СИНГУЛЯРНА КРАЙОВА ЗАДАЧА НА ПІВОСІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З РЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

©2010 р. Людмила ПРОЦАК

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Пирогова 9, Київ 01601
e-mail: protsak_l_v@ukr.net

Редакція отримала статтю 3 вересня 2010 р.

Для лінійного диференціального рівняння другого порядку з регулярною особливою точкою в нулі та властивістю експоненціальної дихотомії на нескінченності побудовано інтегральні представлення неперервно диференційовних на додатній півосі розв'язків, які зникають на нескінченності.

1 Постановка задачі

Розглянемо на півосі $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ лінійне диференціальне рівняння другого порядку з особливою точкою першого роду

$$x^2y'' + x\,(a_1 + xb_1(x))\,y' + \big(a_2 + a_3x + x^2b_2(x)\big)\,y = \alpha_1 + \alpha_2x + x^2f_0(x). \quad (1)$$

Тут a_k $(k = 1, 2, 3)$ та α_k $(k = 1, 2)$ — дійсні числа, $b_k(x)$ $(k = 1, 2)$ та $f_0(x)$ — неперервні обмежені на $\mathbb{R}_+$ функції.

Поставимо для такого рівняння сингулярну крайову задачу: *знайти розв'язок класу* $\mathrm{C}^2((0,\infty)\mapsto\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R})$*, який задовольняє крайові*

УДК 517.9; MSC 2000: 34C11, 34C12, 34D40; singular boundary value problem on the half-line; regular singular point; exponential dichotomy

умови

$$y(+0) = \lambda, \quad y(\infty) = 0, \tag{2}$$

де λ — або фіксоване дійсне число, або параметр, який також підлягає визначенню.

Задачі такого типу природно виникають при розв'язанні низки важливих питань математичної фізики. Детальніші роз'яснення з цього приводу та огляд відповідних літературних джерел можна знайти в [1–6]. Зокрема, в [6] аналогічна задача розглядалася для лінійної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають полюс першого порядку в точці $x = 0$ і залишаються обмеженими при $x \to \infty$. При стандартному переході від рівняння (1) до двовимірної системи, коефіцієнти останньої матимуть полюс другого порядку в точці 0. Якщо скористатися рецептом із [7], можна одержати лінійну систему з полюсом першого порядку. Однак до одержаної у такий спосіб системи не вдається застосувати результати з [6].

З метою подолання цієї проблеми уведемо дві нові шукані функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ за формулами

$$y = y_1, \quad y' = \frac{(x+1)y_2}{x}.$$

Тоді дістанемо систему вигляду

$$\mathbf{y}' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)\mathbf{y} + \frac{\mathbf{a}}{x} + \mathbf{f}(x), \tag{3}$$

де

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & 1 - a_1 \end{pmatrix},$$

$$B(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a_2 - a_3 - x b_2(x)}{x+1} & -\frac{1}{x+1} - b_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + x f_0(x)}{x+1} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що характеристичний поліном матриці A збігається з характеристичним поліномом рівняння Ейлера $x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$, а отже, власні числа матриці A є коренями так званого визначального рівняння для лінійного однорідного рівняння, асоційованого з (1) (див., наприклад, [8]).

Надалі вважатимемо, що система задовольняє ті самі умови, що й у [6], а саме:

A: матриця A не має власного числа, рівного 1, тобто $a_1 + a_2 \neq 0$;

B: система

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -b_2(x)y_1 - b_1(x)y_2, \tag{4}$$

еквівалентна рівнянню

$$y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0,$$

експоненціально дихотомічна на півосі $[x_0, \infty)$ [9, 10], де x_0 — деяке (довільне) додатне число (випадки експоненціальної стійкості та нестійкості системи не виключаються).

C: лінійна алгебрична система $A\mathbf{y} = \mathbf{a}$ сумісна, тобто якщо $a_2 = 0$, то й $\alpha_1 = 0$;

D: $f_0(x) \to 0$, коли $x \to \infty$.

Без обмеження загальності міркувань можемо покласти $x_0 = 1$.

2 Класифікація розв'язків лінійної однорідної системи

Відповідно до [6] для розв'язків лінійної однорідної системи

$$\mathbf{y}' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)\mathbf{y} \tag{5}$$

апріорі на площині можна виділити шість лінійних підпросторів $\mathbb{L}_i$ ($i = 1, \ldots, 6$), які характеризуються такими властивостями:

1) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_1$ тоді і лише тоді, коли

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c_0 \left(\frac{x}{s}\right)^{1+\alpha} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 0 < x \leq s \leq 1, \tag{6}$$

і

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leq c_* e^{-\gamma(x-s)} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 1 \leq s \leq x, \tag{7}$$

де c_0, c_*, α, γ — деякі додатні сталі;

2) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_2$ тоді і лише тоді, коли знайдеться вектор $\boldsymbol{\zeta} \in \ker A \setminus \{0\}$ такий, що

$$\mathbf{y}(x) = \big(E + x(E-A)^{-1}B(0)\big)\boldsymbol{\zeta} + o(x), \quad x \to +0, \tag{8}$$

і справджується нерівність (7);

3) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_3$ тоді і лише тоді, коли не існує правої похідної $\mathbf{y}'(+0)$ і справджуються нерівності

$$\|\mathbf{y}(x)\| \le c_0 \left(\frac{x}{s}\right)^{1-\alpha} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 0 < s \le x \le 1, \tag{9}$$

та (7);

4) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_4$ тоді і лише тоді, коли справджуються нерівності (6) та

$$\|\mathbf{y}(x)\| \le c_* e^{\gamma(x-s)} \|\mathbf{y}(s)\|, \quad 1 \le x \le s; \tag{10}$$

5) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_5$ тоді і лише тоді, коли розв'язок допускає представлення (8) і задовольняє нерівність (10);

6) $\mathbf{y}(1) \in \mathbb{L}_6$ тоді і лише тоді, коли не існує правої похідної $\mathbf{y}'(+0)$ і справджуються нерівності (9) та (10).

Очевидно, що одночасно нетривіальними можуть бути не більше ніж два з підпросторів $\mathbb{L}_i$, причому, якщо таких простори два, то вони одновимірні і площина є їх прямою сумою. Простори $\mathbb{L}_2$ та $\mathbb{L}_5$ можуть бути нетривіальними лише за умови, що $a_2 = 0$, а тоді $\alpha_1 = 0$. Якщо ж $a_2 \ne 0$, то $\ker A = \{0\}$ й існує єдиний вектор $\boldsymbol{\eta} = \left(\begin{smallmatrix} -\alpha_1/a_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{im} A^*$ такий, що $A\boldsymbol{\eta} + \mathbf{a} = 0$, а з рівності $a_2 = 0$ випливає $\boldsymbol{\eta} = 0$.

Розглянемо випадок, коли нетривіальними є простори $\mathbb{L}_i$ та $\mathbb{L}_j$ $(i \le j)$. Утворимо фундаментальну матрицю $Y(x; i, j)$, стовпцями якої є розв'язки $\mathbf{y}(x; i)$ та $\mathbf{y}(x; j)$, такі, що $\mathbf{y}(1; i) \in \mathbb{L}_i$ та $\mathbf{y}(1; j) \in \mathbb{L}_j$. При цьому, якщо $i = j$ і $\dim \mathbb{L}_i = 2$, то відповідні лінійно незалежні розв'язки позначимо через $\mathbf{y}(\bar{x}; i)$ та $\mathbf{y}(\tilde{x}; i)$. Без обмеження загальності міркувань надалі вважаємо, що $\det Y(1; i, j) = 1$.

Перші компоненти розв'язків $\mathbf{y}(x; i)$, $\mathbf{y}(\bar{x}; i)$, $\mathbf{y}(\tilde{x}; i)$, які позначатимемо відповідно через $y(x; i), \bar{y}(x; i), \tilde{y}(x; i)$, при $i = 1, \ldots, 6$ утворюють шість можливих типів розв'язків лінійного однорідного рівняння.

3 Основний результат: існування та інтегральні зображення розв'язків крайової задачі

Уведемо позначення

$$g(x) := \begin{cases} \frac{a_2(\alpha_2-2\alpha_1)+a_3\alpha_1+x[a_2f_0(x)+\alpha_1b_2(x)]}{a_2(x+1)}, & \text{якщо } a_2 \neq 0, \\ \frac{\alpha_2+xf_0(x)}{x+1}, & \text{якщо } a_2 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\eta := \begin{cases} -\alpha_1/a_2, & \text{якщо } a_2 \neq 0, \\ 0 & \text{якщо } a_2 = 0, \end{cases} \qquad W(x) = x^{-a_1}e^{-\int_1^x b_1(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Зауважимо, що за формулою Остроградського – Ліувілля функція $W(x)$ — це вронскіан $\det Y(x;i,j)$, який набуває значення 1 при $x=1$, і тому не залежить від i,j.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{A}$ – $\boldsymbol{D}$. *Тоді справджуються такі твердження:*

1. Якщо $\dim \mathbb{L}_i = 2$, *де* $i=1,2$, *то при* $i=1$ *задача* (1), (2) *розв'язна лише коли* $\lambda=\eta$, *а при* $i=2$ *— для довільного* λ. *При цьому розв'язки утворюють* $(3-i)$*-параметричну сім'ю вигляду*

$$y = \eta + c_1\bar{y}(x;i) + c_2\tilde{y}(x;i) + \int_{2-i}^{x} \frac{\tilde{y}(x;i)\bar{y}(s;i) - \bar{y}(x;i)\tilde{y}(s;i)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s,$$

де c_1, c_2 *— довільні сталі, якщо* $i=1$, *а якщо* $i=2$, *то* c_1 *і* c_2 *пов'язані рівністю* $c_1\bar{y}(0;2) + c_2\tilde{y}(0;2) = \lambda - \eta$.

2. Якщо $\dim \mathbb{L}_i = 2$ *при* $i=3,4,5$, *то задача* (1), (2) *розв'язна лише при*

$$\lambda = \eta - \delta_{i5}\int_0^{\infty} \frac{\tilde{y}(0;5)\bar{y}(s;5) - \bar{y}(0;5)\tilde{y}(s;5)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s$$

(тут δ_{ji} *— символ Кронекера) і має єдиний розв'язок вигляду*

$$y = \eta + \int_{\omega}^{x} \frac{\tilde{y}(x;i)\bar{y}(s;i) - \bar{y}(x;i)\tilde{y}(s;i)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{12}$$

де $\omega = 0$ *при* $i=3$ *та* $\omega=\infty$ *при* $i=4,5$.

3. Якщо $\dim \mathbb{L}_6 = 2$, *то задача* (1), (2) *розв'язна лише при* $\lambda=\eta$ *і за додаткової умови ортогональності*

$$\int_0^{\infty} \frac{u(x)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{13}$$

де $u(x)$ *— довільний розв'язок лінійного однорідного рівняння, асоційованого з* (1). *При цьому розв'язок єдиний і визначається формулою* (12) *при* $i = 6, \omega = \infty$.

4. Якщо $\dim \mathbb{L}_1 = \dim \mathbb{L}_2 = 1$, *а тоді* $\alpha_1 = a_2 = 0$, *то для довільного* λ *задача* (1), (2) *має однопараметричну сім'ю розв'язків*

$$y = \eta + cy(x;1) + \frac{\lambda - \eta}{y(0;2)} y(x;2) - \\ - \int_1^x \frac{y(x;1)y(s;2)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s + \int_0^x \frac{y(x;2)y(s;1)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s,$$

де c *— довільна стала.*

5. Якщо $\dim \mathbb{L}_1 = \dim \mathbb{L}_j = 1$ *при* $j = 3,4,5$, *то задача* (1), (2) *розв'язна лише при*

$$\lambda = \eta - \delta_{j5} y(0;5) \int_0^\infty W^{-1}(s) y(s;1) g(s)\,\mathrm{d}s,$$

а її розв'язки утворюють однопараметричну сім'ю

$$y = \eta + cy(x;1) - \int_1^x \frac{y(x;1)y(s;j)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s + \\ + \int_\omega^x \frac{y(x;j)y(s;1)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{14}$$

де c *— довільна стала,* $\omega = 0$ *при* $j = 3$ *і* $\omega = \infty$ *при* $j = 4,5$.

6. Якщо $\dim \mathbb{L}_2 = \dim \mathbb{L}_j = 1$ *при* $j = 3,4,5$, *то для довільного* λ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок*

$$y = \eta + c_*(\lambda) y(x;2) - \int_0^x \frac{y(x;2)y(s;j)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s + \\ + \int_\omega^x \frac{y(x;j)y(s;2)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{15}$$

де $\omega = 0$ *при* $j = 3$ *і* $\omega = \infty$ *при* $j = 4,5$, *а*

$$c_*(\lambda) = \frac{1}{y(0,2)} \left(\lambda - \eta + \delta_{j5} y(0;5) \int_0^\infty W^{-1}(s) y(s;2) g(s)\,\mathrm{d}s \right).$$

7. Якщо $\dim \mathbb{L}_i = \dim \mathbb{L}_j = 1$ *при* $3 \le i < j \le 5$, *то задача* (1), (2) *має розв'язок лише при*

$$\lambda = \eta - \delta_{j5} y(0;5) \int_0^\infty W^{-1}(s) y(s;i) g(s)\,\mathrm{d}s,$$

він єдиний і має вигляд

$$y = \eta - \int_{\omega}^{x} \frac{y(x;i)y(s;j)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s - \int_{x}^{\infty} \frac{y(x;j)y(s;i)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad (16)$$

де $\omega = 0$ *при* $i = 3$ *і* $\omega = \infty$ *при* $i = 4$.

8. Якщо $\dim \mathbb{L}_i = \dim \mathbb{L}_6 = 1$, $i = 2, \ldots, 5$, *то необхідною умовою існування розв'язків задачі* (1), (2) *є рівність* (13) *при* $u(x) = y(x, i)$. *При цьому: якщо* $i = 1$, *то задача розв'язна лише при* $\lambda = \eta$, *а її розв'язки утворюють однопараметричну сім'ю вигляду* (1) *при* $j = 6, \omega = \infty$; *якщо* $i = 2$, *то для довільного* λ *задача має єдиний розв'язок вигляду* (1) *при* $j = 6$, $\omega = \infty$, $c_*(\lambda) = (\lambda - \eta)/y(0; 2)$; *якщо* $i = 3, 4, 5$, *то задача має розв'язок лише при*

$$\lambda = \eta + \delta_{i5} y(0; 5) \int_0^{\infty} W^{-1}(s) y(s; 6)\,\mathrm{d}s,$$

він єдиний і має вигляд (16) *при* $j = 6$ *і* $\omega = 0$, *якщо* $i = 3$, *та* $\omega = \infty$, *якщо* $i = 4, 5$.

Доведення. Уведемо проекційні матриці $P_k = Y(1; i, j)\Pi_k Y^{-1}(1; i, j)$ $(k = i, j)$, де

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Pi_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ якщо } i < j, \quad \Pi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ якщо } i = j.$$

Тоді згідно з теоремою 2 роботи [6] система (3) має неперервно диференційовні на $[0, \infty)$ розв'язки, які прагнуть до нуля при $x \to \infty$, тоді і лише тоді, коли виконана рівність

$$\int_0^{\infty} \Pi_6 Y^{-1}(x; i, j)\mathbf{g}(x)\,dx = 0, \qquad (17)$$

де $\mathbf{g}(s) := \left[\mathbf{f}(x) + B(x)\boldsymbol{\eta}\right]$, $\boldsymbol{\eta} = \left(\begin{smallmatrix} -\alpha_1/a_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, і всі такі розв'язки допускають представлення

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + Y(x; i, j)\,(\Pi_1 + \Pi_2)\,\mathbf{c} + \int_0^{\infty} G(x, s; i, j)\mathbf{g}(s)\,ds,$$

де $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ — довільний вектор, $G(x,s;i,j) := G_1(x,s;i,j) + G_2(x,s;i,j)$,

$$G_1(x,s;i,j) := \begin{cases} Y(x;i,j)\Pi_1 Y^{-1}(s;i,j), & (x,s) \in D \cap D_+, \\ -Y(x;i,j)\Pi_1 Y^{-1}(s;i,j), & (x,s) \in D \cap D_-, \\ 0, & (x,s) \in (D_+ \cup D_-) \setminus D, \end{cases}$$

$$G_2(x,s;i,j) := \begin{cases} Y(x;i,j)(\Pi_2 + \Pi_3)Y^{-1}(s;i,j), & (x,s) \in D_+, \\ -Y(x;i,j)(\Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6)Y^{-1}(s;i,j), & (x,s) \in D_-, \end{cases}$$

$$D := \{(x,s) : 0 < x < s < 1\} \cup \{(x,s) : 1 \le s \le x\},$$
$$D_+ := \{(x,s) : 0 < s \le x\}, \quad D_- := \{(x,s) : 0 < x < s\},$$

або, що те саме,

$$\begin{gathered} \mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + Y(x;i,j)\,(\Pi_1 + \Pi_2)\,\mathbf{c} + \\ + \int_1^x Y(x;i,j)\Pi_1 Y^{-1}(s;i,j)\mathbf{g}(s)\,ds + \\ + \int_0^x Y(x;i,j)(\Pi_2 + \Pi_3)Y^{-1}(s;i,j)\mathbf{g}(s)\,ds - \\ - \int_x^\infty Y(x;i,j)(\Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6)Y^{-1}(s;i,j)\mathbf{g}(s)\,ds, \end{gathered} \tag{18}$$

причому в цих формулах ненульовими можуть бути лише проектори Π_i та Π_j.

Перша компонента вектор-функції в (18) є шуканим розв'язком крайової задачі. Знайдемо її. Оскільки

$$Y(x;i,j) = \begin{pmatrix} y(x;i) & y(x;j) \\ y'(x;i) & y'(x;j) \end{pmatrix}, Y^{-1}(s;i,j) = \frac{1}{W(s)} \begin{pmatrix} y'(x;j) & -y(x;j) \\ -y'(x;i) & y(x;i) \end{pmatrix}$$

і перша компонента вектор-функції $\mathbf{g}(x)$ дорівнює нулю, а друга дорівнює $g(x)$, то перші компоненти вектор-функцій

$$Y(x;i,j)\ \Pi_i\ Y^{-1}(s;i,j)\ \mathbf{g}(s),$$
$$Y(x;i,j)\ \Pi_j\ Y^{-1}(s;i,j)\ \mathbf{g}(s),$$
$$Y(x;i,i)\ Y^{-1}(s;i,i)\ \mathbf{g}(s)$$

дорівнюють відповідно

$$-\frac{y(x;i)y(s;j)g(s)}{W(s)},$$

$$\frac{y(x;j)y(s;i)g(s)}{W(s)},$$

$$\frac{[\tilde{y}(x;j)\bar{y}(s;i) - \bar{y}(x;i)\tilde{y}(s;j)]\, g(s)}{W(s)}.$$

Звідси випливають усі наведені у формулюванні теореми формули для розв'язків крайової задачі. З цих же формул легко знайти границі розв'язків при $x \to +0$. Залишилося зауважити, що у випадку $\dim \mathbb{L}_6 = 1$, $\dim \mathbb{L}_i = 1$, де $i = 1, \ldots, 5$, умова (17) еквівалентна рівності (13) при $u(x) = y(x;i)$, а у випадку $\dim \mathbb{L}_6 = 2$ зазначена умова еквівалентна рівності (13), де $u(x)$ — довільний розв'язок лінійного однорідного рівняння, асоційованого з (1). □

4 Висновки

З'ясовано, що існування та структура розв'язків досліджуваної сингулярної крайової задачі суттєво залежить від того, які два з шести можливих типів розв'язків відповідного однорідного рівняння утворюють його фундаментальну систему. В залежності від цього задача може мати 2-,1-параметричні сім'ї розв'язків або єдиний розв'язок. Встановлено, в яких випадках ця задача розв'язна при довільному значенні $\lambda = y(+0)$; наведено перелік випадків, коли вона розв'язна лише при певних значеннях λ.

[1] *Кигурадзе И.Т.* Сингулярные краевые задачи. – Тбилиси, 1975. – 352 с.

[2] *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* Сингулярные краевые задачи для ОДУ второго порядка // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1987. – 30. С. 105 – 201.

[3] *Kiguradze I.T.* On boundary value problems for linear differential systems with singularities// Differ. Equ. – 2003 – **39** № 2. – P. 212 – 225.

[4] *Ashordia M.* On the Fredholm property of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations with singularities// Mem. Differ. Equ. Math. Phys. – 2004. – **32**. – P. 137 – 141.

[5] *Agarwal R. P., Kiguradze I.* Two-point boundary value problems for higher-order linear differential equations with strong singularities// Boundary Value Problems. – 2006. – **2006**, № 83910. – P. 1 – 32.

[6] *Horishna Y., Parasyuk I., Protsak L.* Integral representation of solutions to boundary value problems on the half-line for linear ODEs with singularity of the first kind// Electron. J. Differ. Equat. – 2008. – V. 2008, no. 137. – p. 1 – 18.

[7] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

[8] *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

[9] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[10] *Самойленко А.М.* Экспоненциальная дихотомия на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **53**, № 3. – С. 356 – 371.

SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEM ON THE HALF-LINE FOR A SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH REGULAR SINGULAR POINT

Lyudmyla PROTSAK

National Pedagogical Dragomanov University
9 Pirogova Str., Kyiv 01601
e-mail:protsak_l_v@ukr.net

For a second order differential equation with regular singular point at zero and exponential dichotomy at infinity, we construct integral representations of continuously differentiable on the positive half-line solutions which vanish at infinity.