ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНИХ ДВОСКЛАДОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

 Іван КОНЕТ

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
вул. Огієнка, 61, Кам'янець-Подільський 32300

Редакція отримала статтю 12 вересня 2010 р.

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових циліндричних областях.

1 Вступ

Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях

УДК 519.21; MSC 2000: 35L20, 35A22

(однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1-5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних сердовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6-9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11-14].

У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач для необмежених двоскладових циліндричних областей.

2 Постановка задачі

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині $D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0, (r, \varphi) \in \Omega_2 = \langle a; b\rangle \times [0, 2\pi); z \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \equiv I_1 \cup I_2\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad (1)$$

де $z \in I_j$, $j = 1, 2$, з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z), \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega_j(r, \varphi, z);\ z \in I_j,\ j = 1, 2, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial z^k}\right|_{z=-\infty}=0,\ \left.\frac{\partial^k u_2}{\partial z^k}\right|_{z=+\infty}=0,\ k=0,1, \tag{3}$$

умовами спряження [14]

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^1\right)u_1-\left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^1\right)u_2\right]\right|_{z=0}=0,\ j=1,2, \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі проміжку $<a;b>$, де a_{rj}, a_{zj}, χ_j, α_{jk}^1, β_{jk}^1 – деякі невід'ємні сталі; $c_{11}\equiv\alpha_{21}^1\beta_{11}^1-\alpha_{11}^1\beta_{21}^1\neq 0$, $c_{21}\equiv\alpha_{22}^1\beta_{12}^1-\alpha_{12}^1\beta_{22}^1\neq 0$; $f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z)\}$, $g(r,\varphi,z)=\{g_1(r,\varphi,z),g_2(r,\varphi,z)\}$, $\omega(r,\varphi,z)=\{\omega_1(r,\varphi,z),\omega_2(r,\varphi,z)\}$ – задані обмежені неперервні функції;
$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z)\}$ – шукана функція.

3 Основна частина

Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури проміжку $\langle a;b\rangle$.

1. $\langle a;b\rangle\equiv(0;+\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що виконуються крайові умови

$$u_j|_{r=0}=0,\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial r}\right|_{r=+\infty}=0,\ z\in I_j,\ j=1,2. \tag{5}$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1) – (5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [15, 16, 14].

До задачі (1) – (5) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m[g(\varphi)]=\int\limits_0^{2\pi}g(\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi\equiv g_m,\ i=\sqrt{-1}, \tag{6}$$

$$F_m^{-1}[g_m]=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m e^{im\varphi}\right)\equiv g(\varphi), \tag{7}$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right] = -m^2F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2g_m, \tag{8}$$

де Re $(\cdots)$ – дійсна частина виразу $(\cdots)$ щодо φ; $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_k = 2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Інтегральний оператор Фур'є F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1) – (5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, z) : t > 0; r \in (0; +\infty); z \in I_1 \cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm} + \chi_j^2 u_{jm} = f_{jm}(t, r, z), \tag{9}$$

де $z \in I_j$, $j = 1, 2$, з початковими умовами

$$u_{jm}|_{t=0} = g_{jm}(r, z),\ \left.\frac{\partial u_{jm}}{\partial t}\right|_{t=0} = \omega_{jm}(r, z),\ z \in I_j,\ j = 1, 2, \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^k u_{1m}}{\partial z^k}\right|_{z=-\infty} = 0,\ \left.\frac{\partial^k u_{2m}}{\partial z^k}\right|_{z=+\infty} = 0,\ k = 0, 1, \tag{11}$$

$$u_{jm}|_{r=0} = 0;\ \left.\frac{\partial u_{jm}}{\partial r}\right|_{r=+\infty} = 0,\ j = 1, 2, \tag{12}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^1\right)u_{1m} - \left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^1\right)u_{2m}\right]\right|_{z=0} = 0,\ j = 1, 2. \tag{13}$$

До задачі (9) – (13) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя щодо радіальної змінної r [16]:

$$H_\nu[g(r)] = \int_0^{+\infty} g(r)\mathfrak{I}_\nu(\lambda r)r dr \equiv \tilde{g}(\lambda), \tag{14}$$

$$H_\nu^{-1}[\tilde{g}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\lambda)\mathfrak{I}_\nu(\lambda r)\lambda d\lambda \equiv g(r), \tag{15}$$

$$H_\nu\left[\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2}g\right] = -\lambda^2 H_\nu[g(r)] \equiv -\lambda^2\tilde{g}(\lambda), \tag{16}$$

де $\mathfrak{I}_\nu(x)$ – циліндрична функція дійсного аргументу 1-го роду ν-го порядку.

Інтегральний оператор H_m за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (9) – (13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,z)|t>0; z\in I_1\cup I_2\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{u}_{jm}}{\partial z^2} + (a_{rj}^2\lambda^2+\chi_j^2)\tilde{u}_{jm} = \tilde{f}_{jm}(t,\lambda,z),\ z\in I_j,\ j=1,2,\quad (17)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}(\lambda,z);\ \left.\frac{\partial\tilde{u}_{jm}}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{\omega}_{jm}(\lambda,z),\ \ z\in I_j,\ \ j=1,2,\qquad (18)$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^k\tilde{u}_{1m}}{\partial z^k}\right|_{z=-\infty} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^k\tilde{u}_{2m}}{\partial z^k}\right|_{z=+\infty} = 0,\ \ k=0,1,\qquad (19)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^1\right)\tilde{u}_{1m} - \left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^1\right)\tilde{u}_{2m}\right]\right|_{z=0} = 0; j=1,2.\qquad (20)$$

До задачі (17) – (20) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $I_1\cup I_2$ з однією точкою спряження щодо змінної z [14]:

$$F_1[g(z)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z)\overline{V(z,\beta)}\sigma(z)dz \equiv \tilde{g}(\beta),\qquad (21)$$

$$F_1^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Re}\,[\tilde{g}(\beta)V(z,\beta)]\,\Omega(\beta)\,d\beta \equiv g(z),\qquad (22)$$

$$F_1\left[a_{z1}^2\theta(-z)\frac{d^2g}{dz^2} + a_{z2}^2\theta(z)\frac{d^2g}{dz^2}\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) -$$
$$-k_1^2\int\limits_{-\infty}^{0} g(z)\overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1 dz - k_2^2\int\limits_0^{\infty} g(z)\overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2 dz.\qquad (23)$$

У формулах (21) – (23) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\beta) = V_1(z,\beta)\theta(-z) + V_2(z,\beta)\theta(z),\ \ \sigma(z) = \sigma_1\theta(-z)+\sigma_2\theta(z),$$

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}}\ \frac{1}{a_{z1}^2},\ \sigma_2 = \frac{1}{a_{z2}^2},\ \Omega(\beta) = \frac{\beta}{\bar{b}_2(\beta)\omega(\beta)},$$

$$V_1(z,\beta) = \sqrt{\frac{c_{21}\bar{b}_2(\beta)}{c_{11}\omega_3(\beta)}}\Big[\omega_3(\beta)cos(\bar{b}_1(\beta)z) - \omega_4(\beta)sin(\bar{b}_1(\beta)z)\Big] -$$
$$-ic_{21}\bar{b}_2(\beta)\sqrt{\frac{\omega(\beta)}{\bar{b}_1(\beta)\omega_3(\beta)}}sin(\bar{b}_1(\beta)z),\ i=\sqrt{-1},$$

$$V_2(z,\beta) = \sqrt{\frac{c_{11}c_{21}\bar{b}_2(\beta)}{\omega_3(\beta)}}\Big[\omega_2(\beta)cos(\bar{b}_2(\beta)z) - \omega_1(\beta)sin(\bar{b}_2(\beta)z)\Big] -$$
$$-i\sqrt{\frac{\bar{b}_1(\beta)\omega(\beta)}{\omega_3(\beta)}}\Big[a_{11}^1\bar{b}_2(\beta)cos(\bar{b}_2(\beta)z) - a_{12}^1 sin(\bar{b}_2(\beta)z)\Big],$$

$$a_{11}^1 = \alpha_{11}^1\alpha_{22}^1 - \alpha_{21}^1\alpha_{12}^1, \quad a_{12}^1 = \alpha_{11}^1\beta_{22}^1 - \alpha_{21}^1\beta_{12}^1,$$

$$a_{21}^1 = \beta_{11}^1\alpha_{22}^1 - \beta_{22}^1\alpha_{12}^1, \quad a_{22}^1 = \beta_{11}^1\beta_{22}^1 - \beta_{21}^1\beta_{12}^1,$$

$$\bar{b}_j(\beta) = a_{zj}^{-1}b_j(\beta), \quad b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2},\ j=1,2,$$

$$\omega_1(\beta) = a_{11}^1\bar{b}_1(\beta)\bar{b}_2(\beta) + a_{22}^1, \quad \omega_2(\beta) = a_{21}^1\bar{b}_2(\beta) - a_{12}^1\bar{b}_1(\beta),$$

$$\omega(\beta) = \omega_1^2(\beta) + \omega_2^2(\beta), \quad \omega_3(\beta) = a_{11}^1\omega_1(\beta)\bar{b}_2(\beta) - a_{12}^1\omega_2(\beta),$$

$$\omega_4(\beta) = a_{12}^1 a_{22}^1 + a_{11}^1 a_{21}^1\bar{b}_2^2(\beta) \equiv a_{12}^1\omega_1(\beta) + a_{11}^1\omega_2(\beta)\bar{b}_2(\beta),$$

де Re $[\cdots]$ – дійсна частина виразу $[\cdots]$ щодо z; $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (17) та початкові умови (18) у матричній формі

$$\left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2\right)\tilde{u}_{1m} \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r2}^2\lambda^2 + \chi_2^2\right)\tilde{u}_{2m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{f}_{1m}(t,\lambda,z) \\ \tilde{f}_{2m}(t,\lambda,z) \end{array}\right], \tag{24}$$

$$\left.\left[\begin{array}{c} \tilde{u}_{1m} \\ \tilde{u}_{2m} \end{array}\right]\right|_{t=0} = \left[\begin{array}{c} \tilde{g}_{1m}(\lambda,z) \\ \tilde{g}_{2m}(\lambda,z) \end{array}\right],\ \frac{\partial}{\partial t}\left.\left[\begin{array}{c} \tilde{u}_{1m} \\ \tilde{u}_{2m} \end{array}\right]\right|_{t=0} = \left[\begin{array}{c} \tilde{\omega}_{1m}(\lambda,z) \\ \tilde{\omega}_{2m}(\lambda,z) \end{array}\right]. \tag{25}$$

Інтегральний оператор F_1, який діє за правилом (21), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_1[\cdots] = \left[\int\limits_{-\infty}^{0} \cdots \overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1 \, dz \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \cdots \overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2 \, dz \right] \tag{26}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25).

Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2 + k_1^2 \right) \tilde{\tilde{u}}_{1m} +$$
$$+ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + a_{r2}^2\lambda^2 + \chi_2^2 + k_2^2 \right) \tilde{\tilde{u}}_{2m} = \tilde{\tilde{f}}_{1m}(t,\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{f}}_{2m}(t,\lambda,\beta), \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\tilde{u}}_{1m} + \tilde{\tilde{u}}_{2m}\right)\big|_{t=0} &= \tilde{\tilde{g}}_{1m}(\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{g}}_{2m}(\lambda,\beta), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\tilde{u}}_{1m} + \tilde{\tilde{u}}_{2m}\right)\Big|_{t=0} &= \tilde{\tilde{\omega}}_{1m}(\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{\omega}}_{2m}(\lambda,\beta), \end{aligned} \tag{28}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{1m}(t,\lambda,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{u}_{1m}(t,\lambda,z)\overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1 \, dz,$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{2m}(t,\lambda,\beta) = \int\limits_{0}^{+\infty} \tilde{u}_{2m}(t,\lambda,z)\overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2 \, dz$$

і аналогічно $\tilde{\tilde{f}}_{1m}$, $\tilde{\tilde{f}}_{2m}$, $\tilde{\tilde{g}}_{1m}$, $\tilde{\tilde{g}}_{2m}$, $\tilde{\tilde{\omega}}_{1m}$, $\tilde{\tilde{\omega}}_{2m}$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $[\chi_1^2 - \chi_2^2 + (a_{r1}^2 - a_{r2}^2)\lambda^2] \geq 0$ при будь-яких $\lambda \in (0; +\infty)$ і покладемо всюди

$k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \chi_1^2 - \chi_2^2 + (a_{r1}^2 - a_{r2}^2)\lambda^2$.

Задача Коші (27), (28) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda,\beta)\tilde{\tilde{u}}_m = \tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda,\beta), \tag{29}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_m\big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m(\lambda,\beta); \ \frac{d\tilde{\tilde{u}}_m}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{\omega}}_m(\lambda,\beta), \tag{30}$$

де $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\beta) = \tilde{\tilde{u}}_{1m}(t,\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{u}}_{2m}(t,\lambda,\beta)$, $\Delta(\lambda,\beta) = (\beta^2 + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2)^{1/2}$, $\tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda,\beta) = \tilde{\tilde{f}}_{1m}(t,\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{f}}_{2m}(t,\lambda,\beta)$, $\tilde{\tilde{g}}_m(\lambda,\beta) = \tilde{\tilde{g}}_{1m}(\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{g}}_{2m}(\lambda,\beta)$, $\tilde{\tilde{\omega}}_m(\lambda,\beta) = \tilde{\tilde{\omega}}_{1m}(\lambda,\beta) + \tilde{\tilde{\omega}}_{2m}(\lambda,\beta)$.

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком неоднорідної задачі Коші (29), (30) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\beta) = \frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{\omega}}_m(\lambda,\beta) + \frac{d}{dt}\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_m(\lambda,\beta) + \\ + \int\limits_0^t \frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda,\beta)\,d\tau. \tag{31}$$

Оскільки суперпозиція операторів F_1 та F_1^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_1^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_1^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cdots V_1(z,\beta)\Omega(\beta)\,d\beta \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cdots V_2(z,\beta)\Omega(\beta)\,d\beta \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\beta)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\beta)$ визначена формулою (31). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок початково-крайової задачі (17) – (20):

$$\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z) = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Re}\,\left[\left(\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{\omega}}_m(\lambda,\beta) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\partial}{\partial t}\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_m(\lambda,\beta)\right) V_j(z,\beta)\right]\Omega(\beta)\,d\beta + \\ + \int\limits_0^t \tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} Re\left[\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda,\beta)V_j(z,\beta)\right]\Omega(\beta)\,d\beta d\tau,\ j=1,2. \tag{33}$$

До функцій $\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z)$, визначених формулами (33), послідовно застосуємо обернені оператори H_m^{-1} за правилом (15) та F_m^{-1} за правилом

(7). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$
\begin{aligned}
& u_j(t,r,\varphi,z) = \\
&= \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{0} E_{j1}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) f_1(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho \, d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{j2}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) f_2(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho \, d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{0} E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) g_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho \, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) g_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho \, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{0} E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) \omega_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho \, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) \omega_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho \, d\xi d\alpha d\rho, \ j=1,2,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

які визначають єдиний обмежений розв'язок гіперболічної крайової задачі (1) – (5).

У формулах (34) застосовано компоненти

$$
E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi) \cos{(m,\varphi)} \tag{35}
$$

матриці впливу (функції впливу) розглянутої задачі, де

$$
\begin{gathered}
E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)} \operatorname{Re}\left[V_j(z,\beta)\,\overline{V_k(\xi,\beta)}\right] \times \\
\times \Omega(\beta)\, d\beta \mathfrak{I}_m(\lambda r) \mathfrak{I}_m(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \ j,k=1,2.
\end{gathered}
$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (34), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (34) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1) – (5) в ізотропному необмеженому двоскладовому циліндрично-круговому просторі.

Зауваження 2. Аналіз розв'язку (34) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $\omega_j(r,\varphi,z)$, $j=1,2$, проводиться безпосередньо.

2. $\langle a;b\rangle \equiv (R_0;+\infty)$, $R_0>0$. У цьому випадку вважаємо, що виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h\right)u_j\bigg|_{r=R_0}=\theta_j(t,\varphi,z),\;\; \frac{\partial u_j}{\partial r}\bigg|_{r=+\infty}=0,\; z\in I_j,\; j=1,2, \quad (36)$$

де h – деяка невід'ємна стала, $\theta(t,\varphi,z)=\{\theta_1(t,\varphi,z),\theta_2(t,\varphi,z)\}$ – задана обмежена неперервна функція.

Припустимо, що розв'язок задачі (1) – (4), (36) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [15, 16, 14].

До задачі (1) – (4), (36) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ. Інтегральний оператор F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1) – (4), (36) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'=\{(t,r,z)|t>0; r\in(R_0,+\infty); z\in I_1\cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь (9) з початковими умовами (10), крайовими умовами (11), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h\right)u_{jm}\bigg|_{r=R_0}=\theta_{jm}(t,z),\;\; \frac{\partial u_{jm}}{\partial r}\bigg|_{r=+\infty}=0,\; z\in I_j,\; j=1,2, \quad (37)$$

та умовами спряження (13).

До задачі (9) – (11), (37), (13) застосуємо інтегральне перетворення Вебера щодо радіальної змінної r [16]:

$$H_{\nu,0}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{+\infty} g(r)f_{\nu,0}(r,\lambda)rdr\equiv\tilde g(\lambda), \quad (38)$$

$$H^{-1}_{\nu,0}[\tilde g(\lambda)]=\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde g(\lambda)\frac{f_{\nu,0}(r,\lambda)\lambda d\lambda}{A^2_{\nu,0}(\lambda)+B^2_{\nu,0}(\lambda)}\equiv g(r), \quad (39)$$

$$H_{\nu,0}\left[\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}g\right]=$$

$$=-\lambda^2\tilde g(\lambda)+R_0 f_{\nu,0}(R_0,\lambda)\left(-\frac{dg}{dr}+hg\right)\bigg|_{r=R_0}, \quad (40)$$

де

$$f_{\nu,0}(r,\lambda) = B_{\nu,0}(\lambda)N_\nu(\lambda r) - A_{\nu,0}(\lambda)\mathfrak{I}_\nu(\lambda r),$$

$$B_{\nu,0}(\lambda) = (\frac{\nu}{R_0} + h)\mathfrak{I}_\nu(\lambda R_0) - \lambda \mathfrak{I}_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

$$A_{\nu,0}(\lambda) = (\frac{\nu}{R_0} + h)N_\nu(\lambda R_0) - \lambda N_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

$N_\nu(x)$ – циліндрична функція дійсного аргумента 2-го роду ν-го порядку.

Інтегральний оператор $H_{m,0}$ за правилом (38) внаслідок тотожності (40) крайовій задачі (9) – (11), (37), (13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,z)|t>0; z \in I_1 \cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial z^2} + (a_{rj}^2 \lambda^2 + \chi_j^2)\tilde{u}_{jm} = \tilde{F}_{jm}(t,\lambda,z),\ z \in I_j,\ j=1,2, \quad (41)$$

з початковими умовами (18), крайовими умовами (19) та умовами спряження (20), де

$$\tilde{F}_{jm}(t,\lambda,z) = \tilde{f}_{jm}(t,\lambda,z) + a_{rj}^2 R_0 f_{m,0}(R_0,\lambda)\theta_{jm}(t,z),\ j=1,2.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (41), (18) – (20) збігається із задачею (17) – (20). Отже, відповідно до формул (33), єдиний обмежений розв'язок задачі (41), (18) – (20) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z) = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Re}\Bigg[\Bigg(&\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{\omega}}_m(\lambda,\beta) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_m(\lambda,\beta)\Bigg)V_j(z,\beta)\Bigg]\Omega(\beta)\,d\beta + \\ + \int\limits_0^t \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Re}\Bigg[&\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\beta)}\tilde{\tilde{F}}_m(\tau,\lambda,\beta)V_j(z,\beta)\Bigg]\Omega(\beta)\,d\beta d\tau, j=1,2. \end{aligned} \quad (42)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z)$, визначених формулами (42), обернені оператори $H_{m,0}^{-1}$ та F_m^{-1}, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z) =$$
$$=\int_0^t\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{0} E_{j1}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_1(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\, d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} E_{j2}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_2(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\, d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{0} E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\, d\xi d\alpha d\rho+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\, d\xi d\alpha d\rho+$$
$$+\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{0} E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)\omega_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\, d\xi d\alpha d\rho+ \tag{43}$$
$$+\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)\omega_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\, d\xi d\alpha d\rho+$$
$$+a_{rj}^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{0} W_{j1}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_1(\tau,\alpha,\xi)\sigma_1\, d\xi d\alpha d\tau+$$
$$+a_{rj}^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{0}^{+\infty} W_{j2}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_2(\tau,\alpha,\xi)\sigma_2\, d\xi d\alpha d\tau,\ j=1,2,$$

які визначають єдиний обмежений розв'язок гіперболічної крайової задачі (1) – (4), (36).

У формулах (43) застосовано компоненти $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ матриці впливу, визначені формулами (35), та компоненти

$$W_{jk}(t,r,\varphi,z,\xi) = R_0E_{jk}(t,r,R_0,\varphi,z,\xi)$$

радіальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{sin(\Delta(\lambda,\beta)t)}{\Delta(\lambda,\beta)}Re\left[V_j(z,\beta)\,\overline{V_k(\xi,\beta)}\right]\times$$
$$\times\Omega(\beta)\,d\beta\frac{f_{m,0}(r,\lambda)f_{m,0}(\rho,\lambda)\lambda}{A_{m,0}^2(\lambda)+B_{m,0}^2(\lambda)}d\lambda.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}(t,r,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції

$u_j(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (43), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (36) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої крайової задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (43) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайової умови 1-го роду ($h \to \infty$) та 2-го роду ($h \to 0$).

3. $\langle a; b\rangle \equiv (0; R), R < +\infty$. У цьому випадку вважаємо, що виконуються крайові умови

$$u_j|_{r=0} = 0, \ \left(\frac{\partial}{\partial r} + h\right) u_j\bigg|_{r=R} = \theta_j(t, \varphi, z), \ z \in I_j, \ j = 1, 2, \tag{44}$$

де h – деяка невід'ємна стала; $\theta(t, \varphi, z) = \{\theta_1(t, \varphi, z); \theta_2(t, \varphi, z)\}$ – задана обмежена неперервна функція.

Припустимо, що розв'язок задачі (1) – (4), (44) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [15, 17, 14].

До задачі (1) – (4), (44) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ. Інтегральний оператор F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1) – (4), (44) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, z)|t > 0; r \in (0; R); \ z \in I_1 \cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь (9) з початковими умовами (10), крайовими умовами (11), крайовими умовами

$$u_{jm}|_{r=0} = 0, \ \left(\frac{\partial}{\partial r} + h\right) u_{jm}\bigg|_{r=R} = \theta_{jm}(t, r), \ z \in I_j, \ j = 1, 2, \tag{45}$$

та умовами спряження (13).

До задачі (9) – (11), (45), (13) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Ганкеля 1-го роду щодо радіальної змінної r [17]:

$$\mathcal{H}_\nu[g(r)] = \int_0^R g(r)\mathcal{J}_\nu(\beta_n r) r dr \equiv g_n, \tag{46}$$

$$\mathcal{H}_\nu^{-1}[g_n] = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{\mathcal{J}_\nu(\beta_n r)}{||\mathcal{J}_\nu(\beta_n r)||^2} \equiv g(r), \tag{47}$$

$$\mathcal{H}_\nu\left[\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}g\right]=-\beta_n^2g_n+R\mathcal{I}_\nu(\beta_nR)\left(\frac{dg}{dr}+hg\right)\Big|_{r=R}, \qquad (48)$$

де $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння Бесселя 1-го роду

$$\left(\frac{\nu}{R}+h\right)\mathcal{I}_\nu(\beta R)-\beta\mathcal{I}_{\nu+1}(\beta R)=0,$$

які утворюють дискретний спектр, а квадрат форми спектральної функції

$$||\mathcal{I}_\nu(\beta_nr)||^2\equiv\int\limits_0^R\mathcal{I}_\nu^2(\beta_nr)rdr=$$

$$=(R^2/2)[\mathcal{I}_\nu^2(\beta_nR)-2\nu(\beta_nR)^{-1}\mathcal{I}_\nu(\beta_nR)\mathcal{I}_{\nu+1}(\beta_nR)+\mathcal{I}_{\nu+1}^2(\beta_nR)].$$

Інтегральний оператор $\mathcal{H}_m$ за правилом (46) внаслідок тотожності (48) крайовій задачі (9) – (11), (45), (13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\{(t,z))|t>0;z\in I_1\cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2u_{jmn}}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2u_{jmn}}{\partial z^2}+(a_{rj}^2\beta_n^2+\chi_j^2)u_{jmn}=F_{jmn}(t,z),\ z\in I_j,\ j=1,2, \qquad (49)$$

з початковими умовами

$$u_{jmn}|_{t=0}=g_{jmn}(z),\ \frac{\partial u_{jmn}}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega_{jmn}(z),\ z\in I_j,\ j=1,2, \qquad (50)$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^ku_{1mn}}{\partial z^k}\Big|_{z=-\infty}=0,\ \frac{\partial^ku_{2mn}}{\partial z^k}\Big|_{z=+\infty}=0,\ k=0,1, \qquad (51)$$

та умовами спряження

$$\left[(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^1)u_{1mn}-(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^1)u_{2mn}\right]\Big|_{z=0}=0,\ j=1,2, \qquad (52)$$

де

$$F_{jmn}(t,z)=f_{jmn}(t,z)+a_{rj}^2R\mathcal{I}_m(\beta_nR)\theta_{jm}(t,z),\ j=1,2.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (49) – (52) збігається із задачею (17) – (20). Отже, відповідно до формул

(33), єдиний обмежений розв'язок задачі (49) – (52) визначають функції

$$
\begin{aligned}
u_{jmn}(t,z) = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} Re \Bigg[\bigg(\frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)t)}{\Delta(\beta_n,\beta)} \tilde{\omega}_{mn}(\beta) + \\
+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)t)}{\Delta(\beta_n,\beta)} \tilde{g}_{mn}(\beta) \bigg) V_j(z,\beta) \Bigg] \Omega(\beta)\, d\beta + \\
+ \int\limits_0^t \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} Re \left[\frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\beta_n,\beta)} \tilde{F}_{mn}(\tau,\beta) V_j(z,\beta) \right] \Omega(\beta)\, d\beta d\tau, j=1,2.
\end{aligned} \tag{53}
$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jmn}(t,z)$, визначених формулами (53), обернені оператори $\mathcal{H}_m^{-1}$ та F_m^{-1}, одержуємо функції

$$
\begin{aligned}
& u_j(t,r,\varphi,z) = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^0 E_{j1}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) f_1(\tau,\rho,\alpha,\xi) \sigma_1 \rho\, d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
&+ \int\limits_0^t \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} E_{j2}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) f_2(\tau,\rho,\alpha,\xi) \sigma_2 \rho\, d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
&+ \tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^0 E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) g_1(\rho,\alpha,\xi) \sigma_1 \rho\, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ \tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) g_2(\rho,\alpha,\xi) \sigma_2 \rho\, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^0 E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) \omega_1(\rho,\alpha,\xi) \sigma_1 \rho\, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) \omega_2(\rho,\alpha,\xi) \sigma_2 \rho\, d\xi d\alpha d\rho + \\
&+ a_{rj}^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^0 W_{j1}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi) \theta_1(\tau,\alpha,\xi) \sigma_1\, d\xi d\alpha d\tau + \\
&+ a_{rj}^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} W_{j2}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi) \theta_2(\tau,\alpha,\xi) \sigma_2\, d\xi d\alpha d\tau,\ j=1,2,
\end{aligned} \tag{54}
$$

які визначають єдиний обмежений розв'язок гіперболічної крайової задачі (1) – (4),(44).

У формулах (54) застосовано компоненти $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ матриці впливу, визначені формулами (35), та компоненти

$$W_{jk}(t,r,\varphi,z,\xi) = RE_{jk}(t,r,R,\varphi,z,\xi)$$

радіальної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)t)}{\Delta(\beta_n,\beta)}Re\left[V_j(z,\beta)\,\overline{V_k(\xi,\beta)}\right]\times$$

$$\times\Omega(\beta)\,d\beta\frac{\mathfrak{I}_m(\beta_n r)\mathfrak{I}_m(\beta_n\rho)}{||\mathfrak{I}_m(\beta_n r)||^2},\ j,k=1,2.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (54), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (44) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої крайової задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (54) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r=R$ крайової умови 1-го та 2-го роду.

4. $\langle a;b\rangle\equiv(R_0;R)$. У цьому випадку вважаємо, що виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h_1\right)u_j\Big|_{r=R_0}=\theta_j^1(t,\varphi,z),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+h_2\right)u_j\Big|_{r=R}=\theta_j^2(t,\varphi,z),\ z\in I_j,\ j=1,2, \tag{55}$$

де $h_j(j=1,2)$ – деякі невід'ємні сталі; $\theta^1(t,\varphi,z)=\{\theta_1^1(t,\varphi,z);\theta_2^1(t,\varphi,z)\}$; $\theta^2(t,\varphi,z)=\{\theta_1^2(t,\varphi,z);\theta_2^2(t,\varphi,z)\}$ – задані обмежені неперервні функції.

Припустимо, що розв'язок задачі (1) – (4), (55) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [15, 17, 14].

До задачі (1) – (4), (55) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ. Інтегральний оператор F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)-(4), (55) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'=\{(t,r,z)|t>0;r\in(R_0;R);z\in I_1\cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь (9) з початковими умовами (10), крайовими умовами (11), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h_1\right)u_{jm}\Big|_{r=R_0}=\theta_{jm}^1(t,z),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+h_2\right)u_{jm}\Big|_{r=R}=\theta^2_{jm}(t,z),\ z\in I_j, j=1,2, \tag{56}$$

та умовами спряження (13).

До задачі (9) – (11), (56), (13) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Ганкеля 2-го роду щодо радіальної змінної r [17]:

$$\mathcal{H}_{\nu,0}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{R}g(r)f_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)rdr\equiv g_n, \tag{57}$$

$$\mathcal{H}^{-1}_{\nu,0}[g_n]=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\frac{f_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)}{||f_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)||^2}\equiv g(r), \tag{58}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_{\nu,0}\left[\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}g\right]=-\beta_n^2g_n+\\ +R_0f_{\nu,0}(\beta_nR_0,\beta_nR)\left(-\frac{dg}{dr}+h_1g\right)\Big|_{r=R_0}+\\ +Rf_{\nu,0}(\beta_nR,\beta_nR)\left(\tfrac{dg}{dr}+h_2g\right)\Big|_{r=R},\end{gathered} \tag{59}$$

де $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння Бесселя 2-го роду

$$c_{1\nu}f_{\nu,0}(\beta R_0,\beta R)+\beta^2R_0g_{\nu,0}(\beta R_0,\beta R)=0,$$

які утворюють дискретний спектр, а

$$f_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)=c_{2\nu}u_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)-\beta_n^2Rv_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)$$

– відповідна спектральна функція з квадратом норми

$$||f_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)||^2\equiv\int\limits_{R_0}^{R}f^2_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)rdr,$$

$$v_{\nu,\alpha}(x,y)=\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(x)N_{\nu,\alpha}(y)-\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(y)N_{\nu,\alpha}(x),$$

$$u_{\nu,\alpha}(x,y)=\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(x)N_{\nu+1,\alpha+1}(y)-\mathcal{J}_{\nu+1,\alpha+1}(y)N_{\nu,\alpha}(x),$$

$$\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}\mathcal{J}_{\nu}(x),N_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}N_{\nu}(x),$$

$$g_{\nu,0}(\beta_n r,\beta_n R)=c_{2\nu}v_{\nu,0}(\beta_n R,\beta_n r)+\beta_n^2Ru_{\nu+1,1}(\beta_n r,\beta_n R),$$

$$c_{1\nu} = \frac{\nu}{R_0} + h_1, \; c_{2\nu} = \frac{\nu}{R} + h_2.$$

Інтегральний оператор $\mathcal{H}_{m,0}$ за правилом (57) внаслідок тотожності (59) крайовій задачі (9) – (11), (56), (13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,z)|t>0; z \in I_1 \cup I_2\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jmn}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 u_{jmn}}{\partial z^2} + (a_{rj}^2 \beta_n^2 + \chi_j^2) u_{jmn} = G_{jmn}(t,z), \; z \in I_j, \; j = 1,2, \quad (60)$$

з початковими умовами (50), крайовими умовами (51) та умовами спряження (52), де

$$G_{jmn}(t,z) = f_{jmn}(t,z) + a_{rj}^2 R_0 f_{m,0}(\beta_n R_0, \beta_n R) \theta_{jm}^1(t,z) +$$

$$+ a_{rj}^2 R f_{m,0}(\beta_n R, \beta_n R) \theta_{jm}^2(t,z), \; j = 1,2.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (60), (50) – (52) збігається із задачею (49) – (52). Отже, відповідно до формули (53), єдиний обмежений розв'язок задачі (60), (50) – (52) визначають функції

$$\begin{aligned} u_{jmn}(t,z) = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Re} \Bigg[\Bigg(& \frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)t)}{\Delta(\beta_n,\beta)} \tilde{\omega}_{mn}(\beta) + \\ + \; & \frac{\partial}{\partial t} \frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)t)}{\Delta(\beta_n,\beta)} \tilde{g}_{mn}(\beta) \Bigg) V_j(z,\beta) \Bigg] \Omega(\beta)\, d\beta + \\ + \int\limits_0^t \tfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Re} \left[\frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\beta_n,\beta)} \tilde{G}_{mn}(\tau,\beta) V_j(z,\beta) \right] & \Omega(\beta)\, d\beta d\tau, \; j = 1,2. \end{aligned} \quad (61)$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jmn}(t,z)$, визначених формулами (61), обернені оператори $H_{m,0}^{-1}$ та F_m^{-1}, одержуємо функції

$$
\begin{aligned}
u_j(t,r,\varphi,z) = \\
=\int_0^t\int_{R_0}^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 E_{j1}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_1(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\,d\xi d\alpha d\rho d\tau+\\
+\int_0^t\int_{R_0}^R\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} E_{j2}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_2(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\,d\xi d\alpha d\rho d\tau+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_0}^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\,d\xi d\alpha d\rho+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_0}^R\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\,d\xi d\alpha d\rho+\\
+\int_{R_0}^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 E_{j1}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)\omega_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\,d\xi d\alpha d\rho+\\
+\int_{R_0}^R\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} E_{j2}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)\omega_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\,d\xi d\alpha d\rho+ \qquad (62)\\
+a_{rj}^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 W_{j1}^1(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_1^1(\tau,\alpha,\xi)\sigma_1\,d\xi d\alpha d\tau+\\
+a_{rj}^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} W_{j2}^1(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_2^1(\tau,\alpha,\xi)\sigma_2\,d\xi d\alpha d\tau+\\
+a_{rj}^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 W_{j1}^2(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_1^2(\tau,\alpha,\xi)\sigma_1\,d\xi d\alpha d\tau+\\
+a_{rj}^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} W_{j2}^2(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_2^2(\tau,\alpha,\xi)\sigma_2\,d\xi d\alpha d\tau,\ j=1,2,
\end{aligned}
$$

які визначають єдиний обмежений розв'язок гіперболічної крайової задачі (1) – (4), (55).

У формулах (62) застосовано компоненти $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ матриці впливу, визначені формулами (35), компоненти лівої радіальної матриці $W_{jk}^1(t,r,\varphi,z,\xi)=R_0E_{jk}(t,r,R_0,\varphi,z,\xi)$ та компоненти правої радіальної матриці Гріна $W_{jk}^2(t,r,\varphi,z,\xi)=RE_{jk}(t,r,R,\varphi,z,\xi)$ розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{sin(\Delta(\beta_n,\beta)t)}{\Delta(\beta_n,\beta)}Re\left[V_j(z,\beta)\,\overline{V_k(\xi,\beta)}\right]\times$$

$$\times\Omega(\beta)\,d\beta\frac{f_{m,0}(\beta_n r,\beta_n R)f_{m,0}(\beta_n\rho,\beta_n R)}{||f_{m,0}(\beta_n r,\beta_n R)||^2},\ \ j,k=1,2.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W^s_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$, $s=1,2$, безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (62), задовольнють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (55) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої крайової задачі; 2) параметри h_j $(j=1,2)$ дають можливість виділяти із формул (62) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальних поверхнях $r=R_0$, $r=R$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

4 Висновки

За найбільш загальних обмежень на вихідні дані задачі побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових просторових областях, які описуються циліндричною системою координат. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних середовищах.

[1] *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

[2] *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. – Чернівці : Рута, 1998. – 225 с.

[3] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. – М. : ИЛ, 1957. – 256 с.

[4] *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М.І. Матійчук. – Чернівці : Прут, 2003. – 248 с.

[5] *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М. : Наука, 1966. – 292 с.

[6] *Подстригач Я.С.* Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.

[7] *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1998. – 614 с.

[8] *Сергиенко И.В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – 432 с.

[9] *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1992. – 280 с.

[10] *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарський. – М. : Наука, 1972. – 735 с.

[11] *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І.М. Конет. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.

[12] *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2001. – 312 с.

[13] *Конет І.М.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2004. – 276 с.

[14] *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К. : Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.

[15] *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж. Трантер. – М. : Гостехтеориздат, 1956. – 204 с.

[16] *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье) / М.П. Ленюк. – К., 1983. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.18).

[17] *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М.П. Ленюк. – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).

[18] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN UNBOUNDED CYLINDRICAL DISYLLABIC DOMAINS

Ivan KONET

Kamyanets-Podilsky National Ivan Ohienko University

61, Ohienko Str., Kamyanets-Podilsky 32300

The analytic form of exact solutions to hyperbolic boundary value problems of algorithmic nature in unbounded cylindrical domains disyllabic is obtained by means of integral transform methods.