ТИПИ ЦИКЛІВ КОМПОЗИЦІЙ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ІНТЕРВАЛУ

Сергій МЯСІН [1], *Володимир ФЕДОРЕНКО* [2], *Юлія ФЕДОРЕНКО* [1]

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601
e-mail: juliamfed@gmail.com
[2] Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601
e-mail: vfedor@imath.kiev.ua

Редакція отримала статтю 26 жовтня 2010 р.

Проведено порівняльний аналіз циклів динамічних систем, породжених композиціями двох неперервних відображень інтервалу в себе. Доведено, що множини типів циклів цих динамічних систем можуть суттєво відрізнятися, незважаючи на те, що множини періодів циклів систем співпадають.

1 Вступ

Топологічна динаміка одновимірних систем розвинена достатньо повно [1, 2], а теорія систем вищих порядків ще далека від свого завершення. Тому важливим є дослідження класів систем вищих порядків, які в тій чи іншій мірі редукуються до одновимірних. Один з таких класів n-вимірних динамічних систем породжує відображення $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

УДК 517.9, MSC 2000: 37E15

вигляду

$$F: \begin{cases} x_1 & \mapsto & f_1(x_{\pi(1)}), \\ ... & ... & .... \\ x_i & \mapsto & f_i(x_{\pi(i)}), \\ ... & ... & .... \\ x_n & \mapsto & f_n(x_{\pi(n)}), \end{cases} \tag{1}$$

де $(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, а π – циклічна перестановка довжини n.

n-а ітерація відображення F має вигляд

$$F^n: \begin{cases} x_1 & \mapsto & f_1(f_{\pi(1)}...f_{\pi^{n-2}(1)}(f_{\pi^{n-1}(1)}(x_1))...), \\ ... & ... & .... \\ x_i & \mapsto & f_i(f_{\pi(i)}...f_{\pi^{n-2}(i)}(f_{\pi^{n-1}(i)}(x_i))...), \\ ... & ... & .... \\ x_n & \mapsto & f_n(f_{\pi(n)}...f_{\pi^{n-2}(n)}(f_{\pi^{n-1}(n)}(x_n))...). \end{cases} \tag{2}$$

З (2) випливає, що відображення F^n розщеплюється на n незалежних одновимірних відображень. До кожного з них можна застосувати результати теорії одновимірних динамічних систем, які викладені, наприклад, в [1, 2]. Це дає можливість встановити багато аналогів відомих результатів одновимірної топологічної динаміки для відображень (1) [3 – 6].

В двовимірному випадку ($n = 2$) друга ітерація відображення (1) розщеплюється на два незалежних одновимірних відображення і має вигляд

$$\begin{cases} x_1 & \mapsto & f_1(f_2(x_1)), \\ x_2 & \mapsto & f_2(f_1(x_2)). \end{cases} \tag{3}$$

Робота присвячена порівняльному аналізу різних характеристик циклів одновимірних відображень $f_1(f_2)$ та $f_2(f_1)$. В цій постановці задачі природно припустити, що відображення f_1 та f_2 не комутують.

Відмітимо також, що відображення (1) знаходять широке застосування в різних галузях науки, наприклад, в економіці. Так, в 1838 році Курно (A. Cournot) запропонував модель конкурентної боротьби двох фірм, що продукують схожі товари на одному ринку [7], у вигляді наступної системи різницевих рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x_{i+1} & = & \sqrt{\dfrac{y_i}{a}} - y_i, \\ y_{i+1} & = & \sqrt{\dfrac{x_i}{b}} - x_i, \end{cases} \tag{4}$$

де $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ – відповідають прибутку фірм в момент часу $i \in \mathbb{Z}^+$. А в свою чергу система (4) породжує таку саму динамічну систему, що і відображення (1) при $n = 2$.

2 Цикли композицій двох відображень

Нехай $I = [0, 1]$ – інтервал прямої $\mathbb{R}^1$, $f, g \in C^0(I, I)$ – два неперервні відображення інтервалу I в себе; $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 1, 2, ...,$ f^0 – тотожне відображення.

Точка $\beta \in I$ називається періодичною, якщо існує натуральне число p таке, що $f^p(\beta) = \beta$, а найменше p при якому виконується ця рівність, називається періодом точки β. Точки $f^n(\beta)$, $n = 0, 1, ..., p-1$, утворюють цикл періоду p.

Розглянемо відображення $f \circ g$ і $g \circ f$. Очевидно, що

1) якщо відображення $f \circ g$ має періодичну точку β періоду p, то точка $g(\beta)$ є періодичною точкою періоду p відображення $g \circ f$,

2) якщо відображення $g \circ f$ має періодичну точку β' періоду p', то точка $f(\beta')$ є періодичною точкою періоду p' відображення $f \circ g$.

Звідси випливає, що *множини періодів циклів відображень $f \circ g$ і $g \circ f$ співпадають*.

Крім того, до відображень $f \circ g$ і $g \circ f$, з огляду на їх неперервність, може бути застосована теорема Шарковського [8].

Теорема Шарковського. *Якщо відображення з $C^0(I, I)$ має цикл періоду p, то воно має і цикл періоду p', де $p' \prec p$, а “ $\prec$ ” — наступний порядок в множині натуральних чисел*

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \ldots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

З цієї теореми і того, що множини періодів циклів відображень $f \circ g$ і $g \circ f$ співпадають, випливає повний опис множини періодів циклів цих відображень.

В одновимірній динаміці, крім класифікації циклів за періодами, використовується також більш детальна їх класифікація – класифікація за типами.

Цикл $B = \{\beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_p\}$ відображення f породжує циклічну перестановку π множини {1,2,...,p}: $\pi(i) = j$, тоді і тільки тоді, коли $f(\beta_i) = \beta_j,\ i, j \in \{1, ..., p\}$. Цю перестановку назвемо типом циклу B.

Для того, щоб порівняти множини циклів відображень $f \circ g$ і $g \circ f$, нагадаємо поняття мінімального циклу, тобто циклу, тип якого є мінімальною перестановкою.

Циклічні перестановки π_1 і π_2 довжини p назвемо лінійно еквівалентними, якщо $\pi_1(i) = p - \pi_2(p - i + 1) + 1,\ i = 1, 2, ..., p$.

Мінімальна перестановка довжини p з точністю до лінійно еквівалентної має вигляд [1]:

при $p = 1$, $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

при $p = 3$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

при $p = 2k + 1,\ k > 1$,

$$\pi_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k+1 & k+2 & ... & 2k & 2k+1 \\ k+1 & 2k+1 & 2k & ... & k+2 & k & ... & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

при $p = 2k,\ k \geq 1$, перестановки π мають властивість: множини $\{1, 2, ..., k\}$ і $\{k+1, k+2, ..., 2k\}$ інваріантні відносно π^2, а обмеження π^2 на кожну з них є мінімальною перестановкою.

Відомо [1], *що якщо відображення з $C^0(I, I)$ має цикл деякого періоду, то воно має і мінімальний цикл цього ж періоду.*

Звідси випливає, що множини мінімальних циклів відображень $f \circ g$ і $g \circ f$ співпадають. А чи співпадають множини всіх типів циклів цих відображень?

Теорема. *Існують такі відображення $f, g \in C^0(I, I)$, що одночасно виконуються наступні три властивості:*

1) $f \circ g$ і $g \circ f$ мають спільну злічену множину різних типів циклів;

2) $f \circ g$ має злічену множину різних типів циклів, а $g \circ f$ не має жодного типу циклу з цієї множини;

3) $g \circ f$ має злічену множину різних типів циклів, а $f \circ g$ не має жодного типу циклу з цієї множини.

Для доведення теореми розглянемо два конкретних відображення:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 1/2, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тоді $f \circ g$ і $g \circ f$ задаються наступними формулами

$$g \circ f = \begin{cases} 2x + 1/2, & 0 \le x \le 1/4, \\ -4x + 2, & 1/4 < x \le 1/2, \\ 4x - 2, & 1/2 < x \le 3/4, \\ -2x + 5/2, & 3/4 < x \le 1 \end{cases}$$

і

$$f \circ g = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 4x - 2, & 1/2 < x \le 3/4, \\ -4x + 4, & 3/4 < x \le 1. \end{cases}$$

Відображення $f \circ g$ і $g \circ f$ мають спільну злічену множину циклів мінімальних типів. Крім того, вони мають ще й такі типи циклів

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & i & ... & p-1 & p \\ 2 & ... & i+1 & ... & p & 1 \end{pmatrix},$$

де $p = 4, 5, ...$

Відображення $f \circ g$ має цикли типу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & p & p+1 & ... & 2p & 2p+1 & ... \\ 2p+q & 2p & ... & p+2 & p & ... & 1 & 2p+2q & ... \end{matrix} \tag{5}$$

$$\begin{matrix} ... & 2p+q & 2p+q+1 & ... & 2p+2q-1 & 2p+2q \\ ... & 2p+q+1 & 2p+q-1 & ... & 2p+1 & p+1 \end{pmatrix},$$

де $p, q = 3, 4, ...$, і, крім того, $f \circ g$ не має циклів типу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & ... & i & ... & p-2 & p-1 & p \\ 4 & p-1 & 1 & 2 & 3 & 5 & ... & i-1 & ... & p-3 & p & p-2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $p = 9, 10, ...$

І навпаки, відображення $g \circ f$ має цикл типу (6) і при цьому не має циклів типу (5).

3 Висновки

Множини типів циклів динамічних систем, що породжені композиціями двох неперервних одновимірних відображень, можуть суттєво відрізнятися, незважаючи на те, що множини періодів циклів цих систем співпадають.

[1] *Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V.* Dynamics of One Dimensional Maps. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1997.

[2] *Block L., Coppel W.A.* Dynamics in One Dimension. – Berlin: Springer, 1992.

[3] *Bischi G.I., Mammana C., Gardini L.* Multistability and cyclic attractors in duopoly games // Chaos Solitons Fractals. – 2000. – V. 11, № 4. – P. 543 — 564.

[4] *Balibrea F., Linero A.* Periodic structure of σ-permutations maps on I^n // Aequationes Math. – 2001. – V. 62, № 3. – P. 265 — 279.

[5] *Canovas J. S., Linero A.* Topological dynamic classification of duopoly games // Chaos Solitons Fractals. – 2001. – V. 12, № 7. – P. 1259 — 1266.

[6] *Canovas J. S., Linero A.* Non-chaotic antitriangular maps // Appl. Gen. Topol. – 2005. – V. 6, № 2. – P. 171 — 183.

[7] *Puu T.* Nonlinear economic dynamics. – Berlin: Springer, 1997.

[8] *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. матем. журн. – 1964. – Т. 16, № 1. – С. 61 – 71.

TYPES OF CYCLES OF COMPOSITIONS OF CONTINUOUS INTERVAL MAPS

Sergii MYASIN [1], *Volodymyr FEDORENKO* [2], *Yuliya FEDORENKO* [1]

[1] Kyiv National Taras Shevchenko University,
64, Volodymyrska str., Kyiv 01601
e-mail: juliamfed@gmail.com

[2] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
3, Tereschenkivska str., Kyiv 01601
e-mail: vfedor@imath.kiev.ua

A comparative analysis of cycles of dynamical systems generated by composition of two continuous maps of an interval into itself is done. It is proved that the sets of types of cycles of such dynamical systems can vary significantly, despite of fact that sets of periods of cycles of the systems coincide.