СКІНЧЕННО СТАНОВІ ФАКТОРИ ВІЛЬНИХ ДОБУТКІВ МОНОГЕННИХ НАПІВГРУП

©2010 р. *Андрій ОЛІЙНИК*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 60, Київ 01601
e-mail: aolijnyk@gmail.com

Редакція отримала статтю 30 серпня 2010 р.

Розглянуто деякі власні фактори вільних добутків двох копій довільної скінченної моногенної напівгрупи. Вказано скінченно станові зображення таких напівгрупи. Обчислено їх ріст.

1 Вступ

Напівгрупи перетворень просторів скінченних та нескінченних слів над скінченним алфавітом, породжені ініціальними автоматами-трансляторами над цим алфавітом, є класичним об'єктом дослідження алгебраїчної теорії автоматів (див. [1–3]). У категорному розумінні Бера серед скінченно породжених напівгруп такого виду більшість є вільними, тобто мають експонентційний ріст, вказано явні приклади таких напівгруп, породжених, зокрема, і скінченними автоматами [4]. Скінченні автомати використовувалися і для побудови напівгруп проміжного росту з додатковими цікавими властивостями [5].

Для дослідження напівгруп, породжених скінченними автоматами, можна використовувати декілька різних технік обчислень, зокрема техніку нескінченно ітерованих вінцевих степенів та скінченно станових

УДК 517.19, MSC 2000: 20M20, 20M05

вінцевих степенів напівгруп перетворень, яка використана в даній статті. В ній розглядаються скінченно станові вінцеві степені моногенних напівгруп з приєднаною одиницею, індекс яких більший за одиницю. Побудовані двопороджені піднапівгрупи в таких вінцевих степенях, які є власними факторами вільного добутку двох моногенних напівгруп. Для кожної з побудованих напівгруп знайдено канонічний запис елементів через твірні елементи. Обчислено ріст цих напівгруп.

2 Вінцеві степені напівгруп перетворень

Нехай X — деяка непорожня множина, яку будемо називати алфавітом. Символами X^* та X^ω позначимо множини всіх скінченних слів (включаючи порожнє слово Λ) та нескінченних слів відповідно над алфавітом X. Довжину слова $w \in X^*$ позначатимемо $|w|$. Множину всіх слів довжини n ототожнюватимемо з n-тим декартовим степенем X^n алфавіту X, $n \geq 0$. Тоді $X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$.

Нехай (T, X) — деяка напівгрупа перетворень, тобто піднапівгрупа T повної напівгрупи перетворень $\mathcal{T}_X$ множини X. Для кожного $i \geq 1$ розглянемо її ізоморфну копію $(T^{(i)}, X^{(i)})$. Вінцевий добуток

$$\wr_{i=1}^{n} (T^{(i)}, X^{(i)})$$

будемо називати n-тим вінцевим степенем напівгрупи перетворень (T, X) і позначати $W^n(T, X)$, $n \geq 2$. Нехай $W^1(T, X) = (T, X)$.

Нескінченним вінцевим степенем напівгрупи перетворень (T, X) називається напівгрупа $W^\infty(T, X)$ усіх нескінченних наборів вигляду

$$\bar{t} = [t_1; t_2(x_1); t_3(x_1, x_2); \ldots], \tag{1}$$

де $t_1 \in T,\ t_2(x) : X \to T, t_3(x_1, x_2) : X^2 \to T, \ldots$.

Вінцевий степінь $W^\infty(T, X)$ діє на обох множинах X^* та X^ω за правилом

$$u^{\bar{t}} = a_1^{t_1} a_2^{t_2(a_1)} a_3^{t_3(a_1, a_2)} \ldots \tag{2}$$

для довільного скінченного чи нескінченного слова $u = a_1 a_2 a_3 \ldots$.

Для елементів $\bar{t}, \bar{s} \in W^\infty(T, X)$, де $\bar{t}$ заданий рівністю (1), а

$$\bar{s} = [s_1; s_2(x_1); s_3(x_1, x_2); \ldots],$$

їх добуток $\bar{t}\bar{s}$ обчислюється за правилом

$$\bar{t}\bar{s} = [t_1 s_1; t_2(x_1)s_2(x_1^{t_1}); t_3(x_1, x_2)s_3(x_1^{t_1}, x_2^{t_2(x_1)}); \ldots]. \quad (3)$$

Для кожного елемента $\bar{t} \in W^\infty(T, X)$ і слова $u \in X^*$ визначимо елемент $\bar{t}|_u \in W^\infty(T, X)$ за таким правилом. Покладемо $\bar{t}|_\Lambda = \bar{t}$. Для непорожнього слова $u = a_1 \ldots a_k \in X^*$ і елемента $\bar{t}$, заданого рівністю (1), символом $\bar{t}|_u$ позначимо набір

$$[t_{k+1}(a_1, \ldots, a_k); t_{k+2}(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}); t_{k+3}(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, x_{k+2}); \ldots].$$

Новий набір $\bar{t}|_u$ також має вигляд (1), тобто справді належить напівгрупі $W^\infty(T, X)$. Елемент $\bar{t}|_u$ називається станом елемента $\bar{t}$ у слові u. Позначимо символом $States(\bar{t})$ множину всіх станів елемента $\bar{t}$.

Лема 1. *Для довільних елементів $\bar{t}, \bar{s} \in W^\infty(T, X)$ і слова $u \in X^*$ має місце рівність $(\bar{t}\bar{s})|_u = \bar{t}|_u \bar{s}|_{u^{\bar{t}}}$.*

Доведення. Користуючись рівностями (2) та (3), необхідне твердження виводиться безпосередньо з означення стану. □

Нехай

$$FW^\infty(T, X) = \{\bar{t} \in W^\infty(T, X) : |States(\bar{t})| < \infty\}.$$

З леми 1 випливає, що вказана підмножина замкнена відносно множення, а тому утворює піднапівгрупу напівгрупи $W^\infty(T, X)$.

Означення 1. *Напівгрупа $FW^\infty(T, X)$ називається скінченно становим вінцевим степенем напівгрупи перетворень (T, X).*

Для довільних $\bar{t} \in W^\infty(T, X)$ і $n \geq 1$ позначимо символом $p_n(\bar{t})$ скінченний набір $[t_1; \ldots; t_n(x_1, \ldots, x_{n-1})]$, а також визначимо функцію $q_n(\bar{t}) : X^n \to W^\infty(T, X)$ рівністю

$$q_n(\bar{t})(u) = \bar{t}|_u, \quad u \in X^n.$$

Тоді правило

$$\bar{t} \mapsto [p_n(\bar{t}); q_n(\bar{t})]$$

встановлює ізоморфізм напівгруп перетворень $W^\infty(T, X)$ та

$$W^n(T, X) \wr W^\infty(T, X).$$

Тому для елемента $\bar{t} \in W^{\infty}(T, X)$ будемо також користуватись записом

$$\bar{t} = [p_n(\bar{t}); q_n(\bar{t})], \tag{4}$$

і називатимемо його n-тою вінцевою рекурсією $\bar{t}$.

Має місце

Лема 2. *Нехай $\bar{t}, \bar{s} \in W^{\infty}(T, X)$. Якщо існує таке $n \geq 1$, що $p_n(\bar{t}) = p_n(\bar{s})$ і для кожного слова $u \in X^n$ знайдеться слово v, $|v| < |u|$, для якого виконані рівності*

$$\bar{t}|_u = \bar{t}|_v, \quad \bar{s}|_u = \bar{s}|_v,$$

то $\bar{t} = \bar{s}$.

Доведення. Елементи $\bar{t}, \bar{s}$ рівні тоді й лише тоді, коли для кожного $m \geq 1$ виконані рівності $p_m(\bar{t}) = p_m(\bar{s})$. Тому для доведення досить показати, що з виконання вказаної умови для числа n випливає її виконання і для числа $n+1$. Після цього залишиться застосувати індукцію за $m \geq n$.

Зафіксуємо довільне слово $u \in X^n$. Тоді для деякого слова v, $|v| < n$, з рівностей

$$\bar{t}|_u = \bar{t}|_v, \quad \bar{s}|_u = \bar{s}|_v$$

маємо рівності

$$p_1(\bar{t}|_u) = p_1(\bar{t}|_v), \quad p_1(\bar{s}|_u) = p_1(\bar{s}|_v),$$

звідки, з урахуванням рівності $p_n(\bar{t}) = p_n(\bar{s})$, випливає рівність значень $(n+1)$-их компонент елементів $p_{n+1}(\bar{t})$ і $p_{n+1}(\bar{s})$ на слові u. Оскільки слово u довільне, то звідси маємо рівність цих компонент, а відтак і рівність $p_{n+1}(\bar{t}) = p_{n+1}(\bar{s})$.

Крім того, кожне слово $u_1 \in X^{n+1}$ має вигляд $u_1 = ux$ для деяких $u \in X^n$, $x \in X$. Тоді для деякого слова v, $|v| < n$, матимемо рівності

$$\bar{t}|_{u_1} = (\bar{t}|_u)|_x = (\bar{t}|_v)|_x = \bar{t}|_{vx},$$

$$\bar{s}|_{u_1} = (\bar{s}|_u)|_x = (\bar{s}|_v)|_x = \bar{s}|_{vx}.$$

Оскільки $|vx| < n+1$, то слово $v_1 = vx$ для u_1 є шуканим. $\square$

3 Піднапівгрупи скінченно станових вінцевих степенів моногенних напівгруп

Зафіксуємо натуральні числа $m > 1$ та r. Нехай $M(m,r)$ — це моногенна напівгрупа з індексом m та періодом r. Будемо позначати твірний елемент цієї напівгрупи символом a. Нехай також $M(m,r)^1$ — відповідний моногенний моноїд. Тоді

$$M(m,r)^1 = \{1, a, \ldots, a^{m+r-1}\}.$$

Для натурального числа z визначимо функцію

$$\nu(z) = \begin{cases} z, & \text{якщо } z < m \\ m + \mathsf{rm}(z-m, r) & \text{в іншому випадку} \end{cases},$$

де символом $\mathsf{rm}(x,y)$ позначається остача від ділення числа x на y. Тоді $0 < \nu(z) < m + r$. Зауважимо також, що $\nu(z) = z$ для $z < m + r$, а тому $\nu(\nu(z)) = \nu(z)$. Маємо рівність $a^k = a^{\nu(k)}$, $k \geq 1$.

Введемо позначення $a_0 = 1, a_i = a^i$, $1 \leq i \leq m + r - 1$, та визначимо алфавіт $X = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m+r-1}\}$. Будемо розглядати праву регулярну дію моноїда $M(m,r)^1$ на множині X, задану правилом

$$a_i^a = a_{i+1}, 0 \leq i \leq m + r - 2, \quad a_{m+r-1}^a = a_m.$$

Далі у вінцевому степені $FW^\infty(M(1,r)^1, X)$ буде вказано дві двопороджені напівгрупи. Для визначення цих напівгруп розглянемо деякі допоміжні конструкції.

Спочатку визначимо функцію $f : X \to M(m,r)^1$ таким правилом:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } x = a_0, \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тоді j-тий степінь $f^j = \underbrace{f \cdot \ldots \cdot f}_{j}$ цієї функції для кожного $j \geq 1$ має вигляд:

$$f^j(x) = \begin{cases} a^{p(j)}, & \text{якщо } x = a_0, \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Таким чином, моногенна піднапівгрупа, породжена цією функцією в напівгрупі за множенням усіх функцій з X в $M(m,r)^1$, буде мати індекс m та період r.

Розглянемо два елементи b_1, b_2 вінцевого степеня $W^2(M(m,r)^1, X)$:

$$b_1 = [a; 1],$$
$$b_2 = [1; f(x)].$$

Тут і надалі всі сталі функції зі значеннями у $M(m,r)^1$ будуть позначатися тими самими символами, якими позначаються ті значення, яких ці функції набувають. Символом B позначимо піднапівгрупу в $W^2(M(m,r)^1, X)$, породжену елементами b_1 та b_2.

Лема 3. *Напівгрупа B має задання твірними і визначальними співвідношеннями вигляду*

$$B = \langle b_1, b_2 : b_1 b_2 = b_1, b_i^{m+r} = b_i^m, i = 1, 2\rangle.$$

Має місце рівність

$$B = \{b_1^i, b_2^i, b_2^i b_1^j : 1 \leq i, j \leq m + r - 1\} \tag{5}$$

і кожна з моногенних напівгруп

$$\langle b_1\rangle, \quad \langle b_2\rangle \text{ та } \langle b_2^i b_1\rangle, \quad 1 \leq i \leq m + r - 1,$$

ізоморфна $M(m,r)$.

Доведення. Рівність $b_1 b_2 = b_1$ випливає з правила множення елементів вінцевого добутку напівгруп перетворень. Оскільки значення степенів елементів b_1 та b_2 обчислюються покоординатно, то мають місце рівності $b_i^{m+r} = b_i^m$, $i = 1, 2$. Таким чином, моногенні напівгрупи $\langle b_1\rangle$, $\langle b_2\rangle$ мають індекс m і період r, а твірні напівгрупи B задовольняють вказаним співвідношенням. Зауважимо, що в напівгрупі B виконуються рівності:

$$b_2^{i_1} b_1^{j_1} \cdot b_2^{i_2} b_1^{j_2} = b_2^{i_1} b_1^{j_1+j_2}, \quad 1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq m + r - 1,$$

звідки випливає, що кожна з напівгруп $\langle b_2^i b_1\rangle$, $1 \leq i \leq m + r - 1$, ізоморфна $M(m,r)$. Використовуючи ці рівності, довільний елемент B можна записати у вигляді $b_1^i = [a^i; 1]$, $b_2^i = [1; f^i(x)]$ чи $b_2^i b_1^j = [a^j; f^i(x)]$ для деяких i, j таких, що $1 \leq i, j \leq m + r - 1$. Оскільки перераховані елементи є попарно різними, то звідси випливає рівність (5). Також звідси маємо, що вказані співвідношення є визначальними. □

У подальшому нам знадобляться твердження про динаміку дій напівгруп $\langle b_1\rangle^1$ та $\langle b_2\rangle^1$ на множині X^2. Визначимо такі підмножини множини X^2:

$$
\begin{gathered}
O_1 = \{a_j a_0 : 1 \le j \le m+r-1\},\\
O_2 = \{a_0 a_j : 1 \le j \le m+r-1\},\\
M_1 = \{a_i a_j : 0 \le i \le m+r-1, 1 \le j \le m+r-1\},\\
M_2 = O_1.
\end{gathered}
$$

Лема 4. *1. Має місце розбиття*

$$X^2 = M_1 \cup M_2 \cup \{a_0 a_0\}.$$

2. *Множина O_i є траекторією слова $a_0 a_0$ під дією напівгрупи $\langle b_i\rangle$, $i = 1, 2$.*

3. *Мають місце рівності*

$$M_1 = O_2^{\langle b_1\rangle^1}, \quad M_2 = O_1^{\langle b_2\rangle^1}.$$

4. *Кожна з множин M_1, M_2 та їх доповнення в X^2 є інваріантними відносно дії напівгруп $\langle b_1\rangle^1$ та $\langle b_2\rangle^1$.*

Доведення. Перше твердження прямо випливає з означення множин M_1 та M_2.

Оскільки $(a_0a_0)^{b_1^j} = a_j a_0$ та $(a_0a_0)^{b_2^j} = a_0 a_j$, $1 \le j \le m+r-1$, то має місце й друге твердження.

Маємо рівність

$$O_2^{\langle b_1\rangle^1} = O_2 \cup \{(a_0a_j)^{b_1^i} : 1 \le i, j \le m+r-1\} = M_1.$$

Оскільки $b_1 b_2 = b_1$, то

$$O_1^{\langle b_2\rangle^1} = O_1 = M_2,$$

і третє твердження доведено.

Останнє твердження леми 4 тепер одразу випливає з попередніх двох. $\square$

Тепер визначимо потрібні напівгрупи. Розглянемо елементи

$$\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2 \in W^\infty(M(m,r)^1, X),$$

задані їхніми другими вінцевими рекурсіями:

$$\bar{s}_i = [p_2(\bar{s}_i); q_2(\bar{s}_i)], \quad \bar{t}_i = [p_2(\bar{t}_i); q_2(\bar{t}_i)], \quad i = 1, 2,$$

де $p_2(\bar{s}_i) = 1$, $p_2(\bar{t}_i) = b_i$ та

$$q_2(\bar{s}_i)(u) = q_2(\bar{t}_i)(u) = \begin{cases} \bar{t}_i, & \text{якщо } u \in M_i, \\ \bar{s}_i, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Символами $S_{m,r}$ і $T_{m,r}$ позначимо напівгрупи, породжені парами елементів $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ і $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ відповідно.

Лема 5. *Напівгрупи $S_{m,r}$ і $T_{m,r}$ містяться у скінченно становому степені $FW^{\infty}(M(m,r)^1, X)$.*

Доведення. Твердження леми випливає з того, що довільний стан кожного з елементів $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2$ збігається зі станом цього елемента у деякому слові довжини 0 чи 1. Тобто кількість станів кожного з твірних елементів напівгруп $S_{m,r}$ і $T_{m,r}$ не перевищує $2(m + r + 1)$. □

Лема 6. *Моногенні напівгрупи, породжені кожним з елементів $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2$, мають індекс m і період r.*

Доведення. Зафіксуємо i, $i = 1, 2$. Квадрати елементів $\bar{s}_i$ та $\bar{t}_i$ записуються у вигляді таких рекурсій:

$$\bar{s}_i^2 = [1; q_2(\bar{s}_i^2)], \quad \bar{t}_i^2 = [b_i^2; q_2(\bar{t}_i^2)].$$

При цьому для довільного слова $u \in X^2$ маємо:

$$(q_2(\bar{s}_i^2))(u) = (q_2(\bar{t}_i^2))(u) = (q_2(\bar{t}_i))(u) \cdot (q_2(\bar{t}_i))(u^{s_i}) = ((q_2(\bar{t}_i))(u))^2,$$

оскільки, за лемою 4, $u \in M_i$ тоді й лише тоді, коли $u^{b_i} \in M_i$. Отже, $q_2(\bar{s}_i^2) = q_2(\bar{t}_i^2) = q_2(\bar{t}_i)^2$ і тому, за лемою 2,

$$\bar{s}_i^j = [1; q_2(\bar{s}_i)^j], \quad \bar{t}_i^j = [b_i^j; q_2(\bar{t}_i)^j], \quad j \geq 1. \tag{6}$$

Таким чином, обидві напівгрупи $\langle \bar{s}_i \rangle$ і $\langle \bar{t}_i \rangle$ ізоморфні $\langle b_i \rangle$, звідки випливає потрібне твердження. □

Слово $W(x_1,x_2)$ над деяким алфавітом $\{x_1,x_2\}$ назвемо (m,r)-моногенним, якщо воно містить не більше $m+r-1$ послідовних входжень кожного з символів x_1,x_2. Кожне (m,r)-моногенне слово має вигляд

$$W(x_1,x_2)=x_{i_1}^{\alpha_1}\dots x_{i_k}^{\alpha_k}, \tag{7}$$

де $k\geq 1$, $1\leq\alpha_1,\dots,\alpha_k\leq m+r-1$, кожен з індексів $i_1,\dots,i_k$ дорівнює 1 чи 2, причому сусідні індекси є різними. Для кожного j, $1\leq j\leq k-1$, нехай

$$W_j(x_1,x_2)=x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}}\dots x_{i_k}^{\alpha_k},\ \text{і}\ W_k(x_1,x_2)=\Lambda.$$

Лема 7. *Нехай* $W(x_1,x_2)=x_{i_1}^{\alpha_1}\dots x_{i_k}^{\alpha_k}$ *— (m,r)-моногенне слово,* $u\in X^2$. *Мають місце такі рівності:*

1. $W(\bar s_1,\bar s_2)|_u=W(\bar t_1,\bar s_2)|_u=W(\bar s_1,\bar t_2)|_u=W(\bar t_1,\bar t_2)|_u=$
$$=\begin{cases}W(\bar t_1,\bar s_2), & \textit{якщо } u\in M_1,\\ W(\bar s_1,\bar t_2), & \textit{якщо } u\in M_2;\end{cases}$$
2. $W(\bar s_1,\bar s_2)|_{a_0a_0}=W(\bar s_1,\bar s_2)$;
3. $W(\bar t_1,\bar s_2)|_{a_0a_0}=\begin{cases}W(\bar s_1,\bar t_2), & \textit{якщо } i_1=1,\\ s_2^{\alpha_1}W_1(\bar s_1,\bar t_2), & \textit{якщо } i_1=2;\end{cases}$
4. $W(\bar s_1,\bar t_2)|_{a_0a_0}=\begin{cases}s_1^{\alpha_1}W_1(\bar t_1,\bar s_2), & \textit{якщо } i_1=1,\\ W(\bar t_1,\bar s_2), & \textit{якщо } i_1=2;\end{cases}$
5. $W(\bar t_1,\bar t_2)|_{a_0a_0}=\begin{cases}W(\bar s_1,\bar t_2), & \textit{якщо } i_1=1,\\ W(\bar t_1,\bar s_2), & \textit{якщо } i_1=2.\end{cases}$

Доведення. Індукція за k.

База індукції $k=1$. Нехай $i_1=1$. У цьому випадку $W(x_1,x_2)=x_1^{\alpha_1}$, $W(\bar t_1,\bar s_2)=W(\bar t_1,\bar t_2)=\bar t_1^{\alpha_1}$ і $W(\bar s_1,\bar s_2)=W(\bar s_1,\bar t_2)=\bar s_1^{\alpha_1}$. За лемами 1 і 4 маємо

$$\bar t_1^{\alpha_1}|_u=\bar t_1|_u\cdot\bar t_1^{\alpha_1-1}|_{u^{b_1}}=$$
$$=\begin{cases}\bar s_1\bar t_1^{\alpha_1-1}|_{u^{b_1}}, & \text{якщо } u=a_0a_0,\\ \bar t_1\bar t_1^{\alpha_1-1}|_{u^{b_1}}, & \text{якщо } u\in M_1,\\ \bar s_1\bar t_1^{\alpha_1-1}|_{u^{b_1}}, & \text{якщо } u\in M_2,\end{cases}=\begin{cases}\bar s_1^{\alpha_1}, & \text{якщо } u=a_0a_0,\\ \bar t_1^{\alpha_1}, & \text{якщо } u\in M_1,\\ \bar s_1^{\alpha_1}, & \text{якщо } u\in M_2.\end{cases}$$

Аналогічно

$$\bar{s}_1^{\alpha_1}|_u = \bar{s}_1|_u \cdot \bar{s}_1^{\alpha_1-1}|_u =$$
$$= \begin{cases} \bar{s}_1\bar{s}_1^{\alpha_1-1}|_u, & \text{якщо } u = a_0a_0, \\ \bar{t}_1\bar{s}_1^{\alpha_1-1}|_u, & \text{якщо } u \in M_1, \\ \bar{s}_1\bar{s}_1^{\alpha_1-1}|_u, & \text{якщо } u \in M_2, \end{cases} = \begin{cases} \bar{s}_1^{\alpha_1}, & \text{якщо } u = a_0a_0, \\ \bar{t}_1^{\alpha_1}, & \text{якщо } u \in M_1, \\ \bar{s}_1^{\alpha_1}, & \text{якщо } u \in M_2. \end{cases}$$

Звідси видно, що всі вказані в умові рівності в цьому випадку виконані. Випадок $i_1 = 2$ розглядається аналогічно.

Індуктивний крок. Маємо рівність $W(x_1, x_2) = x_{i_1}^{\alpha_1} W_1(x_1, x_2)$. Проведемо тепер, наприклад, доведення рівності 3. Інші рівності доводяться аналогічно. Нехай $i_1 = 1$. У цьому випадку $W(\bar{t}_1, \bar{s}_2) = \bar{t}_1^{\alpha_1} W_1(\bar{t}_1, \bar{s}_2)$. Використовуючи лему 1, базу індукції, лему 4 і припущення індукції, отримуємо

$$W(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{a_0a_0} = \bar{t}_1^{\alpha_1}|_{a_0a_0} \cdot W_1(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{(a_0a_0)^{b_1^{\alpha_1}}} = \bar{s}_1^{\alpha_1} \cdot W_1(\bar{s}_1, \bar{t}_2) = W(\bar{s}_1, \bar{t}_2),$$

що й потрібно було довести.

Якщо ж $i_1 = 2$, то $W(\bar{t}_1, \bar{s}_2) = \bar{s}_2^{\alpha_1} W_1(\bar{t}_1, \bar{s}_2)$ і аналогічно

$$W(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{a_0a_0} = \bar{s}_2^{\alpha_1}|_{a_0a_0} \cdot W_1(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{a_0a_0} = \bar{s}_2^{\alpha_1} \cdot W_1(\bar{s}_1, \bar{t}_2),$$

оскільки, згідно означення (m, r)-моногенного слова, в цьому випадку першою літерою слова $W_1(x_1, x_2)$ є x_2.

Таким чином, рівність 3 виконується, і лему 7 доведено. □

Лема 8. *Нехай $W(x_1, x_2) = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$ — (m, r)-моногенне слово.*

1. *Для кожного j, $1 \leq j \leq k$, має місце рівність*

$$W(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0a_0)^j} = \begin{cases} \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} W_j(\bar{s}_1, \bar{t}_2), & \text{якщо } i_j = 1, \\ \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} W_j(\bar{t}_1, \bar{s}_2), & \text{якщо } i_j = 2. \end{cases}$$

Крім того,

$$W(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0a_0)^j} = W(\bar{s}_1, \bar{s}_2), \quad j > k.$$

2. *Для кожного j, $1 \le j \le k$, має місце рівність*

$$W(\bar{s}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0a_0)^j} =$$
$$= \begin{cases} \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} W_j(\bar{s}_1, \bar{t}_2), & \text{якщо } i_1 = 1, \ j \text{ парне}, \\ \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} W_j(\bar{t}_1, \bar{s}_2), & \text{якщо } i_1 = 1, \ j \text{ непарне}, \\ W_1(\bar{s}_1, \bar{t}_2), & \text{якщо } i_1 = 2, \ j \text{ парне}, \\ W(\bar{t}_1, \bar{s}_2), & \text{якщо } i_1 = 2, \ j \text{ непарне}. \end{cases}$$

3. *Для кожного j, $1 \le j \le k$, має місце рівність*

$$W(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{(a_0a_0)^j} =$$
$$= \begin{cases} \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} W_j(\bar{s}_1, \bar{t}_2), & \text{якщо } i_1 = 2, \ j \text{ непарне}, \\ \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} W_j(\bar{t}_1, \bar{s}_2), & \text{якщо } i_1 = 2, \ j \text{ парне}, \\ W_1(\bar{s}_1, \bar{t}_2), & \text{якщо } i_1 = 1, \ j \text{ непарне}, \\ W(\bar{t}_1, \bar{s}_2), & \text{якщо } i_1 = 1, \ j \text{ парне}. \end{cases}$$

4. *Для довільних слів $u \in X^*$ парної довжини та $v \in X^2$, $v \neq a_0a_0$, справджуються рівності*

$$W(\bar{s}_1, \bar{s}_2)|_{uv} = W(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{uv} =$$
$$= W(\bar{s}_1, \bar{t}_2)|_{uv} = W(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{uv} = \begin{cases} W(\bar{t}_1, \bar{s}_2), & \text{якщо } v \in M_1, \\ W(\bar{s}_1, \bar{t}_2), & \text{якщо } v \in M_2. \end{cases}$$

Доведення. Доведемо твердження 1. Індукція за j.

База індукції $j = 1$. Необхідне твердження випливає з рівності 5 леми 7.

Індуктивний крок. Нехай $1 < j \le k$. Розглянемо випадок $i_j = 1$. Тоді $i_{j-1} = 2$. За припущенням індукції та лемами 1, 4 і 7 маємо

$$\begin{aligned} W(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0a_0)^j} &= (W(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0a_0)^{j-1}})|_{a_0a_0} = \\ &= (\bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} W_{j-1}(\bar{t}_1, \bar{s}_2))|_{a_0a_0} = \\ &= (\bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}})|_{a_0a_0} \cdot W_{j-1}(\bar{t}_1, \bar{s}_2)|_{a_0a_0} = \\ &= \bar{s}_{i_1}^{\alpha_1} \dots \bar{s}_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} \bar{s}_{i_j}^{\alpha_j} \cdot W_j(\bar{s}_1, \bar{t}_2). \end{aligned}$$

Випадок $i_j = 2$ розглядається аналогічно.

Якщо ж $j > k$, то необхідна рівність відразу випливає з рівності 2 леми 7.

Аналогічно, базуючись на рівностях 3 і 4 леми 7, твердження 2 і 3 доводяться індукцією за j .

Твердження 4 тепер доводиться індукцією за довжиною слова u з використанням леми 7 та тверджень 1, 2 і 3.

Лему 8 доведено. □

Теорема 1. *Нехай*

$$U(x_1, x_2) = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}, \quad V(x_1, x_2) = x_{j_1}^{\beta_1} \dots x_{j_l}^{\beta_l} -$$

(m, r)*-моногенні слова. В напівгрупі* $T_{m,r}$ *має місце рівність*

$$U(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$$

тоді й лише тоді, коли $k = l$, $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$, *для кожного* i, $1 \le i \le k$, *виконана рівність*

$$\nu \left(\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \alpha_{i+2j} \right) = \nu \left(\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \beta_{i+2j} \right),$$

і, якщо $i_1 = j_1 = 2$, *то* $\alpha_1 = \beta_1$.

Доведення. Необхідність. Для довільного слова $u \in X^*$ з рівності

$$U(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$$

випливає рівність

$$U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u = V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u,$$

звідки, зокрема, отримуємо рівність

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u) = p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u).$$

Припустимо тепер, що $k < l$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $j_k = 1$. Тоді за лемою 8

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0 a_0)^k}) = p_2(U(\bar{s}_1, \bar{s}_2)) = 1,$$

в той час як

$$p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0 a_0)^k}) = p_2(\bar{s}_{j_1}^{\beta_1} \dots \bar{s}_{j_{k-1}}^{\beta_{k-1}} V_k(\bar{s}_1, \bar{t}_2)) = b_2^{\sum_{j=0}^{[(l-k-1)/2]} \beta_{k+1+2j}} \neq 1,$$

оскільки $\beta_{k+1} \neq 0$. Отже, $k \geq l$. Міркуючи аналогічно, одержимо нерівність $k \leq l$, а тому $k = l$.

Якщо тепер припустити, що $i_k \neq j_k$, то з тих самих міркувань отримаємо

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0 a_0)^{k-1}}) = b_{i_k}^{\alpha_k} \neq b_{j_k}^{\beta_k} = p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0 a_0)^{k-1}}).$$

Отже, $i_k = j_k$, звідки, за означенням (m, r)-моногенного слова, випливають рівності $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}$.

Далі, користуючись лемою 8, для довільного i такого, що $2 \leq i \leq k$, маємо рівності

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0 a_0)^{i-1}}) = \\ = b_{j_i}^{\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \alpha_{i+2j}} = b_{j_i}^{\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \beta_{i+2j}} = p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_{(a_0 a_0)^{i-1}}). \quad (8)$$

Звідси отримуємо рівність

$$a^{\sum_{i=0}^{[(k-j)/2]} \alpha_{j+2i}} = a^{\sum_{i=0}^{[(k-j)/2]} \beta_{j+2i}},$$

яка рівносильна потрібній рівності

$$\nu\left(\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \alpha_{i+2j}\right) = \nu\left(\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \beta_{i+2j}\right).$$

Аналогічна рівність для $i = 1$ випливає з рівностей

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u) = b_{j_1}^{\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \alpha_{1+2j}} = b_{j_1}^{\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \beta_{1+2j}} = p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u), \quad (9)$$

де слово u належить множині M_{i_1}.

Нарешті, у випадку, коли $i_1 = j_1 = 2$, з рівностей

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)) = b_2^{\alpha_1} b_1^{\sum_{j=0}^{[(k-2)/2]} \alpha_{2+2j}} = b_2^{\beta_1} b_{j_1}^{\sum_{j=0}^{[(k-2)/2]} \beta_{2+2j}} = p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)) \quad (10)$$

і леми 3 буде випливати й рівність $\alpha_1 = \beta_1$.

Достатність. Для доведення рівності

$$U(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$$

скористаємось лемою 2. Покажемо, що в позначеннях цієї леми досить взяти $n = 2k + 2$. Справді, для довільного слова $u \in X^n$ з леми 8 випливають рівності

$$U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u = U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_v,$$

$$V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u = V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_v$$

для деякого слова v, $|v| \leq 2k$. Більше того, слово v можна вибрати вигляду $(a_0a_0)^j$, $1 \leq j \leq k$, або довжини 2.

Для доведення рівності

$$p_n(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)) = p_n(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2))$$

досить показати, що для кожного слова u парної довжини $\leq n$ справджується рівність

$$p_2(U(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u) = p_2(V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)|_u).$$

Але з леми 8 маємо, що кожна така рівність рівносильна одній із рівностей (8), (9), (10). Всі вони виконуються внаслідок умов, що накладені на слова U, V. Теорему 1 доведено. □

Аналогічно доводиться

Теорема 2. *Нехай* $U(x_1, x_2) = x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_k}^{\alpha_k}$, $V(x_1, x_2) = x_{j_1}^{\beta_1} \ldots x_{j_l}^{\beta_l}$ *— (m, r)-моногенні слова. В напівгрупі $S_{m,r}$ має місце рівність*

$$U(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = V(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$$

тоді й лише тоді, коли $k = l$, $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$, і для кожного i, $1 \leq i \leq k$, виконана рівність

$$\nu\left(\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \alpha_{i+2j}\right) = \nu\left(\sum_{j=0}^{[(k-i)/2]} \beta_{i+2j}\right).$$

З теорем 1 і 2 та означення функції ν відразу отримуємо

Наслідок 1. *Кожен елемент напівгрупи $T_{m,r}$ (напівгрупи $S_{m,r}$) однозначно записується у вигляді $W(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ (у вигляді $W(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$), де*

$$W(x_1, x_2) = x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_k}^{\alpha_k} \quad -$$

таке (m,r)-моногенне слово, що для кожного i, $2 \le i \le k-2$ (відповідно, $1 \le i \le k-2$), а якщо $i_1 = 1$, то й для $i = 1$, виконана нерівність

$$\alpha_i \le \max\{r, \sum_{j=1}^{[(k-i)/2]} \alpha_{i+2j}\}.$$

Звідси, зокрема, випливає

Наслідок 2. *Напівгрупа $T_{m,r}$ є власним фактором напівгрупи $S_{m,r}$, яка, в свою чергу, є власним фактором вільного добутку двох копій моногенної напівгрупи $M(m,r)$.*

Ріст побудованих напівгруп характеризує

Теорема 3. *Якщо моногенна напівгрупа $M(m,r)$ є нільпотентною, то напівгрупи $S_{m,r}$ та $T_{m,r}$ мають лінійний ріст. В іншому випадку кожна з напівгруп $S_{m,r}$ та $T_{m,r}$ містить вільну некомутативну піднапівгрупу, тобто має експоненційний ріст.*

Доведення. Проведемо доведення для напівгрупи $T_{m,r}$. Для $S_{m,r}$ міркування аналогічні.

Зауважимо, що нільпотентність напівгрупи $M(m,r)$ рівносильна рівності $r = 1$.

Нехай $r = 1$. Тоді з наслідку 1 випливає, що для деякого натурального N кожен елемент напівгрупи $T_{m,r}$, який подається у вигляді добутку не менше, ніж N твірних, можна однозначно отримати множенням зліва на твірний з деякого елемента, у розкладі якого множників на 1 менше. Таким чином, існує певна стала C така, що для кожного $n \ge N$ напівгрупа $T_{m,r}$ містить не більше C елементів, котрі розкладаються в добуток n твірних цієї напівгрупи. Звідси одержимо, що кількість елементів, які розкладаються в добуток $\le n$ твірних — лінійна функція від n.

Нехай $r > 1$. Виберемо елементи $z_1 = \bar{t}_1\bar{t}_2$ та $z_2 = \bar{t}_2\bar{t}_1$ і покажемо, що піднапівгрупа напівгрупи $T_{m,r}$, породжена цими елементами, буде вільною напівгрупою з базисом $\{z_1, z_2\}$.

Розглянемо довільні напівгрупові слова

$$U(x_1,x_2) = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k} \text{ і } V(x_1,x_2) = x_{j_1}^{\beta_1} \dots x_{j_l}^{\beta_l},$$

де $k, l \ge 1$, індекси $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1,2\}$, причому

$$i_j \ne i_{j+1} \quad (1 \le j \le k-1)$$

і

$$j_i \neq j_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1),$$

а степені $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l \geq 1$. Нехай

$$i_{k+1}, j_{l+1} \in \{1, 2\}$$

і

$$i_{k+1} \neq i_k, \quad j_{l+1} \neq j_l.$$

Не обмежуючи загальності вважаємо, що $k \leq l$. Тоді

$$U(z_1, z_2) = z_{i_1}^{\alpha_1} \ldots z_{i_k}^{\alpha_k} = (\bar{t}_{i_1}\bar{t}_{i_2})^{\alpha_1} \ldots (\bar{t}_{i_k}\bar{t}_{i_{k+1}})^{\alpha_k},$$
$$V(z_1, z_2) = z_{j_1}^{\beta_1} \ldots z_{j_k}^{\beta_k} = (\bar{t}_{j_1}\bar{t}_{j_2})^{\beta_1} \ldots (\bar{t}_{j_l}\bar{t}_{j_{l+1}})^{\beta_l}.$$

Припустимо, що $U(z_1, z_2) = V(z_1, z_2)$. З наслідку 1 послідовно отримуємо рівності:

$$2(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) - k + 1 = 2(\beta_1 + \ldots \beta_l) + l - 1$$
$$i_1 = j_1, i_2 = j_2, \alpha_1 = \beta_1, \ldots, i_k = j_k,$$
$$\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, i_{k+1} = j_{k+1}, \alpha_k = \beta_k,$$

звідки $k = l$ і, остаточно,

$$U(x_1, x_2) = V(x_1, x_2).$$

Теорему 3 доведено. □

4 Висновки

В роботі розглянуто скінченно станові вінцеві степені скінченних моногенних напівгруп з приєднаною одиницею, індекс яких не менший двох. В кожному такому степені побудовано нескінченний власний фактор вільного добутку двох моногенних напівгруп. Для кожної з побудованих напівгруп знайдено канонічний запис елементів через твірні елементи. Обчислено ріст цих напівгруп.

[1] *Gecseg F., Peák I.* Algebraic theory of automata. — Budapest: Akad. Kiadó, 1972. – 326 p.

[2] *Eilenberg S.* Automata, languages, and machines. Vol. A. — New York: Academic Press, 1974. – 446 p.

[3] *Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Автоматы, динамические системы и группы// Труды математического института им. В.А.Стеклова. — 2000. — **231**. — С. 134 – 214.

[4] *Олийнык А.С.* О свободных полугруппах автоматных преобразований// Мат. заметки. — 1998. — **63**, № 2. — С. 248 – 259.

[5] *Reznykov I.I., Sushchansky V.I.* On the 3-state Mealy automata over an m-symbol alphabet of growth order $[n^{\log n/2\log m}]$ // Journal of Algebra. — 2006. — **304**, № 2. — P. 712 – 754.

FINITE STATE QUOTIENTS OF FREE PRODUCTS OF MONOGENIC SEMIGROUPS

Andriy OLIYNYK

Kyiv National Taras Shevchenko University

vul.Volodymyrska, 60, Kyiv 01601

Some proper quotients of free products of two copies of arbitrary finite monogenic semigroup are considered. Finite state representations of such semigroups are presented. Their growth is calculated.