координат інфінітезимального оператора:

$$(\delta_{c1}+\delta_{c2})\,F^{ab}_{u^c}-\delta_{a2}F^{1b}+\delta_{b1}F^{a2}+\delta_{ab}=0, \tag{46}$$

$$\begin{aligned}&\left(-\delta_{c1}u^1-2\delta_{c2}u^2+\delta_{c3}(n-2)u^3\right)F^{ab}_{u^c}+\delta_{a1}F^{1b}+2\delta_{a2}F^{2b}-\\&-\delta_{a3}(n-2)F^{3b}-\delta_{b1}F^{a1}-2\delta_{b2}F^{a2}+\delta_{b3}(n-2)F^{a3}+F^{ab}=0,\end{aligned} \tag{47}$$

$$mF^{ab}_{u^2}+2\delta_{a2}\delta_{b1}=0, \tag{48}$$

$$\left(\delta_{b1}+\delta_{b2}u^1\right)F^{ab}+\delta_{a1}u^1+2\delta_{a2}u^2-(n-2)\delta_{a3}u^3=0. \tag{49}$$

Розв'язавши систему (46) – (49) при $n\neq 2$, отримуємо вигляд функцій:

$$\begin{aligned}
&F^{11}=-(\lambda_{12}+1)u^1;\\
&F^{12}=\lambda_{12};\\
&F^{13}=\lambda_{13}\left(u^3\right)^{-\frac{2}{n-2}-1};\\
&F^{21}=(1-\lambda_{12})\left(u^1\right)^2-2u^2-\lambda_{22}u^1\left(u^3\right)^{-\frac{1}{n-2}};\\
&F^{22}=\lambda_{22}\left(u^3\right)^{-\frac{1}{n-2}}+(\lambda_{12}-1)u^1;\\
&F^{23}=\lambda_{23}\left(u^3\right)^{-\frac{3}{n-2}-1}+\lambda_{13}u^1\left(u^3\right)^{-\frac{2}{n-2}-1};\\
&F^{31}=(n-2)u^3-\lambda_{32}u^1\left(u^3\right)^{\frac{1}{n-2}+1};\\
&F^{32}=\lambda_{32}\left(u^3\right)^{\frac{1}{n-2}+1};\\
&F^{33}=\lambda_{33}\left(u^3\right)^{-\frac{1}{n-2}}-u^1.
\end{aligned}$$

Перепозначення константи $1/(2-n)=l$ та заміна

$$w^1=u^1,\quad w^2=u^2-\frac{\left(u^1\right)^2}{2},\quad w^3=u^3 \tag{50}$$

приводить нас до системи (42), де l, w^a, G^a описані у першому пункті таблиці 2.

Якщо $n=2$, то систему (46) – (49) задовольняє стала $m=1$ та наступна функціональна матриця

$$F=\begin{pmatrix}-(\psi+1)u^1 & \psi & 0\\ -2u^2+(1-\psi)\left(u^1\right)^2 & (\psi-1)u^1 & 0\\ 0 & 0 & -u^1\end{pmatrix},$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція. Здійснивши заміну змінних (50), отримуємо систему (43), де w^a, G^a описані у першому пункті таблиці 3.

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для всіх зображень алгебри (24), описаних у таблиці 1, та підібравши відповідні заміни, які наведені в таблицях 2, 3, 4, приходимо до систем (42), (43), (44).

Теорему 2 доведено.

7 Висновки

Проведено класифікацію лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля. Для $U \in \mathbb{R}^2$ подібна задача розв'язана в [9]. Порівнюючи результати, відзначимо значне збільшення кількості зображень зі збільшенням розмірності векторного поля. З класу систем (3) виділено ті, що інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, та знайдено заміни, що значно спрощують вигляд цих систем. Оскільки дані системи володіють широкими симетріями, то вони претендують на опис реальних фізичних процесів. Крім того, порівнявши отримані результати з результатами [7], [8], приходимо до висновку, що кількість систем класу (3), інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея, значно збільшується при збільшенні різниці між розмірністю векторного поля U та кількістю просторових змінних.

[1] *Ames W.F.* Nonlinear partial differential equations in enginering. – New York: Academic Press, 1972.

[2] *Aris R.* The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, I, II. — Oxford: Clarendon Press., 1975.

[3] *Murray J.D.* Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 767 p.

[4] *Katkov V.L.* The group classification of solutions of the Hopf equations // Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz. – 1965. – V. **6**. – P. 105-106.

[5] *Cherniha R.M., Serov M.I.* Nonlinear systems of the Byrgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions // J. Math. Anal. – 2003. – V. **282**. – P. 305-328.

[6] *Cherniha R.M., Serov M.I.* Nonlinear Diffusion-Convection Systems: Lie and Q-conditional Symmetries // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – V. 43. – P. 102-110.

[7] *Глеба А.В.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис... канд. ф.- м. наук: 01.01.03. – К., 2003. – 120 с.

[8] *Жадан Т.О.* Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2004. – Вип. 12. – С. 70-75.

[9] *Серов М.І., Жадан Т.О., Блажко Л.М.* Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 8. – С. 1128-1145.

[10] *Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР. – 1989. – Т. 34. – С. 3-83.

[11] *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу //Праці інституту математики НАН України. Математика та її застосування. – К.: 2002. – Т. **45**. – 359 с.

[12] *Lie S.* Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. – Leipzig, 1881. – P. 328-368.

[13] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[14] *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. – Berlin: Springer, 1986.

[15] *Fushchych W., Shtelen W., Serov M.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 436 p.

THE INVARIANCE OF A SYSTEM OF CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS WITH RESPECT TO A GENERALIZED GALILEAN ALGEBRA IN CASE OF A THREE-DIMENSIONAL VECTOR FIELD

Mikola SEROV, Tamara KARPALYUK

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
24 Pershotravneviy Av., Poltava 36011

Classification of linear representations for generalized Galilean algebra is given and convection-diffusion equations being invariant with respect to generalized Galilean algebra are obtained in the case of three-dimensional vector field and unique space variable.