РОЗРИВИ K_hC-ФУНКЦІЙ НА ПІДМНОЖИНАХ ДОБУТКУ

©2010 р. Олександр МАСЛЮЧЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 15 жовтня 2010 р.

В даній роботі для довільних топологічних просторів X та Y і підмножин $E, B \subseteq Y$ ми розглядаємо гру Шоке $\mathrm{Ch}(X)$ в комбінації з грою $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$, яка є аналогом гри Бузіада $\mathrm{Bou}_{E^2}(Y^2, \Delta_B, \Delta_X)$. Ми встановлюємо, що якщо $F \subseteq X \times Y$ є компактозначним неперервним зверху многозначним відображенням, причому $F(X) \subseteq B$ і одна з ігор $\mathrm{Ch}(X)$ чи $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$ є α-сприятливою а інша – β-несприятливою, то для довільного метризовного простору Z і $K_h^E C$-функцій $f : X \times Y \to Z$ проекція на X перетину F з множиною точок розриву функції f є множиною першої категорії.

1 Вступ

В роботі [1] доведено, що для берівського простору X, компактного W-простору Y і метризовного простору Z у довільної нарізно неперервної функція $f : X \times Y \to Z$ множина $D_b(f) = \{x \in X : (x, b) \in D(f)\}$ є множиною першої категорії для кожного $b \in Y$. Аналогічний результат встановлюється і для α-сприятливого простору X і компактного w-простору Y.

В [2] замість класичної гри Ґрюнгейджа $\mathrm{Gr}(X, a)$, α-сприятливість чи β-несприятливість відносно якої для кожного $a \in X$ означає належність

УДК 517.51, MSC 2000: 54C20, 54C05

простору X до класу W-просторів, чи, відповідно, w-просторів, розглядається її слабший аналог $\mathrm{Gr}_E(X,a)$. Крім того, там розглядається гра $\mathrm{ChGr}_E(X\times Y,b)$, яка є гібридом гри Шоке $\mathrm{Ch}(X)$ і слабкої гри Ґрюнгейджа $\mathrm{Gr}_E(Y,b)$, а також, доводиться, що β-несприятливість відносно гри $\mathrm{ChGr}_E(X\times Y,b)$ гарантує, що множина $D_b(f)$ першої категорії для довільної K_h^EC-функції $f : X\times Y\to Z$. Зокрема, це буде так, якщо одна з ігор $\mathrm{Ch}(X)$ чи $\mathrm{Gr}_E(Y,b)$ є α-сприятливою, а інша – β-несприятливою. Тобто в [2] узагальнюється результат [1].

Перш ніж рухатись далі, нагадаємо деякі означення.

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Функція $f : X\to Y$ називається *квазінеперервною*, якщо для довільної точки $x\in X$ і довільних околів U точки x і V точки $f(x)$ існує відкрита непорожня множина $U_1\subseteq U$, така, що $f(U_1)\subseteq V$.

Нехай функція $f : X\times Y\to Z$ і $E\subseteq Y$. Для точок $x\in X$ і $y\in Y$ покладаємо, як звичайно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Функція f називається *KC-функцією* /*$\overline{K}C$-функцією*/, якщо для довільного $x\in X$ і довільного $y\in Y$ /довільного y з деякої всюди щільної підмножини $B\subseteq Y$ / функція $f_x : Y\to Z$ неперервна, а функція $f_y : Y\to Z$ квазінеперервна.

Казатимемо, що f є *K_h^EC-функцією*, якщо для довільних точок $x\in X$ і $y\in Y$ і довільних околів U точки x, V точки y і W точки $f(x,y)$ існує відкрита непорожня множина $U_1\subseteq U$ і точка $y_1\in V\cap E$ такі, що $f_{y_1}(U_1)\subseteq W$ і, крім того, функція f^x неперервна.

K_h^XC-функції називаються просто *K_hC-функціями*.

Ясно, що кожна KC-функція є $\overline{K}C$-функцією. Крім того, кожна $\overline{K}C$-функція є K_h^EC-функцією для деякої всюди щільної підмножини E в Y. Зокрема, кожна $\overline{K}C$-функція є K_hC-функцією.

2 Гра Ґрюнгейджа та інші нескінченні ігри

У *грі Шоке* $\mathrm{Ch}(X)$ на топологічному просторі X гравці α та β по черзі (починає α) вибирають відкриті непорожні підмножини U_n та V_n простору X, так, щоб $U_1 = X$ і $U_{n+1}\subseteq V_n\subseteq U_n$ для кожного n. Якщо гра $\mathrm{Ch}(X)$ α-сприятлива /β-несприятлива/ (тобто, якщо гравець α має /β не має/ виграшну стратегію у цій грі), то простір X називається *α-сприятливим* (або *простором Шоке*) /чи, відповідно *β-несприятливим*/. Як відомо β-несприятливі простори – це, в точності, берівські простори [4].

Нехай X – топологічний простір і $A, E \subseteq X$, причому $A \subseteq \overline{E}$. *Грою Ґрюнгейджа* називається гра $\mathrm{Gr}_E(X, A)$ двох гравців α і β, в якій α вибирає відкриті множини $U_n \supseteq A$, а β – точки $x_n \in U_n$. Гравці α і β ходять по черзі (починає α) так, щоб $U_{n+1} \subseteq U_n$ для кожного n. Гравець α виграє, якщо послідовність $a_n \to A$, тобто для кожного околу U множини A існує такий номер $n_0 \in \mathbb{N}$, що $x_n \in U$ при $n \geq n_0$. Зауважимо, що в класичній грі Ґрюнгейджа $\mathrm{Gr}(X, A)$ (див. [3]) множина $E = X$.

У *грі Бузіада* $\mathrm{Bou}_E(X, A)$ правила гри такі ж, як і в грі Ґрюнгейджа $\mathrm{Gr}_E(X, A)$, тільки умова виграшу гравця α полягає в тому, що в кожному околі U множини A міститься нескінченне число елементів послідовності (x_n). Нам також буде потрібна гра $\mathrm{Bou}_E(X, A, A')$, де $A' \subseteq X$, в якій умова виграшу гравця α полягає в тому, що в кожному околі U множини A' міститься нескінченне число елементів x_n.

Зауважимо, що для компактного простору X і замкнених множин A і A' умова виграшу α у грі Ґрюнгейджа рівносильна тому, що всі граничні точки (x_n) попадають в A, а в грі Бузіада умова виграшу α рівносильна тому, що послідовність (x_n) має граничну точку, що належить до A (чи, відповідно, до A').

Розглянемо гру $\mathrm{Ma}_E(X, A)$ двох гравців α та β (починає α), в якій α ходить відкритими непорожніми множинами U_n, а β — парами точок $(a_n, x_n) \in A \times E$, так, що $U_1 = X$, $a_n \in U_{n+1} \subseteq U_n$ і $x_n \in U_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Гравець α виграє, якщо для деякого $x_\infty \in X$ точка (x_∞, x_∞) є граничною точкою послідовності $\big((x_n, x_{n+1})\big)_{n=1}^{\infty}$ в X^2.

Нам буде потрібен також сильніший аналог попередньої гри – гра $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$. В цій грі правила такі ж, як і в грі $\mathrm{Ma}_E(X, A)$, але умова виграшу гравця α полягає в тому, що послідовність (x_n) збіжна в X.

Гра $\mathrm{Ma}_E(X, A)$ має спільні риси з грою $\mathrm{Bou}_{E^2}(X^2, \Delta_A, \Delta_X)$, де $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$. А саме, виглядає на те, що якщо гравець α має /β не має/ виграшну стратегію у грі $\mathrm{Bou}_{E^2}(X^2, \Delta_A, \Delta_X)$, то він має /не має/ виграшну стратегію і у грі $\mathrm{Ma}_E(X, A)$. Проте це нам не знадобиться в подальшому, і тому ми не будемо встановлювати справедливість цієї гіпотези.

3 Σ-добутки і гра $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$

Топологічний простір називатимемо *простором Корсона* /*простором Валдівіа*/, якщо він гомеоморфний деякому підпростору $X \subseteq \mathbb{R}^T$, для якого множина $\Sigma(X) = \{x \in X : |\mathrm{supp} x| \le \aleph_0\}$ рівна X /щільна в X/, де $\mathrm{supp} x = \{t \in T : x(t) \ne 0\}$ – *носій* функції x.

Простір Валдівіа чи Корсона називатимемо *секвенціально повним*, якщо відповідний простір X можна вибирати секвенціально замкненим в $\mathbb{R}^T$ (тобто X, разом з кожною збіжною послідовністю містить її границю).

Ясно, що зліченно компактні простори Корсона чи Валдівіа автоматично є секвенціально повними.

Нехай $(X_t)_{t\in T}$ – деяка сім'я множин. Для елементів $x, a \in \prod\limits_{t\in T} X_t$ і множини $X \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ позначимо

$$\mathrm{supp}_a(x) = \big\{t \in T : x(t) \ne a(t)\big\} \text{ і } \Sigma_a(X) = \big\{x \in X : |\mathrm{supp}_a x| \le \aleph_0\big\}.$$

Твердження 3.1. *Нехай X – секвенціально замкнений підпростір добутку $P = \prod\limits_{t\in T} X_t$ сім'ї повнометризовних просторів X_t, $a \in P$, $E = \Sigma_a(X)$ і $A \subseteq X \cap \overline{E}$. Тоді гра $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$, а значить, і гра $\mathrm{Ma}_E(X, A)$, є α-сприятливою.*

Доведення. Для кожного $t \in T$ візьмемо повну метрику $|\cdot - \cdot|_t$, що породжує топологію X_t. Визначимо стратегію σ для гравця α у грі $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$. Вважатимемо, що у цій грі α грає множинами U_n, а β – парами точок (a_n, x_n). Оскільки $x_n \in E$, то $|\mathrm{supp}_a x_n| \le \aleph_0$. Занумеруємо $\mathrm{supp}_a x_n = \big\{t_{n,k} : k \in \mathbb{N}\big\}$. Стратегія σ для гравця α визначається наступним чином: $U_1 = X$ і для $n > 1$

$$U_n = \Big\{x \in U_{n-1} : |x(t_{j,k}) - a_{n-1}(t_{j,k})|_{t_{j,k}} < \tfrac{1}{n} \text{ при } j, k < n\Big\}.$$

Покажемо, що стратегія σ виграшна для α. Нехай в партії $\pi = [U_n, (a_n, x_n)]_{n=1}^{\infty}$ гравець α грає згідно зі своєю стратегією σ. Покладемо $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{supp}_a x_n$. Оскільки $x_m, x_n \in U_n$ при $m \ge n > 1$, то

$$|x_m(t_{j,k}) - a_{n-1}(t_{j,k})|_{t_{j,k}} < \tfrac{1}{n} \text{ і } |x_n(t_{j,k}) - a_{n-1}(t_{j,k})|_{t_{j,k}} < \tfrac{1}{n} \text{ при } j, k < n.$$

Тому для довільних $m \ge n > 1$

$$|x_m(t_{j,k}) - x_n(t_{j,k})|_{t_{j,k}} < \tfrac{2}{n} \text{ при } j, k < n.$$

Таким чином, для довільного $t = t_{k,j} \in S$ матимемо, що

$$|x_m(t) - x_n(t)|_t \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Крім того $x_n(t) = a(t)$ при $t \in T \setminus S$. Значить, для кожного $t \in S$ послідовність $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в повному метричному просторі X_t, а тому збіжна.

Покладемо $x_\infty(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Оскільки X секвенціально замкнений в $\mathbb{R}^T$, то $x_\infty \in X$. Отже, $x_n \to x_\infty$ в X. Таким чином, в партії π у грі $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$ виграє α. $\square$

Наслідок 3.2. *Нехай X секвенціально повний простір Корсона і $E, A \subseteq X$, причому $E \subseteq \overline{A}$. Тоді гра $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$, а тому, і гра $\mathrm{Ma}_E(X, A)$, є α-сприятливою.*

Наслідок 3.3. *Нехай X – секвенціально повний простір Валдівіа. Тоді існує така всюди щільна в X множина E, що для довільного $A \subseteq X$ гра $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$, а значить, і гра $\mathrm{Ma}_E(X, A)$, є α-сприятливою.*

Наступна теорема в ідейному плані перегукується з твердженням 3.1.

Теорема 3.4. *Нехай X – секвенціально замкнений підпростір добутку $P = \prod\limits_{t\in T} X_t$ сім'ї топологічних просторів X_t, $a \in P$, $E = \Sigma_a(X)$, $A \subseteq X \cap \overline{E}$ і $A_t = \mathrm{pr}_t(A)$ та $E_t = \mathrm{pr}_t(E)$ для $t \in T$. Тоді якщо ігри $\mathrm{Ma}_{E_t}^+(X_t, A_t)$ α-сприятливі для кожного $t \in T$, то гра $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$ є α-сприятливою.*

Доведення. Для кожного $t \in T$ розглянемо виграшну стратегію σ_t у грі $\mathrm{Ma}_{E_t}^+(X_t, A_t)$. Визначимо стратегію σ для гравця α у грі $\mathrm{Ma}_E^+(X, A)$. Вважатимемо, що у цій грі α грає множинами U_n, а β – парами точок (a_n, x_n). Оскільки $x_n \in E$, то $|\,\mathrm{supp}_a x_n| \le \aleph_0$. Занумеруємо $\mathrm{supp}_a x_n = \big\{t_{n,k} : k \in \mathbb{N}\big\}$. Стратегія σ для гравця α визначається наступним чином: $U_1 = X$ і для $n > 1$

$$U_n = \Big\{x \in U_{n-1} : x(t_{j,k}) \in \sigma_{t_{j,k}}\Big(\big(a_{i+j+k}(t_{j,k}), x_{i+j+k}(t_{j,k})\big)_{i=1}^{n-j-k-1}\Big)$$
$$\text{для довільних } j, k \in \mathbb{N} \text{ таких, що } j + k < n\Big\}$$

(тут мається на увазі, що при $j + k = n - 1$ аргументом $\sigma_{t_{j,k}}$ служить порожній набір $\varnothing$).

Покажемо, що стратегія σ виграшна для α. Нехай в партії $\pi = [U_n, (a_n, x_n)]_{n=1}^{\infty}$ гравець α грає згідно зі своєю стратегією σ. Покладемо $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{supp}_a x_n$. По-перше, зауважимо, що $x_n(t) = a(t)$ при

$t \in T \setminus S$. Візьмемо тепер деяке $t = t_{j,k} \in S$ і покладемо $\xi_m = x_{m+j+k}(t)$ і $\alpha_m = a_{m+j+k}(t)$ для довільного $m \in \mathbb{N}$. Але $x_{m+j+k} \in U_{m+j+k}$. Тому, для кожного $m \in \mathbb{N}$,

$$\xi_m = x_{m+j+k}(t) \in \sigma_t\Big(\big(a_{i+j+k}(t), x_{i+j+k}(t)\big)_{i=1}^{m-1}\Big) = \sigma_t\Big(\big(\alpha_i, \xi_i\big)_{i=1}^{m-1}\Big).$$

Аналогічно, $\alpha_m \in \sigma_t\Big(\big(\alpha_i, \xi_i\big)_{i=1}^{m-1}\Big)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Але стратегія σ_t виграшна для α у грі $\mathrm{Ma}_{E_t}^{+}(X_t, A_t)$. Тому (ξ_m) збіжна в X_t. Таким чином, послідовність $\big(x_n(t)\big)_{n=1}^{\infty}$ збіжна в X_t для кожного $t \in T$. А тому (x_n) збіжна в X. $\square$

4 Мінімальні відображення

Нехай X та Y – топологічні простори. Під многозначним відображенням розумітимемо деяку підмножину $F \subseteq X \times Y$. При цьому для довільного $x \in X$ множину $F(x) = \{y \in Y : (x, y) \in F\}$ називаємо *образом елемента* x і для довільної множини $A \subseteq X$ множину $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$ *образом множини* A. *Областю визначення* F називається множина $\mathrm{dom}F = \{x \in X : F(x) \neq \varnothing\}$, а *областю значень* – $\mathrm{im}F = F(X) = F(\mathrm{dom}F)$. Кажуть, що многозначне відображення F *діє з* X *в* Y (при цьому пишуть $F : X \to Y$), якщо $\mathrm{dom}F = X$, а $\mathrm{im}F \subseteq Y$.

Нехай $F : X \to Y$ – деяке многозначне відображення. F називається *компактнозначним*, якщо множина $F(x)$ компактна для кожного $x \in X$. Кажуть, що F *неперервне зверху*, якщо для довільного $x \in X$ і довільного околу V множини $F(x)$ існує такий окіл U точки x, що $F(U) \subseteq V$.

Добре відомою є наступна характеризація компактнозначних неперервних зверху відображень (див. наприклад, [5, Proposition 9.12])

Теорема 4.1. *Нехай X та Y – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \to Y$ буде компактнозначним і неперервним зверху тоді і тільки тоді, коли для довільного $x \in X$ і довільних напрямленостей $(x_m)_{m \in M}$ в X і $(y_m)_{m \in M}$ в Y з того, що $x_m \to x$ при $m \in M$ і $y_m \in F(x_m)$ для кожного $m \in M$ випливає, що напрямленість (y_m) має граничну точку з $F(x)$.*

Звідси негайно випливає наступний факт.

Наслідок 4.2. *Нехай X та Y топологічні простори і $E \subseteq F \subseteq X \times Y$, причому E замкнена в F. Тоді, якщо F є компактнозначним і неперервним зверху, то і E є таким же.*

Крім того, ми можемо одержати одне узагальнення теореми Куратовського про замкненість проекції [6].

Твердження 4.3. *Нехай X та Y – топологічні простори і $F : X \to Y$ – компактнозначне і неперервне зверху. Тоді для довільної замкненої в F множини E її проекція $\mathrm{pr}_X(E)$ замкнена в X.*

Доведення. Візьмемо $x \in \overline{\mathrm{pr}_X(E)}$ і виберемо напрямленість $(x_m)_{m\in M}$ таку, що $x_m \to x$ і $x_m \in \mathrm{pr}_X(E)$. Тоді для кожного $m \in M$ існує $y_m \in Y$ таке, що $(x_m, y_m) \in E$. Оскільки $E \subseteq F$, то $y_m \in F(x_m)$ для кожного m. Отже, за теоремою 4.1 маємо, що існує гранична точка $y \in F(x)$ напрямленості (y_m). Тоді існує піднапрямленість $(y_{m_k})_{k\in K}$, така, що $y_{m_k} \to y$. далі, оскільки E замкнена в F і $E \ni (x_{m_k}, y_{m_k}) \to (x, y) \in F$, то $(x, y) \in E$. А тому $x \in \mathrm{pr}_X(E)$. Таким чином, $\mathrm{pr}_X(E) = \overline{\mathrm{pr}_X(E)}$. □

Многозначне відображення Φ називається *селекцією* відображення F, якщо $\Phi \subseteq F$ і $\mathrm{dom}\Phi = \mathrm{dom}F$. Казатимемо, що Φ – мінімальна замкнена селекція F, якщо Φ – селекція F, Φ замкнена в F і для довільної замкненої в F селекції Ψ з того, що $\Psi \subseteq \Phi$ випливає, що $\Psi = \Phi$.

З леми Куратовського-Цорна негайно випливає наступний факт.

Твердження 4.4. *Кожне компактнозначне відображення має мінімальну замкнену селекцію.*

Многозначне відображення $\Phi : X \to Y$ називається *мінімальним*, якщо для довільних відкритих множин $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ таких, що $\Phi(U) \cap V \neq \varnothing$ існує відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$ така, що $\Phi(U_1) \subseteq V$. Це означення інспіроване наступним фактом.

Твердження 4.5. *Нехай X та Y – топологічні простори, $F : X \to Y$ компактнозначне неперервне зверху і Φ мінімальна замкнена селекція F. Тоді Φ – мінімальне.*

Доведення. Припустимо, що Φ не є мінімальним. Тоді існують такі відкриті множини $U_0 \subseteq X$ і $V_0 \subseteq Y$, що $\Phi(U_0) \cap V_0 \neq \varnothing$ і $\Phi(U) \nsubseteq V_0$ для довільної відкритої непорожньої множини $U \subseteq U_0$.

Покладемо $\Psi = \Phi \setminus (U_0 \times V_0)$. Тоді для довільної відкритої непорожньої множини $U \subseteq U_0$ існує точка x_U, така, що $\Phi(x_U) \nsubseteq V_0$, а значить, $\Psi(x_U) = \Phi(x_U) \setminus V_0 \neq \varnothing$. Тому $\mathrm{dom}\Psi$ щільна в X. Але Ψ замкнена а Φ, а значить і в F. Тому з твердження 4.3 випливає, що $\mathrm{dom}\Psi = \mathrm{pr}_X\Psi$ замкнена в X. Таким чином $\mathrm{dom}\Psi = X$. Значить, Ψ – замкнена селекція F.

Врахувавши, що $F(U_0) \subseteq V_0$, матимемо, що $(U_0 \times V_0) \cap F \neq \varnothing$. А значить, $\Psi \neq \Phi$, що неможливо, адже Φ – мінімальна селекція F. $\square$

5 Основний результат

Теорема 5.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, $E, B \subseteq Y$, $F \subseteq X \times B$ – компактнозначне неперервне зверху і $f : X \times Y \to Z$ – $K_h^E C$-функція. Тоді, якщо одна з ігор* $\mathrm{Ch}(X)$ *і* $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$ *є α-сприятливою, а інша – β-несприятливою, то множина $D_F(f) = \mathrm{pr}_X(F \cap D(f))$ першої категорії.*

Доведення. Припустимо, що множина $D_F(f)$ другої категорії. Оскільки $D(f) = \omega_f^{-1}((0, +\infty])$, де ω_f – коливання функції f, то покладаючи $F_\varepsilon = F \cap \omega_f^{-1}([7\varepsilon, +\infty])$, матимемо, що $F = \bigcup\limits_{\varepsilon>0} F_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$, множина $\mathrm{pr}_X(F_\varepsilon)$ не є ніде не щільною, а тому щільна в деякій відкритій непорожній множині $G \subseteq X$.

Покладемо $D = G \cap \mathrm{pr}_X(F_\varepsilon)$. Ясно, що $G \subseteq \overline{D}$. За твердженням 4.4 існує мінімальна замкнена селекція Φ відображення F_ε. Тоді, зокрема, $\mathrm{dom}\Phi = \mathrm{dom}F_\varepsilon = \mathrm{pr}_X(F_\varepsilon) \supseteq D$.

Розглянемо партію $\pi_X = [U_n, V_n]_{n=1}^{\infty}$ в грі $\mathrm{Ch}(X)$ і партію $\pi_Y = [W_n, (b_n, y_n)]_{n=1}^{\infty}$ у грі $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$, причому партії π_X і π_Y проходять паралельно і ходи гравців в цих партіях пов'язані деякими співвідношеннями вигляду $b_n = b_n(U_n)$, $y_n = y_n(U_n)$, $V_n = V_n(U_n, W_{n+1})$, причому так, що

$$|f(x, y_n) - f(x, y_{n+1})|_Z > \varepsilon \text{ для довільних } n \in \mathbb{N} \text{ і } x \in V_n. \tag{1}$$

Опишемо ці співвідношення.

Нагадаємо, що за правилами ігор $\mathrm{Ch}(X)$ і $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$ маємо, що $U_1 = X$ і $W_1 = Y$. Візьмемо деяке $p_1 \in G \times Y \subseteq U_1 \times W_1$ і покладемо $z_1 = f(p_1)$. Оскільки f є $K_h^E C$-функцією, то існує відкрита непорожня

множина $G_1 = G_1(U_1) \subseteq G \subseteq X = U_1$ і точка $y_1 = y_1(U_1) \in E \cap W_1$ такі, що
$$|f(x, y_1) - z_1|_Z < \varepsilon \text{ при } x \in G_1.$$
Далі візьмемо $a_1 = a_1(U_1) \in G_1 \cap D$ і $b_1 \in \Phi(a_1)$ За твердженням 4.5 многозначне відображення Φ мінімальне. Тому, оскільки $W_2 \ni b_1$, то існує відкрита непорожня множина $V_1 = V_1(U_1, W_2) \subseteq G_1$, така, що $\Phi(V_1) \subseteq W_2$.

Візьмемо тепер $n > 1$ і припустимо, що $V_k = V_k(U_k, W_{k+1})$, $b_k = b_k(U_k)$ і $y_k = y_k(U_k)$, а також ще деякі $z_k = z_k(U_k) \in Z$ уже визначені при $k < n$, причому так, що для довільного $k < n$ виконуються умови
$$|f(x, y_k) - z_k|_Z < \varepsilon \text{ при } x \in V_k, \tag{2}$$
$$|z_k - z_{k-1}|_Z > 3\varepsilon \text{ якщо } k > 1, \tag{3}$$
$$\Phi(V_k) \subseteq W_{k+1}. \tag{4}$$

Визначимо $V_n = V_n(U_n, W_{n+1})$, $b_n = b_n(U_n)$, $y_n = y_n(U_n)$ і $z_n = z_n(U_n)$, зі збереженням умов (2) – (4). Для цього візьмемо деяку точку $a_n \in U_n \cap D$ і точку $b_n \in \Phi(a_n)$. Оскільки $V_n \subseteq U_{n-1}$, то за рахунок (4) матимемо, що $b_n \in \Phi(U_n) \subseteq \Phi(V_{n-1}) \subseteq W_n$. Але $(a_n, b_n) \in \Phi \subseteq F_\varepsilon$. Отже, $\omega_f(U_n \times W_n) \geq \omega_f(a_n, b_n) \geq 7\varepsilon > 6\varepsilon$. Тоді існує точка $p_n \in U_n \times W_n$, така, що
$$|f(p_n) - z_{n-1}|_Z > 3\varepsilon,$$
Покладемо $z_n = f(p_n)$. Тоді (3) виконується з $k = n$. Далі, за рахунок того, що f є $K_h^E C$-функцією виберемо точку $y_n \in W_n$ і відкриту непорожню множину $G_n \subseteq U_n$, так, щоб
$$|f(x, y_n) - z_n|_Z < \varepsilon \text{ при } x \in G_n.$$
За твердженням 4.5 многозначне відображення Φ мінімальне. Тому, оскільки $\Phi(G_n) \cap W_{n+1} \ni b_n$, то існує відкрита непорожня множина $V_n \subseteq G_n$, така, що $\Phi(V_n) \subseteq W_{n+1}$. Ясно, що тоді властивості (2) і (4) виконуються з $k = n$.

Зауважимо, що з (2) і (3) очевидним чином випливає (1). Таким чином, залежності $V_n = V_n(U_n, W_{n+1})$, $b_n = b_n(U_n)$ і $y_n = y_n(U_n)$ повністю описані.

Припустимо спочатку, що існує виграшна стратегія σ_Y для гравця α у грі $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$. Тоді покладаючи у попередніх співвідношеннях $W_{n+1} = \sigma_Y\big((b_k, y_k)_{k \leq n}\big)$, одержимо деяку стратегію для гравця β у грі

$\mathrm{Ch}(X)$, яка не може бути виграшною, адже в цьому випадку гра $\mathrm{Ch}(X)$ є β-несприятливою.

Подібним чином діємо у випадку, коли існує виграшна стратегія σ_X для гравця α у грі $\mathrm{Ch}(X)$. Покладаючи $U_n = \sigma_X\big((V_k)_{k<n}\big)$, і враховуючи, що $V_n = V_n(U_n, W_{n+1})$, будемо мати $U_n = U_n\big((W_k)_{k\le n}\big)$, а значить, $b_n = b_n\big((W_k)_{k\le n}\big)$, $y_n = y_n\big((W_k)_{k\le n}\big)$. Таким чином, отримується деяка стратегія для гравця β у грі $\mathrm{Ma}_E(Y,B)$, яка знову ж таки не може бути виграшною, адже в цьому випадку гра $\mathrm{Ma}_E(Y,B)$ є β-несприятливою.

Отже, так чи інакше, існують партії $\pi_X = [U_n, V_n]_{n=1}^{\infty}$ в грі $\mathrm{Ch}(X)$ і $\pi_Y = [W_n,(b_n,y_n)]_{n=1}^{\infty}$ у грі $\mathrm{Ma}_E(Y,B)$, для яких виконуються описані вище співвідношення $V_n = V_n(U_n, W_{n+1})$, $b_n = b_n(U_n)$, $y_n = y_n(U_n)$ так, що для кожного $n > 1$ виконується нерівність (1) і в кожній з цих партій виграє гравець α. Тоді існують точки $u \in X$ і $v \in Y$, а також деяка напрямленість $(n_m)_{m\in M}$ в $\mathbb{N}$ такі, що

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{і} \quad v = \lim_{m\in M} y_{n_m} = \lim_{m\in M} y_{n_m+1}.$$

Позначимо $w = f(u,v)$ і $w_n = f(u,y_n)$. Оскільки f неперервна відносно другої змінної, то

$$w = \lim_{m\in M} w_{n_m} = \lim_{m\in M} w_{n_m+1}.$$

Але з іншого боку $u \in V_n$ для кожного n. Тому з (1) одержуємо, що

$$|w_{n_m} - w_{n_m+1}|_Z = |f(u,y_{n_m}) - f(u,y_{n_m+1})|_Z > \varepsilon$$

для кожного n. Перейшовши тут до границі по $m \in M$ матимемо, що $0 = |w-w|_Z \ge \varepsilon$, а це не можливо.

Таким чином, наше початкове припущення не вірне і множина $D_F(f)$ першої категорії.

$\square$

6 Висновки

В даній роботі для довільних топологічних просторів X та Y і підмножин $E, B \subseteq Y$ розглянуто гру Шоке $\mathrm{Ch}(X)$ в комбінації з грою $\mathrm{Ma}_E(Y,B)$, яка є аналогом гри Бузіада $\mathrm{Bou}_{E^2}(Y^2, \Delta_B, \Delta_X)$. Встановлено, що якщо $F \subseteq X \times Y$ є компактозначним неперервним зверху многозначним відображенням, причому $F(X) \subseteq B$ і одна з ігор $\mathrm{Ch}(X)$ чи $\mathrm{Ma}_E(Y,B)$ є

α-сприятливою а інша – β-несприятливою, то для довільного метризовного простору Z і $K_h^E C$-функцій $f : X \times Y \to Z$ проекція на X перетину F з множиною точок розриву функції f є множиною першої категорії.

[1] Mirmostofaee A. K. Point of joint continuity of separately continuous mappings // (preprint)

[2] Маслюченко О. Гра Ґрюнгейджа та неперервність $K_h C$-функцій на горизонталях // Науковий вісник Чернівецького університету, вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 58 - 61.

[3] Gruenhage G. Covering properties on $X^2 \setminus \Delta$, W-sets and compact subsets of Σ-products // Topology Appl. – 1984. – **17**. – P.287-304.

[4] Saint-Raymond J. Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **87,** №4. – P.409-504.

[5] Hu S., Papageorion N. S. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I: Theory. – Kluwer Academic Publishers, 1997. – 969 p.

[6] Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752с.

THE POINTS OF DISCONTINUITY OF $K_h C$-FUNCTIONS ON SUBSETS OF THE PRODUCT

Oleksandr MASLYUCHENKO

Chernivtsi National Yuriy Fed'kovych University

2, Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012

In this paper for any topological spaces X and Y and subsets $E, B \subseteq Y$ we consider the Choquet game $\mathrm{Ch}(X)$ and a game $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$, which is analogue of the Bouziad game $\mathrm{Bou}_{E^2}(Y^2, \Delta_B, \Delta_X)$. We obtain that for any upper semicontinuous compact-valued mapping $F \subseteq X \times Y$ such that $F(X) \subseteq B$ if one of the games $\mathrm{Ch}(X)$ and $\mathrm{Ma}_E(Y, B)$ is α-favourable and other is β-unfavourable then for any metrizable space Z and a $K_h^E C$-function $f : X \times Y \to Z$ the projection on X of the intersection of F and the discontinuity point set of f is meager.