АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ (ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК)

©2010 р. Юлія САМОЙЛЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ 01601
e-mail: yusam@univ.kiev.ua

Редакція отримала статтю 15 листопада 2010 р.

Розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, що залежать від обох незалежних змінних, для якого побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки.

1 Вступ

При математичному моделюванні хвильових процесів в рідині змінної глибини з малою дисперсією виникають нелінійні рівняння з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній [1, 2]. Зокрема, останнім часом значна увага приділяється питанням побудови асимптотичних одно- та двофазових солітоноподібних розв'язків сингулярно збурених рівнянь з частинними похідними [1]. Відомо, що знайти розв'язок таких рівнянь в явному вигляді, як правило, неможливо. Тому для дослідження подібних задач застосовують асимптотичні методи, які дозволяють отримати їх наближений розв'язок з наперед заданою точністю.

УДК 517.9, MSC 2000: 35Q53, 35C20

В даній статті вивчається задача про побудову асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad N_0 \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

де функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ зображаються асимптотичними рядами вигляду:

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k, \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k,$$

$a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0;T])$, $k \geq 0$; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Надалі припускається виконання умов $a_0(x,t) \neq 0$, $b_0(x,t) \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$, $t \in [0;T]$.

2 Основні позначення і припущення

Ідея побудови асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків пов'язана з існуванням солітонних розв'язків для рівнянь типу Кортевега-де Фріза (у випадку сталих коефіцієнтів). Так, зокрема, для класичного рівняння Кортевега-де Фріза вигляду [3]

$$u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \tag{2}$$

добре відомий його точний розв'язок

$$u(x,t) = u_0 + A\ \mathrm{ch}^{-2}(\beta(x - \varphi(t))), \tag{3}$$

де $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$, $A = a^2/2$, $\beta = a/2$, $a > 0$, u_0 – деякі сталі.

Зауважимо, що функція (3) описує рух відокремленої хвилі і при $u_0 = 0$ належить класу так званих швидкоспадних (при $x \to \pm\infty$) функцій. При наявності в рівнянні (1) малого параметра ε при старшій похідній його розв'язок матиме вигляд аналогічний (3) і може бути записаний за допомогою деякої функції від змінної $\tau = (x - ct)/\varepsilon$, щодо якої цей розв'язок при $u_0 = 0$ також є швидкоспадною функцією. Тому природно, при наявності змінних коефіцієнтів в рівнянні Кортевега-де Фріза, тобто рівнянні вигляду (1), шукати його розв'язок у вигляді функції, яка в частинному випадку (у випадку сталих коефіцієнтів) співпадає з розв'язком вигляду (3).

З цією метою розглянемо такі функціональні простори [1]: позначимо $G = G(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, для яких рівномірно за змінними (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, α, виконуються умови:

1) має місце співвідношення

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^n \frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} f(x,t,\tau) = 0,$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau \to -\infty} \tau^n \frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m \partial t^q \partial \tau^\alpha} (f(x,t,\tau) - f^-(x,t)) = 0, \quad (x,t) \in K;$$

$G_0 = G_0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}) \subset G$ – підпростір таких функцій $f(x,t,\tau)$, для яких рівномірно щодо (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ справджується рівність

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t) \in K.$$

В подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^N\right)$ при $\varepsilon \to 0$ означає, що існують такі величина $\varepsilon_0 > 0$ і стала $C > 0$, що залежить від числа N і від компакта $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ і $(x,t) \in K$.

Означення 1. *Функція $u = u(x,t,\varepsilon)$ називається [1] однофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N > 0$ функція $u(x,t,\varepsilon)$ може бути зображена за допомогою розкладу за малим параметром ε вигляду:*

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

де $\varphi(t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0;T])$ – деяка скалярна дійсна функція; функції $u_j(x,t)$, $j = \overline{0,N}$, – нескінченно диференційовні (в точках $t = 0$, $t = T$ розглядаються відповідно ліва та права похідні); $V_0(x,t,\tau) \in G_0$; $V_j(x,t,\tau) \in G$, $j = \overline{1,N}$.

Величина $x - \varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x,t,\varepsilon)$.

В статтях [4–7] побудовано асимптотичний однофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (1) для випадку, коли коефіцієнти рівняння залежать лише від просторової змінної, в [8–11] запропоновано алгоритм побудови асимптотичного солітоноподібного розв'язку задачі Коші для рівняння (1). Крім того, у згаданих працях показано, що вигляд асимптотичного розв'язку рівняння (1) залежить від степеня малого параметра при старшій похідній.

3 Алгоритм побудови асимптотичного розв'язку

Асимптотичний розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді (4). Відповідно до загальної методології побудови асимптотичних розв'язків, розклад (4) підставляється в рівняння (1) та отримане співвідношення домножається на ε. Маємо:

$$\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3}\right)+3\varepsilon\frac{\partial^3 V_N}{\partial x\partial\tau^2}+3\varepsilon^2\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2\partial\tau}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau^3}-$$
$$-a(x,t,\varepsilon)\left(\varepsilon\frac{\partial U_N}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial V_N}{\partial t}-\varphi'(t)\frac{\partial V_N}{\partial\tau}\right)-b(x,t,\varepsilon)(U_N+V_N)\times$$
$$\times\left(\varepsilon\frac{\partial U_N}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial V_N}{\partial x}+\frac{\partial V_N}{\partial\tau}\right)=O\left(\varepsilon^{N+2}\right),\quad \varepsilon\to 0. \tag{5}$$

Тут

$$U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$$

– регулярна частина асимптотики (4), а

$$V_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(x,t,\tau),\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},$$

– сингулярна частина асимптотики (4).

3.1 Рівняння для визначення регулярної частини асимптотики та існування їх розв'язків

Регулярна частина асимптотики (4) визначається зі системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$a_0(x,t)\,\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x,t)\,u_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{6}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x,t)\, u_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\, u_j = f_j(x,t), \qquad (7)$$

де $j = \overline{1,N}$, функції $f_j(x,t) = f_j(x,t,u_0(x,t),u_1(x,t),\ldots,u_{j-1}(x,t))$ обчислюються рекурентним чином.

Рівняння (6) є квазілінійним, розв'язок якого, як відомо, можна записати в неявному вигляді. Надалі вважається, що виконується умова

$$|a_0(x,t)| + |b_0(x,t)|\,|u_0(x,t)| \neq 0, \quad (x,t,u_0) \in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}. \qquad (8)$$

Для отримання розв'язку рівняння (6) застосуємо метод характеристик і розглянемо для нього систему характеристик:

$$\frac{dt}{a_0(x,t)} = \frac{dx}{u_0(x,t)b_0(x,t)} = \frac{du_0}{0}. \qquad (9)$$

З (9) знаходимо, що один з перших інтегралів рівняння (6) має вигляд $u_0 = c_1$, де c_1 – довільна дійсна стала, а інший перший інтеграл визначається зі звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = c_1\,\frac{b_0(x,t)}{a_0(x,t)}. \qquad (10)$$

Рівняння (10) є нелінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку. При досить загальних умовах це рівняння в деякому околі довільної точки $(x_0,t_0) \in \mathbf{R}\times[0;T]$ має розв'язок $x = \varphi(t,c_1,c_2)$, $t \in (t_0-\delta; t_0+\delta)$, що задовольняє початкову умову $x_0 = \varphi(t_0,c_1,c_2)$.

Розглядаючи рівність $x = \varphi(t,c_1,c_2)$, $t \in (t_0-\delta;t_0+\delta)$, як рівняння стосовно c_2, з неї визначаємо функцію $c_2 = \psi(x,t,c_1)$, $(x,t,u_0) \in \mathbf{R}\times(t_0-\delta;t_0+\delta)\times\mathbf{R}$.

Тоді загальний розв'язок $u_0 = u_0(x,t)$ рівняння (6) записується у неявному вигляді таким чином: $\Phi(u_0,\psi(t,x,u_0)) = 0$. Тут $\Phi(\xi,\eta) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ – така довільна функція, що її повна похідна за змінною u_0: $d\Phi(u_0,\psi(t,x,u_0))/(du_0) \neq 0$ для всіх $(x,t,u_0) \in G$, де G – область значень змінних (x,t,u_0) відображення $G \ni (x,t,u_0) \to (u_0,\psi(t,x,u_0))$ за умови, що існує хоча б одна така точка $(\xi,\eta) \in \Xi$, що $\Phi(\xi,\eta) = 0$.

Для випадку, коли функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ допускають факторизацію за змінними x,t, має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується умова (8) і мають місце зображення*

$$a_0(x,t) = a_{01}(x)a_{02}(t) \neq 0,\ \ b_0(x,t) = b_{01}(x)b_{02}(t) \neq 0,\ \ x \in \mathbf{R},\ t \in [0;T].$$

Тоді загальний розв'язок $u_0 = u_0(x,t)$ рівняння (6) можна записати у неявному вигляді таким чином:

$$\Phi\left(u_0, \eta(x) - u_0\xi(t)\right) = 0,$$

де

$$\xi(t) = \int\limits_0^t \frac{b_{02}(t)}{a_{02}(t)}\,dt, \quad \eta(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{a_{01}(x)}{b_{01}(x)}\,dx. \tag{11}$$

Тут $\Phi(\xi,\eta) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ – така довільна функція, що повна похідна за змінною u_0 функції в лівій частині рівності (11) не дорівнює нулеві для всіх $(x,t,u_0) \in G$, де G – область значень змінних (x,t,u_0) відображення $G \ni (x,t,u_0) \to (u_0(x,t), \eta(x) - u_0(x,t)\,\xi(t))$ за умови, що існує хоча б одна така точка $(\xi,\eta) \in \Xi$, що $\Phi(\xi,\eta) = 0$.

Доведення теореми випливає з рівняння характеристик (9) та властивостей рівняння першого порядку з частинними похідними [12].

Зауваження 1. Рівняння (6) має широкий клас нескінченно диференційовних розв'язків. Зокрема, якщо $\Phi(\xi,\eta) = \xi + \eta$ і мають місце умови теореми 1, то з рівності (11) знаходимо явний розв'язок рівняння (6) у вигляді

$$u_0(x,t) = \frac{\eta(x)}{\xi(t)+1}. \tag{12}$$

Функція (12), очевидно, визначена для всіх $t \in [0;T]$, $x \in \mathbf{R}$ та є нескінченно диференційовною, якщо виконується умова $\xi(t) + 1 \neq 0$.

Розглянемо тепер рівняння (7). Нехай для всіх $x \in \mathbf{R}$, $t \in [0;T]$, $u_j \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1,N}$, виконується умова

$$|a_0(x,t)| + |b_0(x,t)\,u_0(x,t)| + \left|f_j(x,t) - b_0(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}\,u_j\right| \neq 0. \tag{13}$$

Аналогічно викладеному вище, розглянемо рівняння характеристик для лінійного диференціального рівняння (7). Маємо:

$$\frac{dt}{a_0(x,t)} = \frac{dx}{u_0(x,t)b_0(x,t)} = \frac{du_j}{f_j(x,t) - b_0(x,t)\,\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\,u_j},$$

звідки при кожному $j = \overline{1, N}$ знаходимо систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення перших інтегралів системи рівнянь (7):

$$\frac{dx}{dt} = u_0(x,t)\,\frac{b_0(x,t)}{a_0(x,t)}, \tag{14}$$

$$\frac{du_j}{dx} = -\frac{1}{u_0(x,t)}\,\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\;u_j + \frac{f_j(x,t)}{u_0(x,t)b_0(x,t)}. \tag{15}$$

Рівняння (14) є нелінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку. При досить загальних умовах це рівняння в деякому околі довільної точки $(x_0, t_0) \in \mathbf{R} \times [0;T]$ має розв'язок $x = \varphi_1(t, c_1)$, $t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta)$, що задовольняє початкову умову $x_0 = \varphi_1(t_0, c_1)$. Розглядаючи рівність $x = \varphi_1(t, c_1)$, $\quad t \in (t_0 - \delta; t_0 + \delta)$, як рівняння стосовно c_1, з неї отримаємо функцію $c_1 = \psi_1(x,t)$, $x \in \mathbf{R} \times (t_0 - \delta; t_0 + \delta)$. Зауважимо, що вивчення питання про існування функції $\psi_1(x,t)$ зводиться до дослідження деякого рівняння, що задає функцію неявним чином.

Рівняння (15) при кожному $j = \overline{1, N}$ є лінійним звичайним диференціальним рівнянням, яке легко інтегрується в квадратурах. Його розв'язок можна подати у такому вигляді

$$u_j(x,t) = \frac{1}{u_0(x,t)}\left(c_{2j}\;u_0(x_0,t) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f_j(\zeta,t)}{b_0(\zeta,t)}\,d\zeta\right), \quad j = \overline{1, N}, \tag{16}$$

де c_{2j}, $j = \overline{1, N}$, – довільні сталі.

Таким чином, при кожному $j = \overline{1, N}$ загальний розв'язок $u_j = u_j(x,t)$ рівняння (7) визначається неявним чином рівністю

$$\Phi_j\left(\psi_1(x,t), \frac{1}{u_0(x_0,t)}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f_j(\zeta,t)}{b_0(\zeta,t)}\,d\zeta - \frac{u_0(x,t)}{u_0(x_0,t)}\,u_j\right) = 0, \tag{17}$$

де при кожному $j = \overline{1, N}$ функція $\Phi_j(\xi, \eta) \in C^\infty(\Xi; \mathbf{R})$ є такою довільною функцією, що повна похідна за змінною u_j від функції в лівій частині рівності (17) не дорівнює нулеві для всіх $(x, t, u_j) \in G$, де G – область значень змінних (x, t, u_j) відображення

$$(x,t,u_j) \to \left(\psi_1(x,t), \frac{1}{u_0(x_0,t)}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f_j(\zeta,t)}{b_0(\zeta,t)}\,d\zeta - \frac{u_0(x,t)}{u_0(x_0,t)}\,u_j\right)$$

за умови, що існує хоча б одна точка $(\xi, \eta) \in \Xi$, для якої $\Phi(\xi, \eta) = 0$.

Для випадку, коли функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ допускають факторизацію за змінними x, t, має місце твердження.

Теорема 2. *Нехай функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ є нескінченно диференційовними на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$ і для всіх $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$ має місце співвідношення $a_0(x,t) = a_{01}(x)a_{02}(t) \neq 0$, $b_0(x,t) = b_{01}(x)b_{02}(t) \neq 0$, $u_0(x,t) = u_{01}(x)u_{02}(t) \neq 0$.*

Тоді при кожному $j = \overline{1,N}$ загальний розв'язок $u_j = u_j(x,t)$ рівняння (7) можна записати у неявному вигляді за допомогою співвідношення

$$\Phi_j(\phi(x,t), \psi(x,t,u_j)) = 0, \tag{18}$$

де

$$\phi(x,t) = \rho(t) - \varrho(x), \tag{19}$$

$$\rho(t) = \int\limits_0^t \frac{b_{02}(t)u_{02}(t)}{a_{02}(t)}\,dt, \quad \varrho(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{a_{01}(x)}{b_{01}(x)u_{01}(x)}\,dx,$$

$$\psi(x,t,u_j) = \frac{u_{01}(x)}{u_{01}(x_0)}\,u_j - \frac{\sigma(x,t)}{u_{01}(x_0)u_{02}(t)}, \tag{20}$$

$$\sigma(x,t) = \int\limits_{x_0}^x \frac{f_j(\xi,t)}{b_{01}(\xi)b_{02}(t)}\,d\xi\,.$$

При цьому при кожному $j = \overline{1,N}$ функція $\Phi_j(\xi,\eta) \in C^\infty(\Xi;\mathbf{R})$ є довільною функцією і задовольняє умову про те, що повна похідна за змінною u_j від функції в лівій частині рівності (18) не дорівнює нулеві для всіх $(x,t,u_j) \in G$, де G – область значень змінних (x,t,u_j) відображення $(x,t,u_j) \to (\phi(x,t), \psi(x,t,u_j))$ за умови, що існує хоча б одна точка $(\phi,\psi) \in \Xi$, для якої $\Phi_j(\phi,\psi) = 0$.

Зауваження 2. У випадку, коли функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ допускають факторизацію за змінними x, t, всі розв'язки $u_0 = u_0(x,t)$ рівняння (6), які допускають факторизацію, можна записати таким чином:

$$u_0(x,t) = \frac{c_1\eta(x) + c_2}{c_1\xi(t) + c_2}\,,$$

де функції $\eta(x)$, $\xi(t)$ даються формулами (11), c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Тому умову $u_0(x,t) = u_{01}(x)u_{02}(t) \neq 0$ теореми 2 можна записати через функції $a_{01}(x)$, $a_{02}(t)$, $b_{01}(x)$, $b_{02}(t)$ та сталі c_1, c_2.

Зауваження 3. Аналогічно зауваженню 1 зазначимо, що рівняння (7) має широкий клас розв'язків. Зокрема, якщо при кожному $j = \overline{1, N}$ функція $\Phi_j(\xi, \eta) = \xi + \eta$ і мають місце умови теореми 2, то з (18) знаходимо

$$u_j(x,t) = \frac{u_{01}(x_0)}{u_{01}(x)} \left(\varrho(x) - \rho(t) + \frac{\sigma(x,t)}{u_{01}(x_0) u_{02}(t)} \right).$$

При цьому розв'язок $u_j(x,t)$, $j = \overline{1, N}$, існує для довільних $x \in \mathbf{R}$ і всіх $t \in [0; T]$, і є нескінченно диференційовним.

4 Визначення сингулярної частини асимптотики

Сингулярна частина асимптотики визначається з системи рівнянь

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + a_0(x,t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x,t) \left[u_0(x,t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right] = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + a_0(x,t) \frac{\partial V_j}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x,t) \left[u_0(x,t) \frac{\partial V_j}{\partial \tau} + V_j \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau} \right] =$$

$$= \mathcal{F}_j(x,t,\tau), \quad j = \overline{1, N}, \tag{22}$$

де функції

$$\mathcal{F}_j(x,t,\tau) = F_j(t, V_0(x,t,\tau), \ldots, V_{j-1}(x,t,\tau), u_0(x,t), \ldots, u_j(x,t)),$$

$j = \overline{1, N}$, визначаються рекурентно.

Задача про розв'язність системи (21), (22) є більш складною, ніж задача про розв'язність системи (6), (7), оскільки система (21), (22) крім невідомих функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j = \overline{0, N}$, містить також невідому поки що функцію $\varphi(t)$, яка визначає лінію розриву. Тому спочатку, вважаючи функцію $\varphi(t)$ відомою, знайдемо сингулярну частину асимптотики на кривій розриву $x = \varphi(t)$, а потім спеціальним чином продовжимо отримані функції з кривої розриву $x = \varphi(t)$ в деякий її окіл.

При цьому будуть отримані певні необхідні і достатні умови існування в просторі $G = G(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ розв'язків деякої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, з якої виводиться звичайне диференціальне рівняння для функції $x = \varphi(t)$.

4.1 Визначення сингулярної частини асимптотики на кривій розриву і умова ортогональності

Розглянемо звуження функцій $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, на криву розриву $\Gamma=\{(x,t): x=\varphi(t)\}$ – функції $v_j(t,\tau)=V_j(\varphi(t),t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$. Ці функції визначаються з системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi(t),t)\,\varphi'(t)\,\frac{\partial v_0}{\partial\tau}-b_0(\varphi(t),t)\left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right]=0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi(t),t)\,\varphi'(t)\,\frac{\partial v_j}{\partial\tau}-b_0(\varphi(t),t)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}+\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\,v_j+v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\right]=$$
$$=\mathcal{F}_j(t,\tau),\quad j=\overline{1,N}, \quad (24)$$

де, як зазначалося вище, при кожному $j=\overline{1,N}$ вирази для функцій

$$\mathcal{F}_j(t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau),\ldots,V_{j-1}(x,t,\tau),u_0(x,t),\ldots,u_j(x,t))\Big|_{x=\varphi(t)}$$

визначаються рекурентно.

Рівняння (23) є квазілінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами третього порядку (величина t вважається параметром). В просторі G_0 це рівняння має єдиний розв'язок, який можна записати в явному вигляді:

$$v_0(t,\tau)=-3\,\frac{A(\varphi(t),\varphi'(t),t)}{b_0(\varphi(t),t)}\ \mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),\varphi'(t),t)}}{2}\,(\tau+C_0)\right),$$

де $C_0\in\mathbf{R}$ – стала інтегрування, за умови, що

$$A(\varphi(t),\varphi'(t),t)=-a_0(\varphi(t),t)\varphi'(t)+b_0(\varphi(t),t)u_0(\varphi(t),t)>0. \quad (25)$$

Рівняння (24) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами третього порядку (величина t як і у випадку рівняння (23) вважається параметром). Якщо $\mathcal{F}_j(t,\tau)\in G_0$, $j=\overline{1,N}$, то необхідною і достатньою умовою існування в просторі G розв'язку рівняння (24) (при кожному $j=\overline{1,N}$) є умова

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau=0,\quad j=\overline{1,N}, \quad (26)$$

яку прийнято називати умовою ортогональності [1].

Для доведення необхідної і достатньої умови (26) розв'язності рівнянь (24) досить при кожному $j = \overline{1, N}$ розв'язок рівняння (24) записати у вигляді

$$v_j(t, \tau) = \nu_j(t)\eta_j(t, \tau) + \psi_j(t, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \tag{27}$$

де

$$\nu_j(t) = [a_0(\varphi(t), t)\varphi'(t) - b_0(\varphi(t), t)u_{0x}(\varphi(t), t)]^{-1} \lim_{\tau \to -\infty} \Phi_j(t, \tau),$$

$$\Phi_j(t, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} \mathcal{F}_j(t, \xi) d\xi + E_j(t),$$

для сталої інтегрування $E_j(t)$ виконується умова

$$\lim_{\tau \to +\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0;$$

для $\eta_j(t, \tau) \in G$ виконується умова $\lim\limits_{\tau \to -\infty} \eta_j(t, \tau) = 1$, і показати, що у випадку виконання умови (26) функція $\psi_j(t, \tau) \in G_0$.

Тут, як і вище, t вважається параметром.

Дійсно, розглянемо допоміжне рівняння, яке отримане з (24) інтегруванням за τ (в межах від $-\infty$ до τ):

$$L_1 v_j = \Phi_j(t, \tau), \tag{28}$$

де

$$L_1 = \frac{d^2}{d\tau^2} + a_0(\varphi(t), t)\varphi'(t) - b_0(\varphi(t), t)u_0(\varphi(t), t) - b_0(\varphi(t), t)v_0(t, \tau)\,.$$

З (27), (28) випливає, що функція $\psi_j(t, \tau)$, $j = \overline{1, N}$, задовольняє рівняння

$$L_1 \psi_j = \Phi_j - \nu_j L_1 \eta. \tag{29}$$

Оскільки оператор $L_1 : G_0^* \to G_0^*$ – нетерів і $\operatorname{Ker} L_1^* = \{v_{0\tau}\}$, то маємо [13], що розв'язок рівняння (29) існує і належить простору G_0 тоді і лише тоді, коли виконується умова ортогональності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_j - \nu_j L_1 \eta)\, v_{0\tau} d\tau = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Остання умова виконується тоді і лише тоді, коли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau = 0, \quad j=\overline{1,N}.$$

З умови ортогональності (26) при $j = 1$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку для знаходження функції $\varphi = \varphi(t)$, яка визначає криву розриву Γ:

$$15\, a_0(\varphi,t)\, b_0(\varphi,t)\, \frac{d}{dt}\, A(\varphi,\varphi',t) + 16\, b_{0x}(\varphi,t)\, A^2(\varphi,\varphi',t) +$$
$$+10\, \left[\, a_{0x}(\varphi,t)\, b_0(\varphi,t) - 2\, a_0(\varphi,t)\, b_{0x}(\varphi,t)\, v\right]\, A(\varphi,\varphi',t)\, \varphi' +$$
$$+10\, b_0(\varphi,t)\, \left[\, b_0(\varphi,t)\, u_{0x}(\varphi,t) - b_{0x}(\varphi,t)\, u_0(\varphi,t)\, v\right]\, A(\varphi,\varphi',t) = 0. \qquad (30)$$

Рівняння (30) при досить загальних умовах має розв'язок. Надалі вважається, що функція $\varphi = \varphi(t)$ відома. Зауважимо, шо у випадку, коли $a_0^5(x,t) = c b_0^6(x,t)$ при деякій сталій c, рівняння (30) набуває вигляду

$$\varphi' = c(a_0(\varphi,t))^{1/3}.$$

4.2 Побудова сингулярної частини асимптотики в околі кривої розриву

Для продовження функцій $v_j(t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, з кривої Γ в деякий її 2μ–окіл – область $\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x,t) : |x-\varphi(t)| < 2\mu\}$ скористаємося зображенням (27).

Функція $v_j(t,\tau) = V_j(\varphi(t),t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ продовжується згідно формули

$$V_j(x,t,\tau) = w_j(x,t)\eta_j(t,\tau) + \psi_j(t,\tau), \quad j=\overline{1,N}, \qquad (31)$$

де $w_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, є розв'язком задачі Коші

$$\Lambda w_j(x,t) = f_j^-(x,t), \qquad (32)$$

$$w_j(x,t)\Big|_{\Gamma} = \nu_j(t), \quad j=\overline{1,N}, \qquad (33)$$

$$\Lambda = a_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x,t)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\,,$$

$f_1^-(x,t) = 0$; вирази для $f_j^-(x,t)$, $j = \overline{1,N}$, рекурентно визначаються через функції $f_k^-(x,t)$, $k = \overline{1,j-1}$.

Рівняння (32) отримано з асимптотичної рівності (5), після підстановки зображення (31) в (5) та спрямування $\tau \to -\infty$.

4.2.1 Існування розв'язку допоміжної задачі Коші

Розглянемо задачу Коші (32), (33). Нехай виконується умова

$$|a_0(x,t)| + |u_0(x,t)b_0(x,t)| +$$

$$+ \left| f_j^-(x,t) - b_0(x,t)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} w_j \right| \neq 0, \quad (x,t,w_j) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}. \quad (34)$$

Згідно умови $A(\varphi(t),t) > 0$ крива Γ трансверсальна характеристикам рівняння (32). Тому розв'язок задачі Коші (32), (33) існує [4, 5] в деякому околі кривої Γ.

Розглянемо задачу Коші (32), (33) у випадку, коли функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ допускають факторизацію за змінними x, t, тобто, коли виконуються умови теореми 2.

Для уточнення радіуса околу, в якому існує розв'язок задачі Коші (32), (33), застосуємо метод характеристик. Тоді при кожному $j = \overline{1,N}$ загальний розв'язок $w_j = w_j(x,t)$ рівняння (32) можна записати у неявному вигляді за допомогою співвідношення

$$\Phi_j(\phi(x,t), \psi(x,t,w_j)) = 0, \quad (35)$$

де функції $\phi(x,t)$, $\psi(x,t,w_j)$ мають вигляд (19), (20).

Для знаходження розв'язку задачі Коші (32), (33) потрібно при кожному $j = \overline{1,N}$ серед всіх функцій вигляду (35) знайти таку функцію $\Phi_j(\phi,\psi)$, яка б визначала розв'язок рівняння (32) і графік якого проходить через криву $w_j|_{x=\varphi(t)} = \nu_j(t)$, $j = \overline{1,N}$.

Розглянемо значення перших інтегралів (19), (20) системи рівнянь для характеристик (14), (15) при $x = \varphi(t)$. Маємо:

$$\phi(\varphi(t),t) = \rho(t) - \varrho(\varphi(t)) = c_1, \quad (36)$$

$$\psi(\varphi(t),t,w_j|_{x=\varphi(t)}) = \frac{u_{01}(\varphi(t))}{u_{01}(x_0)}\nu_j - \frac{\sigma(\varphi(t),t)}{u_{01}(x_0)u_{02}(t)} = c_2. \quad (37)$$

Вважаючи в (36), (37) c_1, c_2 змінними величинами, а t – параметром, при кожному $j = \overline{1,N}$ виключаємо з системи (36), (37) параметр t і приходимо до співвідношення $\Phi_j(c_1, c_2) = 0$, тим самим знаходячи потрібну функцію $\Phi_j(\phi, \psi)$, за допомогою якої записується у неявному вигляді розв'язок задачі Коші (32), (33). Зауважимо, що при кожному $j = \overline{1,N}$ функції $\Phi_j(\phi, \psi)$ є, взагалі кажучи, різними.

5 Основний результат

Основний результат статті можна сформулювати таким чином.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*

1. *функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ *та* $u_0(x,t)$ *є нескінченно диференційовними на множині* $\mathbf{R}\times[0;T]$ *і можуть бути записані у вигляді* $a_0(x,t) = a_{01}(x)a_{02}(t) \neq 0$, $b_0(x,t) = b_{01}(x)b_{02}(t) \neq 0$, $u_0(x,t) = u_{01}(x)u_{02}(t) \neq 0$*;*

2. *рівняння (30) має такий нескінченно диференційовний розв'язок* $\varphi = \varphi(t)$, $t \in [0;T]$, *що виконується умова (25);*

3. *задача Коші (32), (33) має нескінченно диференційовний розв'язок, визначений для всіх* $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$.

Тоді асимптотичний розв'язок рівняння (5) має зображення

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \tag{38}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right], & (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ u_0(x,t) + \sum\limits_{j=1}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + w_j^-(x,t)\right], & (x,t) \in D^-\backslash\Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t), & (x,t) \in D^+\backslash\Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

де

$$D^- = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] : \varphi(t) - x \geq \mu\},$$
$$D^+ = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] : x - \varphi(t) \leq \mu\}.$$

При цьому функція (38) задовольняє асимптотичну рівність (5) при $\tau \to -\infty$ *з точністю* $O(\varepsilon^{N+2})$.

Зауваження 4. Якщо розв'язок задачі Коші (32), (33) визначений лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, то функція

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(t,\tau)\right], \quad (x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$$

задовольняє асимптотичну рівність (5) при $\tau \to -\infty$ з точністю $O(\varepsilon^{N+1})$.

6 Висновки

Розглянуто алгоритм побудови асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза для випадку, коли коефіцієнти рівняння залежать як від просторової, так і від часової змінних. Детально проаналізовано випадок, коли головні члени асимптотичних розкладів для коефіцієнтів рівняння і регулярної частини асимптотичного розв'язку факторизуються за незалежними змінними.

[1] *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society. – 2001. – 243 p.

[2] *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), № 2. – С. 63 – 124.

[3] *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.

[4] *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, № 1. – С. 111 – 124.

[5] *Samoylenko YuI.* Asymptotical expansions for one-phase soliton type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – T. 3. – P. 1435 – 1441.

[6] *Самойленко В.Г, Самойленко Ю.І.* Побудова асимптотичних розв'язків для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією // Вестник Херсонского национ. техн. ун-та. Херсон. – 2007. – Т.2 (28). – С. 323 – 328.

[7] *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.И.* Солитоноподобные решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза // Proceedings V International Scientific Conference. – Aktobe, October 9 - 10, 2009. – P. 232 – 234.

[8] *Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2007. – Випуск 336–337. – С. 170–177.

[9] *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 122 – 132.

[10] *Samoilenko V.Hr., Samoylenko Yu.I.* Asymptotical expansions of solution to Cauchy problem for Korteweg-de Vries equation with varying coefficients and small parameter // CERMCS International conference of young scientists. Communications. – Chisinau: Moldova State University, 2006. – P. 186 – 192.

[11] *Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром парного степеня при старшій похідній // Науковий вісник Чернівецького унту: Збірник наукових праць. – Випуск 485. Математика. – Чернівці. – 2009. – С. 102 – 107.

[12] *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

[13] *Грушин В.В.* Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Матем. сборник. – 1971. – Вып. 84 (126), № 2. – С. 163 – 195.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS TO SINSULAR PERTURBED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS (GENERAL CASE)

Yuliya SAMOYLENKO

Kiev National Taras Shevchenko University
64 Volodymyrska Str., Kyiv, 01033
e–mail: yusam@univ.kiev.ua

Singular perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients depending on both independent variables are studied. Asymptotic one phase soliton type solutions to the equation are built.