НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕРІВНОСТІ $f(xy) \leq f(x)f(y)$ З ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ

©2010 р. Валерій САМОЙЛЕНКО, Тетяна ТИЩУК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ 01601

Редакція отримала статтю 25 жовтня 2010 р.

Розглянуто питання про неперервні розв'язки функціональної нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$, де $f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$.

Встановлено достатні умови існування неперервних розв'язків цієї задачі. Отримано необхідну умову того, що функція є розв'язком задачі, та достатню умову, при виконанні якої розв'язок є неперервним.

Отримано твердження про загальний вигляд неперервних розв'язків функціональної нерівності, зокрема, з декількома точками спряження.

Також проаналізовано випадок строгої нерівності та з'ясовано вигляд її неперервних розв'язків і знайдено достатні умови їх існування.

1 Вступ

Теорія функціональних рівнянь та нерівностей має важливе значення для розвитку сучасної математики, адже результати про існування та вигляд розв'язків різних функціональних рівнянь і нерівностей знаходять важливе застосування в різноманітних розділах математики [1 – 3], зокрема, в теорії стійкості [4 – 7], наприклад, при доведенні тверджень про існування і єдиність розв'язків та дослідженні їх стійкості.

УДК 517.9, MSC 2000: 26D20, 39B62

В даній статті розглядається питання про неперервні розв'язки функціональної нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$, де $f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$, що виникає при вивченні деяких задач теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією [6]. Доведено твердження про загальний вигляд неперервних розв'язків функціональної нерівності, зокрема, з декількома точками спряження. Встановлено достатні умови існування неперервних розв'язків цієї задачі, зокрема, тих, що містять декілька точок спряження та необхідну умову того, що функція є розв'язком задачі. Отримано достатню умову, при виконанні якої розв'язок є неперервним. Також проаналізовано випадок строгої нерівності та з'ясовано вигляд її неперервних розв'язків і достатні умови їх існування.

2 Достатні умови існування неперервних розв'язків нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$

Розглянемо задачу про опис неперервних функцій, що задовольняють функціональну нерівність

$$f(xy) \leq f(x)f(y), \quad x \in [0, +\infty), \tag{1}$$

і умови

$$f(0) = 0, \quad f(x) \geq 0. \tag{2}$$

При побудові розв'язків задачі (1), (2) використовується відомий факт [8] про те, що функціональне рівняння $f(xy) = f(x)f(y)$, де $x \in (0; +\infty)$, у класі неперервних функцій має єдиний розв'язок, а саме – степеневу функцію $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$.

Очевидно, що функції вигляду

$$f(x) = cx^\alpha, \quad \alpha > 0, \tag{3}$$

де c – додатна стала, є розв'язком задачі (1), (2), якщо виконується нерівність $c \geq 1$. Більш того, умова $f(1) \geq 1$ є необхідною умовою того, що функція $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2).

Справедливі наступні твердження.

Лема 1. *Якщо функція $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то $f(1) \geq 1$.*

Доведення леми 1 очевидне, якщо в (1) покласти $x = y = 1$.

Лема 2. *Якщо функція $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то не існує такої послідовності $\{x_n : \ x_n > 0, \ x_n \to +\infty, \ n \to +\infty\}$, що $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.*

Доведення. Доведемо методом від супротивного. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $x_{n+1} > x_n, \ n \in N$. Припустимо, що існує згадана вище послідовність, для якої $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c_*$, де, очевидно, що $c_* \geq 0$. Оскільки $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то маємо:

$$f(1) = f\left(x_n \cdot \frac{1}{x_n}\right) \leq f(x_n) f\left(\frac{1}{x_n}\right). \tag{4}$$

Звідси випливає, що $c_* \neq 0$, бо очевидно $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$ і у випадку $c_* = 0$ з (4) отримаємо протиріччя.

Тоді з (4) для досить великих значень x_n знаходимо

$$f\left(\frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{f(1)}{f(x_n)} \geq \frac{f(1)}{c_* + 1},$$

звідки при $n \to +\infty$ маємо протиріччя $0 \geq f(1)/(c_* + 1) > 0$.

Лему 2 доведено.

Наслідок 1. *Якщо функція $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то $f(x)$ не є обмеженою при $x \to +\infty$, тобто існує така послідовність $\{x_n : \ x_n > 0, \ x_n \to +\infty, \ n \to +\infty\}$, що $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.*

Наслідок 2. *Якщо функція $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то виконується умова $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

Лема 3. *Якщо функція $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2) і $f(1) = 1$, то $f(x)$ є неперервною в кожній точці $x \in [0; +\infty)$.*

Доведення. Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що x_* – точка розриву функції $f(x)$. Зрозуміло, що x_* для функції $f(x)$ є точкою розриву першого роду.

Розглянемо спочатку випадок, коли $f(x_* - 0) < f(x_* + 0)$. Нехай $\xi \in (0, x_*)$, позначимо $k = \frac{2\xi}{x_* - \xi}$. Тоді $(x_* - \xi) \in (0; x_*)$, $(x_* - \xi)(1 + k) \in$

$(x_*;+\infty)$. Оскільки $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то маємо:

$$f\left((x_*-\xi)\left(1+\frac{2\xi}{x_*-\xi}\right)\right)\le f(x_*-\xi)f\left(1+\frac{2\xi}{x_*-\xi}\right).$$

Спрямувавши в останній нерівності $\xi\to 0$ та враховуючи, що $f(1)=1$, отримаємо $f(x_*+0)\le f(x_*-0)$, що суперечить припущенню $f(x_*-0)< f(x_*+0)$.

Аналогічно розглядається випадок, коли $f(x_*-0)>f(x_*+0)$. При цьому для $\xi\in(0,x_*)$ число k обирається так: $k=-\frac{2\xi}{x_*+\xi}$. Тоді $(x_*+\xi)(1+k)\in(0;x_*)$, $(x_*+\xi)\in(x_*;+\infty)$. Оскільки $f(x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то маємо:

$$f\left((x_*+\xi)\left(1-\frac{2\xi}{x_*+\xi}\right)\right)\le f(x_*+\xi)f\left(1-\frac{2\xi}{x_*+\xi}\right).$$

Спрямувавши в останній нерівності $\xi\to 0$ та враховуючи, що $f(1)=1$, отримаємо $f(x_*-0)\le f(x_*+0)$, що суперечить припущенню $f(x_*-0)> f(x_*+0)$.

Лему 3 доведено.

3 Неперервні розв'язки задачі (1), (2) з однією точкою спряження

Побудуємо з функцій вигляду (3) неперервні розв'язки задачі (1), (2). Спочатку розглянемо побудову неперервного розв'язку, що містить одну точку спряження. Зазначимо, що під точкою спряження розуміється така точка півінтервалу $[0;+\infty)$, в якій розв'язок задачі (1), (2) є неперервним, але не є диференційовним.

В [9] встановлено справедливість двох наступних лем.

Лема 4. *Якщо α, γ, $b>0$, то функція вигляду*

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}, & 0\le x<b,\\ x^{\gamma}, & x\ge b\end{cases}$$

є розв'язком задачі (1), (2) тоді і лише тоді, коли виконується одна з умов:
1) $\alpha=\gamma$;
2) $b=1$, $\alpha<\gamma$.

Лема 5. *Нехай α, $\gamma > 0$. Якщо функція вигляду*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & 0 \le x < b, \\ b^{\alpha-\gamma}x^{\gamma}, & x \ge b \end{cases}$$

є розв'язком задачі (1), (2), то виконується одна з умов:
1) $\alpha = \gamma$, $b \in (0; +\infty)$;
2) $\alpha < \gamma$, $b \in (0; 1)$.

Розглянемо функцію вигляду

$$f(x) = \begin{cases} c_1 x^{\alpha}, & 0 \le x < b, \\ c_2 x^{\gamma}, & x \ge b, \end{cases} \tag{5}$$

де $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $c_1 \ge 1$, $c_2 \ge 1$, $b \in (0, +\infty)$, і з'ясуємо, при яких співвідношеннях між значеннями α та γ, c_1 та c_2 функція (5) є розв'язком задачі (1), (2).

Справедливі наступні леми.

Лема 6. *Якщо α, $\gamma > 0$, $1 \le c_1 \le c_2$, $b \in (0, 1]$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (1), (2).*

Доведення. З неперервності розв'язку в точці $x = b$ і умови $1 \le c_1 \le c_2$ випливає нерівність $\alpha \le \gamma$.

Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x \ne y$) відносно точки спряження b і покажемо, що функція вигляду (5) задовольняє нерівність (1), якщо $1 \le c_1 \le c_2$, $b \in (0; 1]$.

1. У випадку, коли $x, y \in [0; b)$, нерівність (1), очевидно, виконується для всіх α, $\gamma > 0$.

2. Нехай $x \in [0; b)$, $y \in [b; +\infty)$. Припустимо спочатку, що $xy \in [0; b)$. Тоді, підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо

$$c_1(xy)^{\alpha} = f(xy) \le f(x)f(y) = c_1 x^{\alpha} c_2 y^{\gamma},$$

звідки випливає співвідношення

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha-\gamma} \frac{1}{c_1} \le 1.$$

Враховуючи, що $y \in [b; +\infty)$, $c_1 \ge 1$, остання нерівність виконується лише у випадку, коли $\alpha \le \gamma$.

Припустимо тепер, що $xy \in [b; +\infty)$. Підставивши x та y у нерівність (1), отримаємо

$$c_2(xy)^\gamma = f(xy) \leq f(x)f(y) = c_1 x^\alpha c_2 y^\gamma,$$

звідки випливає співвідношення

$$c_1 x^{\alpha-\gamma} \geq 1.$$

Враховуючи, що $x \in [0; b)$, $c_1 \geq 1$, остання нерівність виконується лише у випадку, коли $\alpha \leq \gamma$.

3. Нехай $x, y \in [b; +\infty)$. У випадку $xy \in [0; b)$ з нерівності (1) отримаємо

$$c_1(xy)^\alpha = f(xy) \leq f(x)f(y) = c_2 x^\gamma c_2 y^\gamma,$$

звідки випливає співвідношення

$$\frac{1}{c_2}\left(\frac{xy}{b}\right)^{\alpha-\gamma} \leq 1.$$

Враховуючи, що $xy \in [0; b)$, $c_1 \geq 1$, остання нерівність виконується лише у випадку, коли $\alpha \leq \gamma$.

У випадку $xy \in [b; +\infty)$, нерівність (1) очевидно виконується для всіх $\alpha,\ \gamma > 0$.

4. Випадок, коли $y \in [0; b)$, $x \in [b; +\infty)$, є аналогічним випадку, коли $x \in [0; b)$, $y \in [b; +\infty)$, оскільки нерівність (1) має властивість симетричності стосовно незалежних змінних.

Лему 6 доведено.

Зауваження 1. *У випадку $b = 1$ з умови неперервності отримаємо, що $c_1 = c_2$. Тоді, поклавши $c := c_1 = c_2$, функцію (5) можна записати у вигляді*

$$f(x) = \begin{cases} cx^\alpha, & 0 \leq x < 1, \\ cx^\gamma, & x \geq 1. \end{cases}$$

Така функція є розв'язком задачі (1), (2) згідно леми 4 та властивостей неперервного розв'язку задачі (1), (2).

Наступна лема є в деякому сенсі оберненою до леми 6.

Лема 7. *Якщо α, $\gamma > 0$, $\alpha \le \gamma$, $1 \le c_1 \le c_2$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (1), (2).*

Доведення. З неперервності розв'язку в точці $x = b$ і умови $1 \le c_1 \le c_2$ випливає, що $b \in (0; 1]$.

Розглянемо можливі випадки розміщення двох точок x та y ($x \ne y$) відносно точки спряження b і покажемо, що функція вигляду (5) задовольняє нерівність (1), якщо $\alpha \le \gamma$, $1 \le c_1 \le c_2$.

1. Нехай $x, y \in [0; b)$. Тоді очевидно, що $xy \in [0; b)$. Отже, виконуються рівності

$$f(xy) = c_1(xy)^{\alpha},\ f(x)f(y) = c_1x^{\alpha}c_1y^{\alpha}.$$

Враховуючи, що $c_1 \ge 1$, з останніх рівностей випливає нерівність (1).

2. Нехай $x \in [0; b)$, $y \in [b, +\infty)$. Припустимо спочатку, що $xy \in [0; b)$. Тоді виконуються рівності

$$f(xy) = c_1(xy)^{\alpha},\ f(x)f(y) = c_1x^{\alpha}c_2y^{\gamma} = c_1^2(xy)^{\alpha}\left(\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha-\gamma}\right)^{-1}.$$

Враховуючи, що $\alpha \le \gamma, y \in [b, +\infty), c_1 \ge 1$, з останніх рівностей випливає нерівність (1).

Припустимо тепер, що $xy \in [b; +\infty)$. Тоді виконуються рівності

$$f(xy) = c_2(xy)^{\gamma},\ f(x)f(y) = c_1x^{\alpha}c_2y^{\gamma} = c_2^2(xy)^{\gamma}\left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha-\gamma}.$$

Враховуючи, що $\alpha \le \gamma$, $x \in [0; b)$, $c_2 \ge 1$, з останніх рівностей випливає нерівність (1).

3. Нехай $x, y \in [b; +\infty)$. Припустимо спочатку, що $xy \in [0; b)$. Тоді виконуються рівності

$$f(xy) = c_1(xy)^{\alpha},\ f(x)f(y) = c_2x^{\gamma}c_2y^{\gamma} =$$

$$= c_1^2(xy)^{\alpha}\left(\left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha-\gamma}\right)^{-1}\left(\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha-\gamma}\right)^{-1}.$$

За умов $\alpha \le \gamma$, $x, y \in [b, +\infty)$, $c_1 \ge 1$ з останніх рівностей випливає нерівність (1).

Припустимо тепер, що $xy \in [b; +\infty)$. Тоді виконуються рівності

$$f(xy) = c_2(xy)^{\gamma}\ f(x)f(y) = c_2^2x^{\gamma}y^{\gamma}.$$

Враховуючи, що $c_2 \geq 1$, з останніх рівностей випливає нерівність (1).

4. Випадок, коли $y \in [0; b)$, $x \in [b; +\infty)$, є аналогічним випадку, коли $x \in [0; b)$, $y \in [b; +\infty)$, оскільки нерівність (1) має властивість симетричності стосовно незалежних змінних.

Лему 7 доведено.

Наступні дві леми аналогічні лемам 6, 7 відповідно.

Лема 8. *Якщо α, $\gamma > 0$, $c_1 \geq c_2 \geq 1$, $b \in [1, +\infty)$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (1), (2), при цьому $\alpha \leq \gamma$.*

Доведення леми 8 є аналогічним доведенню леми 6.

Лема 9. *Якщо α, $\gamma > 0$, $\alpha \leq \gamma$, $c_1 \geq c_2 \geq 1$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (1), (2), при цьому $b \in [1, +\infty)$.*

Доведення леми 9 є аналогічним доведенню леми 7.

4 Неперервні розв'язки (1), (2) з декількома точками спряження

Узагальненням леми 6 є наступна лема.

Лема 10. *Якщо $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n \leq 1$, $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$, то функція вигляду*

$$f(x) = \begin{cases} c_1 x^{\alpha_1}, & 0 \leq x < b_1, \\ c_2 x^{\alpha_2}, & b_1 \leq x < b_2, \\ \ldots & \\ c_k x^{\alpha_k}, & b_{k-1} \leq x < b_k, \\ \ldots & \\ c_{n-1} x^{\alpha_n}, & b_{n-2} \leq x < b_{n-1}, \\ c_n x^{\alpha_n}, & x \geq b_{n-1}, \end{cases} \tag{6}$$

є розв'язком задачі (1), (2). При цьому

$$\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k \leq \ldots \leq \alpha_{n+2},\ k = \overline{2, n+1}.$$

Доведення леми 10 здійснюється методом математичної індукції, де базу індукції доведено в лемі 6.

Узагальненням леми 8 є наступна лема.

Лема 11. *Якщо $\alpha_i > 0$, $1 \le i \le n$, $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, $c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_n \ge 1$, то функція вигляду (6) є розв'язком задачі (1), (2). При цьому $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_k \le \ldots \le \alpha_{n+2}$, $k = \overline{2, n+1}$.*

Доведення леми 11 здійснюється методом математичної індукції, де базу індукції доведено в лемі 8.

Наступна лема є узагальненням леми 5.

Лема 12. *Нехай $\alpha_i > 0$, $b_i \in (0;1)$, $1 \le i \le n$. Функція вигляду*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha_1}, & 0 \le x < b_1, \\ b_1^{\alpha_1-\alpha_2} x^{\alpha_2}, & b_1 \le x < b_2, \\ b_1^{\alpha_1-\alpha_2} b_2^{\alpha_2-\alpha_3} x^{\alpha_3}, & b_2 \le x < b_3, \\ \ldots & \ldots \\ \prod_{i=1}^{k} b_i^{\alpha_i-\alpha_{i+1}} x^{\alpha_{i+1}}, & b_k \le x < b_{k+1}, \\ \ldots & \ldots \\ \prod_{i=1}^{n} b_i^{\alpha_i-\alpha_{i+1}} x^{\alpha_{n+1}}, & b_n \le x < 1, \\ \prod_{i=1}^{n} b_i^{\alpha_i-\alpha_{i+1}} x^{\alpha_{n+2}}, & x \ge 1, \end{cases}$$

є розв'язком задачі (1), (2), якщо

$$\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_k \le \ldots \le \alpha_{n+2}, \ k = \overline{2, n+1}.$$

Доведення леми 12 здійснюється методом математичної індукції, де базу індукції доведено в лемі 5.

5 Неперервні розв'язки строгої нерівності

Розглянемо задачу про опис неперервних функцій, які задовольняють нерівність

$$f(xy) < f(x)f(y), \ x \in [0, +\infty), \tag{7}$$

і умову (2).

Множина неперервних розв'язків задачі (7), (2) міститься в множині неперервних розв'язків задачі (1), (2), але з нею, звісно ж, не співпадає.

Аналогічно випадку нестрогої нерівності функція $f(x) = cx^{\alpha}$, $\alpha > 0$, є розв'язком задачі (7), (2), але лише за умови $c > 1$.

Необхідною умовою того, що функція $f(x)$ є розв'язком задачі (7), (2) є умова $f(1) > 1$. Зауважимо, що лема 2 і наслідки 1, 2 справедливі і для розв'язків задачі (7), (2).

Аналогічно випадку нестрогої нерівності можна отримати достатні умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти та показники степенів функції вигляду (5) для того, щоб вона була неперервним розв'язком задачі (7), (2) з однією точкою спряження.

Справедливі наступні леми.

Лема 13. *Якщо $\alpha, \gamma > 0$, $1 < c_1 < c_2$, $b \in (0, 1)$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (7), (2), при цьому $\alpha < \gamma$.*

Лема 13 доводиться аналогічно лемі 6.

Лема 14. *Якщо $0 < \alpha < \gamma$, $1 < c_1 < c_2$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (7), (2), при цьому $b \in (0; 1)$.*

Лема 14 доводиться аналогічно лемі 7.

Лема 15. *Якщо $\alpha, \gamma > 0$, $1 < c_2 < c_1$, $b \in (1, +\infty)$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (7), (2), при цьому $\alpha < \gamma$.*

Лема 15 доводиться аналогічно лемі 8.

Лема 15. *Якщо $0 < \alpha < \gamma$, $1 < c_2 < c_1$, то функція вигляду (5) є розв'язком задачі (7), (2), при цьому $b \in (1, +\infty)$.*

Лема 16 доводиться аналогічно лемі 9.

Також можна отримати достатні умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти та показники степенів функції вигляду (6) для того, щоб вона була неперервним розв'язком задачі (7), (2) з декількома точками спряження.

Лема 16. *Якщо $\alpha_i > 0$, $1 \le i \le n$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n < 1$, $1 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, то функція вигляду (6) є розв'язком задачі (7), (2). При цьому $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.*

Лема 17 доводиться аналогічно лемі 10.

Лема 16. *Якщо $\alpha_i > 0$, $1 \le i \le n$, $1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, $c_1 > c_2 > \ldots > c_n > 1$, то функція вигляду (6) є розв'язком задачі (7), (2). При цьому $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.*

Лема 16 доводиться аналогічно лемі 11.

6 Висновки

Отримано достатні умови існування неперервних розв'язків функціональної нерівності $f(xy) \le f(x)f(y)$, $x, y \in [0; +\infty)$, де $f(0) = 0$, $f(x) \ge 0$. Описано загальний вигляд таких розв'язків.

Розглянуто розв'язки, що містять декілька точок спряження. Встановлено достатні умови, при виконанні яких розв'язок є неперервним, та умови, при виконанні яких нерівність може мати неперервний розв'язок з декількома точками спряження. Досліджено також випадок строгої нерівності $f(xy) < f(x)f(y)$ та з'ясовано вигляд її неперервних розв'язків.

[1] *Aczél J.* Lectures on Functional Equations and their Applications, Mathematics in Science and Engineering. – New York-London: Academic Press. – 1966. – V. 19. – 533 p.

[2] *Kannappan Pl.* Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer Monographs in Mathematics. – 2009. – 817 p.

[3] *Kuczma M.* An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Second Edition, Birkhauser Verlag. – 2008. – 594 p.

[4] *Борисенко С.Д., Самойленко А.М., Матараццо Дж., Тоскано Р., Ясінський В.В.* Диференціальні моделі. Стійкість. – К.: Вища школа. – 2000. – 329 с.

[5] *Мартынюк А.А., Гутовски Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. - К.: Наукова думка. – 1979. – 256 с.

[6] *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа. – 1987. – 288 с.

[7] *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука. – 1976. – 312 с.

[8] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 800 с.

[9] *Тищук Т.В.* Неперервні розв'язки нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$ // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 6-8.

CONTINUOUS SOLUTIONS OF INEQUALITY $f(xy) \leq f(x)f(y)$ WITH POINTS OF COUPLING

Valeriy SAMOYLENKO, Tetyana TYSHCHUK

Kiev National Taras Shevchenko University
64 Volodymyrska Str., Kyiv 01033

The article deals with problem of continuous solutions of functional inequality $f(xy) \leq f(x)f(y)$, x, $y \in [0;+\infty)$, where $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$.

Sufficient condition of existence of continuous solutions of the problem, necessary condition when function is solution of the inequality and sufficient condition when solution of the inequality is continuous are studied.

The statements on general form of continuous solutions of functional inequality with several points of coupling are proved. Also, case of strong inequality is analyzed and general form of it's continuous solutions as well as sufficient condition of their existence are found.